NUMĂR FESTIV

CU OCAZIUNEA ÎMPLINIRII A 40 ANI DE EXISTENȚĂ

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 1. — SEPTEMVRIE 1935

BIBLIOTECA CENTRALĂ SIBIU

SUMARUL

1. Lista Membrilor Societății «Gazeta Matematică".
2. Membrii decedați.
3. Patruzeci de ani dela întemeierea „Gazetei Matematice". *G. Țițeica.*
4. Prima aritmetică tipărită în limba română. . . . . *Ion Ionescu.*
5. Volumul și centrul de greutate al calotei sferice. *A. G. Ioachimescu.*
6. Topologie elementară. . *G. Țițeica.*
7. Limita razei cercului circumscris triunghiului format de trei tangente infinit vecine la o curbă plană. . . . . *N. Abramescu.*
8. Limita unor triunghiuri. *General Gh. Buicliu.*
9. Spectrul detentei de gaze la gura țevilor de tun sau armă. *Maior I. Linteș.*
10. Asupra rădăcinilor ecuațiilor în care coeficientul lui x^p are cel mai mare modul. . . *Petre Sergescu.*
11. Rezolvarea problemelor practice de matematici. *Ing. I. I. Chițulescu.*
12. Divizibilitatea numerelor. *Lt-Comandor Gr. Zapan.*
13. O clasă de constante remarcabile. *M. Ghermănescu.*
14. Asupra problemei 1402. *O. N. Țino.*
15. O proprietate a unei familii de traectorii. . . . . *D. V. Ionescu.*
16. Asupra unor integrale. *Th. Angheluță.*
17. Asupra fascicolelor de cercuri. *D. Barbilian.*
18. Observație asupra ecuațiilor algebrice având toate rădăcinile reale. *Tiberiu Popoviciu.*
19. O clasă specială de funcțiuni periodice. . . . . *Miron Nicolescu.*
20. Medii definite prin operația de mediație aritmetică asupra argumentelor unor funcțuni. *Nicolae Ciorănescu.*
21. O generalizare a formulei lui Leibnitz. *N. Botea.*
22. Asupra funcțiunii lui Bessel. *Gh. Th. Gheorghiu.*
23. Asupra unor tetraedre. *C. Ionescu-Bujor.*
24. O teoremă relativă la patrulatere circumscriptibile. *Gh. D. Simionescu.*
25. Concursul „Gazetei Matematice" din 1935.
26. Concursul „Gazetei Matematice" din 1936.
27. Premiile și alte dispoziții ale fondurilor „Gazetei Matematice".
28. Note matematice : 1—4.
29. Bibliografie.
30. Cereri : 249.
31. Diverse.
32. Probleme rezolvate : 691, 944, 1773, 2709, 2972, 4255, 4343, 4354, 4361, 4427.
33. Exerciții : 1.
34. Probleme propuse : 4559—4576.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea **„Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 502, 03, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 93, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 08, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 70, 80, 84, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 42, 45, 49, 52, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 98, 500, 03, 04, 05, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 42, 44, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii 1 — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *„Gazeta Matematică"* cu preţul de 12 lei.

GAZETA MATEMATICA

GAZETA MATEMATICA

FOAE LUNARA

DE

MATEMATICI ELEMENTARE ŞI SPECIALE

PENTRU UZUL

ŞCOALELOR SECUNDARE, SPECIALE ŞI SUPERIOARE

VOLUMUL XLI

15 SEPTEMVRIE 1935 — 15 AUGUST 1936

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1935

LISTA MEMBRILOR
SOCIETĂȚII „GAZETA MATEMATICĂ”

DELEGAȚIUNEA PENTRU ANUL 1935 *)

I. BUȘILĂ, A. IOANOVICI și AL. D. BUNESCU (Cassier)

PERSONALUL REDACȚIUNII

I. IONESCU. Membru delegat pentru: cereri, diverse și eventuale suplimente.
G. ȚIȚEICA și M. GHERMĂNESCU. Raportori.
LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membru delegat pentru: schimburi de reviste și primirea lor, recreațiuni, reclamațiuni privitoare la tipărire, primirea și repartizarea manuscriselor destinate *Gazetei Matematice*.
GH. ILIESCU. Membru delegat pentru convocările lunare.
Z. CONSTANTINESCU, GH. ILIESCU, B. MĂRĂCINE, LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru corecturi și imprimarea revistei.
CENERAL GH. BUICLIU, O. ȚINO și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru aritmetică elementară.
D. BARBILIAN, N. BOTEA, C. IONESCU-BUJOR, LT.-COMANDOR GH. NICULESCU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometrie elementară.
GH. TH. GHEORGHIU, COL. GH. LITEANU, O. ȚINO și GH. VASILIU. Membri delegați pentru trigonometrie.
TH. ANGHELUȚĂ, N. CIORĂNESCU, GH. TH. GHEORGHIU, C. IONESCU-BUJOR și M. SARIAN. Membri delegați pentru algebră elementară.
I. CHIȚULESCU și C. ORĂȘANU. Membri delegați pentru geometria descriptivă.
CR. MATEESCU, R. WOINAROSKI și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru mecanică elementară.
GENERAL GH. BUICLIU și O. ȚINO. Membri delegați pentru geometria analitică.
C. ORĂȘANU și A. PÂRVU. Membri delegați pentru cosmografie.
TH. ANGHELUȚĂ și M. GHERMĂNESCU. Membri delegați pentru probleme și note de matematici superioare.
TH. ANGHELUȚĂ, GH. TH. GHEORGHIU, D. V. IONESCU și P. SERGESCU. Membri delegați pentru probleme propuse de matematici superioare.
O. ȚINO. Membru delegat pentru clasarea problemelor propuse.
C. IONESCU-BUJOR. Membru delegat pentru exerciții.
N. ABRAMESCU, V. ALACI, N. BOTEA, COLONEL GH. LITEANU, MIRON NICULESCU, M. SARIAN și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru chestiuni de examen.
GENERAL GH. BUICLIU și C. IONESCU-BUJOR. Membri delegați pentru alcătuirea tablei de materii.
M. SARIAN și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru cercetarea prealabilă a soluțiilor primite dela corespondenți.
GH. TH. GHEORGHIU. Membru delegat pentru evidența problemelor publicate.
LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Bibliotecar.
I. S. ANTONIU, N. BOTEA, GENERAL GH. BUICLIU, N. CIORĂNESCU, GH. I. DUMITRESCU, GH. TH. GHEORGHIU, M. GHERMĂNESCU, C. IONESCU-BUJOR, MAIOR I. LINTEȘ, COLONEL GH. LITEANU, LT.-COMANDOR GH. NICULESCU, O. ORĂNESCU, AL. PANTAZI, A. PÂRVU, AL. ROȘU, M. SARIAN, GH. D. SIMIONESCU, O. ȚINO, GH. VASILIU, R. WOINAROSKY și LT.-COMANDOR GR. ZAPAN. Membri delegați pentru cercetarea și redactarea problemelor rezolvate.

---

*) Societatea este administrată și reprezentată de o delegație alcătuită din doi membri i un cassier. (Art. 14 din Statute).

MEMBRII

1	1922, Mart. 1*	ABASON ERNEST. Inginer-Şef.— Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti. Doctor în Matematici.— Profesor şi Subdirector de studii la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Mateiu Voevod, 25. Bucureşti 4.
2	1907, Iulie 1	ABRAMESCU N. Doctor in Matematici.— Profesor la Universitatea din Cluj.
3	1913, Oct. 7	ALACI V. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Str. Traian Lalescu, 1. Timişoara.
4	1919, Sept. 12	ANGELESCU A. Doctor în Matematici. — Profesor Universitar. — Str. Frumoasă, 12. Bucureşti 2.
5	1921, Noem. 4	ANGHELUŢĂ TH. Doctor în Matematici.— Profesor la Universitatea din Cluj. — Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
6	1934, Febr. 21	ANTONIU CORNELIU. Inginer-Şef.— Şef de serviciu technic. Direcţiunea Generală a Drumurilor M. L. P.—Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Str. C. Disescu. 17. Bucureşti 2.
7	1928, Aug. 29	ANTONIU S. ION. Inginer Electromecanic, Diplomat de Şcoala Politehnică din Bucureşti. Inginer Electrician, Diplomat de Şcoala Superioară de Electricitate din Paris. — Inginer la Societatea de Gaz şi Electricitate din Bucureşti. — Str. Edgar Quinet, 6· Bucureşti 1. (Telefon 3-6315).
8	1931, Mart. 11	ARGHIRIADE EM. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul Naţional Iaşi.
9	1935, Febr. 13	ARMEANCA IOAN. Doctor în Matematici. — Astronom la Observatorul Astronomic Cluj.—Profesor la Liceul Gh. Barițiu Cluj.— Cluj, Universitate.
10	1921, Febr. 5	AVRAMESCU C. Inginer. — Str. Porumbaru, 56. Bucureşti 2.
11	1929, Aug. 28	BĂDESCU A. LUCA. Inginer. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Director tehnic al Societăţii Comunale a Tramvaelor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică din Bucureşti. — Sos. Gh. Buzdugan, 38. Bucureşti 2.
12	1924, Aug. 29	BAIDAFF IG. BERNARDO. Doctor în Matematici. — Buenos-Aires. Avenida de Abayo 560. Republica Argentina.
13	1911, Febr. 20	BANCIU I. Licenţiat în Matematici. — Directorul General al Casei de Depuneri şi Consemnaţiuni.— Str. Lucaci, 95. Bucureşti 3.
14	1927, Mai 11	BARBILIAN DAN. Doctor în Matematici. — Conferenţiar Universitar. — Str. Carol Davila, 60. Bucureşti 6.
15	1920, Ian. 10	BORNEANU GEORGE. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Academia de Arhitectură. Directorul Societăţii „Uzinele Chimice Române".—Str. Basarabia, 45. Bucureşti 2.
16	1932, Apr. 20	BOTEA NICULAE. Licenţiat în Matematici. — Calea Floreasca, 46. Bucureşti 3.
17	1935, Aug. 22	BOTEZ ST. MIHAIL. Doctor în Matematice. — Profesor la Şcoala Superioară de Comerţ din Piatra-Neamţ. — Str. Em. Albu, 15. Piatra-Neamţ.

*) Data admiterii.

18	1920, Aug. 15	BRATU GH. Doctor în Matematici dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Profesor de Astronomie şi de Calcul diferenţial şi integral la Facultatea de Ştiinţe din Cluj. Directorul Observatorului Astronomic din Cluj. — Str. Brătianu, 29. Cluj.
19	1926, Iunie 28	BRENER M. AVRAM. Inginer. — Str. Viitorului, 22. Bucureşti 3.
20	1910, Iunie 21	BRUCKNER VICTOR. Inginer Inspector General. — Director Superior C. F. R. — Str. Ing. Pandele Ţăruşanu, 7. Bucureşti 2.
21	1920, Ian. 10	BUDEANU I. C. Inginer dela Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele din Bucureşti, Şcoala Superioară de Electricitate din Paris.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Washington, 32. Parcul Bonaparte. Bucureşti 3.
22	1910, Apr. 3	BUICLIU GH. General din Artilerie. — Directorul Direcţiei Chimice Militare din Ministerul Armamentului. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
23	1928, Mai 9	BUJOREANU N. Inginer-Şef. — Inspector principal C. F. R. — Str. Justinian, 17. Bucureşti 3.
24	1924, Ian. 30	BUNESCU D. AL. Inginer S. N. P. S. — Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului. — Str. Fabrica de Chibrituri 22. (Telefon 3-6033). Bucureşti 6.
25	1930, Aug. 31	BUNGESCU ION. Maior de Artilerie.—Absolvent al Şcoalei de Art. A. A. din Franţa (Metz). — Maior în Regt. 1 Art. A. A.— Aleea Suter, 21. Bucureşti 2.
26	1920, Ian. 10	BURADESCU TRAIAN. Inginer-Şef. — Inspector principal tehnic C. F. R. Şef de serviciu în Direcţia Mişcării.—Str. Petre Poni, 7, etaj I, Scara A. Bucureşti 2.
27	1930, Aug. 31	BUŞILĂ ADRIAN. Inginer. — Inginer în Direcţiunea Întreţinerii şi Lucrărilor Noui C. F. R. — Str. Vaselor, 40 B. Bucureşti 4.
28	1910, Oct. 25	BUŞILĂ D. C. Inginer de Poduri şi Şosele. Inginer Electrician. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Aleea Modrogan, 1. Bucureşti 3. (Telefon 2-4661).
29	1921, Mai 4	BUŞILĂ I. Inginer Inspector General—Inginer în Ministerul Lucrărilor Publice. — Str. Dr. Lueger, 6 bis. Bucureşti 2.
30	1914, Iulie 12	CAMBUREANU V. Inginer Inspector General.—Subdirector General al Casei Muncii C. F. R. — Str. Vasile Lupu 24. Bucureşti 2.
31	1926, Iunie 28	CAMBUREANU V. D. Inginer.—Inginer la Casa Autonomă a Drumurilor de Stat. — Str. Virgiliu, Bucureşti 2.
32	1921, Noem. 4	CAPRIEL I. Inginer-Şef. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.—Administrator-Delegat al Societăţii „România Carboniferă", al Societăţii „Construcţiunea". — Str. Visarion, 5. Bucureşti 3.
33	1920, Mart. 1	CARAMAN E. Licenţiat în Matematice. — Profesor la Liceul „V. Alexandri" din Galaţi. — Str. Lascar Catargi, 40. Galaţi.
34	1928, Aug. 29	CASSIAN GH. Lt.-Colonel. — Membru în Comisia militară de recepţie la Uzinele Schneider. Franţa.
35	1920, Ian. 10	CAZACU N. C. Inginer-Şef. — Inspector de Mişcare C. F. R. — Str. Sf. Ilie, 2 bis. Galaţi.

36	1935, Apr. 10	CHIRICESCU V. Inginer Diplomat al Şcoalei Politechnice din Bucureşti.—Inginer în Regia Autonomă C. F. R.—Str. Italiană, 30. Bucureşti 1.
37	1914, Dec. 20	CHIRICUŢĂ A. Inginer Inspector General.— Administraţia Comercială a porturilor şi căilor de comunicaţie pe apă. — Str. Oţetari, 8. Bucureşti 1.
38	1920, Mart. 1	CHIŢULESCU I. IOAN. Inginer-Şef. — Direcţia Specială a Atelierelor C. F. R. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. I. Căpitanu, 44. Bucureşti 4.
39	1921, Febr. 5	CIOC M. Inginer. — Str. Gr. Cantacuzino, 14. Bucureşti 1.
40	1930, Aug. 31	CIORĂNESCU NICOLAE. Doctor în Matematici din Paris.— Licenţiat în Fizico-Chimice. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Pomul Verde, 12. Bucureşti 2.
41	1933, Aug. 31	CONSTANTINESCU GH. Inginer. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Inginer la Societatea A. E. G. — B-dul Elisabeta 93/IV. Bucureşti 2.
42	1895,Sept.15* (fondator)	CONSTANTINESCU TANCRED. Inginer Inspector General. — Senator. Fost Ministru.—Aleea Vulpache, 7 (Parcul Filipescu) Bucureşti, 3.
43	1932, Apr. 20	CONSTANTINESCU ZAHARIA. Inginer diplomat dela Şcoala Politechnică din Bucureşti. — Şeful Serviciului Exploatării din Imprimeria Naţională M. O. — Membru în Consiliul de perfecţionare al Şcolii Politechnice „Regele Caro II".—Calea Şerban Vodă, 133. Bucureşti 5.
44	1910, Apr. 3	COSTINESCU DAN. Inginer.—Director General al Fabricii de Hârtie „Letea". — Fabrica de hârtie „Letea". Bacău.
45	1922, Mart. 1	DUMITRESCU ARG. D. Inginer-Şef. — Inspector tehnic C. F. R. — Str. Principele Nicolae, 32. Craiova.
46	1922,Noem. 1	DUMITRESCU I. GH. Licenţiat în Matematice. — Profesor secundar, Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 52. Bucureşti 4.
47	1918, Ian. 28	FELIX CORNELIU. General de Brigadă în rezervă. — Str. G. D. Palade, 72. Bucureşti 3.
48	1909, Iulie 1	FILIPESCU EM. GH. Inginer. — Director General al Soc. Comunale a Tramvaelor Bucureşti. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Vasile Lascăr, 216. Bucureşti 3.
49	1935, Apr. 10	FLORESCU M. ULPIU. Inginer-constructor, Diplomat al Şcolii Politechnice din Bucureşti. — Sub-şef de secţie la Dir. Podurilor, Construcţiilor şi Lucrărilor noi (D) C. F. R. — Calea 13 Septemvrie, 22. Bucureşti 6.
50	1929, Ian. 31	FOCŞENEANU I. MIHAIL. Lt. de Artilerie. Licenţiat în Matematici. Elev Şcoala Superioară de Războiu.—Str. Berthelot, 88. Bucureşti 2.
51	1928, Mai 9	FUNDĂŢEANU C. ION. Inginer-Şef.— Director General al Oficiului Central de Licitaţii din Ministerul Finanţelor.—Aleea N. Ionescu, 3 (Parcul Delavrancea). Bucureşti 2.

*) Data fondărei revistei „*Gazeta Matematică*". Societatea Gazeta Matematică a fost constituită la 1 Septemvrie 1909.

52	1921, Mai 4	GABRIELESCU RAMIRO. Inginer. — Str. Dionisie, 19, Bucureşti 1.
53	1914, Dec. 20	GÂLCĂ I. TOMA. Inginer-Şef.—Str. Wilson, 13 etaj II apart. 7. Bucureşti 1.
54	1906, Mart. 4	GEORGESCU I. N. Inginer Inspector General,—Directorul General al Serviciului de Indiguiri şi Desecări. — Str. G. D. Palade, 35. Bucureşti 3.
55	1921, Febr. 5	GEORGESCU N. N. Inginer. — B-dul Elisabeta, 24. Bucureşti 1.
56	1927, Mai 11	GEORGESCU-ROEGEN N. Licenţiat în Matematici. Diplomat al Institutului superior de Statistică din Paris. — Secretar al Institutului de Statistică Generală a Statului. — Profesor la Şcoala de Statistică. — Str. Pescari, 1 bis. Bucureşti 4.
57	19 Dec. 1934	GEORGESCU-VAL. N. ION. Locot.-Inginer Electro-Mecanic. — Direcţia Technică. Minist. Armamentului. Bucureşti 6.
58	1922, Aug. 31	GHERMĂNESCU N. MIHAIL. Doctor în Matematici.— Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara.—Str. Popa Nan, 79. Bucureşti 4.
59	1914, Ian. 8	GHEORGHIU S. I. Inginer-Şef. — Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Strada Lahovary, 3 Bucureşti 3.
60	1932, Apr. 20	GHEORGHIU T. GH. Lincenţiat în Matematici. — Parcul Ianculuí. Str. D, 9. Bucureşti 4.
61	1913, Aug. 30	GHEORGHE A. MIRCEA.—Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Inginer la Administraţia Comercială a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Serviciul N. F. R. Galaţi.
62	1929, Aug. 28	GHEORGHIU A. ŞERBAN. Doctor în Ştiinţele Matematice.—Statistician.—Subdirector în Ministerul de Finanţe.—Str. Robert de Flers, 3. Bucureşti 3.
63	1921, Mai 4	GHIMUŞ D. A. Maior.—Inginer Radio-electrician. E. S. E. — Şeful Serviciului Radio M. St. M.— Str. Chişinău, 12, Bucureşti 2.
64	1931, Mart. 11	GHIŢESCU VIRGIL. Licenţiat în Matematici. — Profesor şi Director de liceu. — Găeşti. Dâmboviţa.
65	1910, Iunie 21	GRIGORESCU C. Inginer. — Antreprenor de lucrări publice. — Str. Plantelor, 40. Bucureşti 4.
66	1920, Ian. 10	GUTZU VICTOR. Inginer. — Str. G-ral Lahovary, 60. Bucureşti.
67	1927, Ian. 28	HANGANU D. M. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti şi al Şcoalei Superioare de Electricitate din Paris.—Inginer la C. A. M. Asistent la Şc. Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Logofătul Nestor, 2. Bucureşti 6.
68	1924, Ian. 30	IANCULESCU ROMULUS. Inginer-Şef. — Licenţiat în Matematici. — Gara de Nord. Inspecţia I Mişcare. Bucureşti 2.
69	1922, Mai 10	ILIESCU GH. Inginer-Şef. — Directorul Fabricei de Chibrituri-Filaret. — Fabrica de Chibrituri-Filaret. Bucureşti 6.
70	1928, Aug. 29	ILIESCU TRAIAN. Colonel de Artilerie. — Comandantul Brigăzii 5 Artilerie. Buzău.
71	1895, Sept. 15 (fondator)	IOACHIMESCU GH. ANDREI. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici.— Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.— Str. Buzeşti, 76. Bucureşti 2.

72	1926, Iunie 28	IOACHIMESCU A. GH. Inginer.—Directorul Fabricei de Timbre.— Str. Fabrica de Chibrituri, 22. Bucureşti 6.
73	1920, Ian. 10	IOANOVICI AUREL. Inginer. — Antreprenor. — Str. Paris, 28. Bucureşti 3.
74	1933, Febr. 22	IONESCU-BUJOR C. Licenţiat în Matematici.— Profesor. — Str. Maior Popescu Gh., 26 (Parcul Ianculuí). Bucureşti 4.
75	1895, Sept. 15 (fondator)	IONESCU I. Inginer Inspector General.—Membru corespondent al Academiei Române. Profesor la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti.—Str. Căluşei 23. Bucureşti 4.
76	1922, Noem. 1	IONESCU V. D. Doctor în Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris.— Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cluj.—Str. Iuliu Maniu, 2. Cluj.
77	1932, Apr. 20	IONESCU ZANE D. GH. Inginer.—Şeful Serv. Aprovizionărilor din Monitorul Oficial şi Imprimeriile Statului. — Str. Popovici, 38. Parcul Delavrancea. Bucureşti 3.
78	1912, Iunie 2	JIJIE ADAM. Căpitan-Comandor în rezerva Marinei. Licenţiat în ştiinţe. Inginer electrician.—Concesionarul luminatului electric şi al alimentării cu apă din Sulina.—Sulina.
79	1924, Ian. 30	KAUFMAN N. Inginer. — Şef de Serviciu în Direcţiunea Generală C. F. R.—Str. G-ral Manu, 26. Bucureşti 2.
80	1931, Aug. 28	LAZU CONST. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Centrale a M. O. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Sf. Elefterie, 19. Bucureşti 6.
81	1934, Dec. 19	LEONIDA D-TRIE. Inginer. — Str. Salcâmilor, 9. Bucureşti 3.
82	1919, Sept. 12	LINTEŞ ION. Maior de Artilerie, Inginer aeronautic, Insărcinat cu conferinţe la Şcoala Politehnică „Regele Carol II".— Regimentul 1 Apărare Contra Aeronavelor, — Str. Epicol, 49. Bucureşti 6.
83	1921, Mai 4	LITEANU I. GH. Colonel de Artilerie.—Marele Stat Major General al Armatei. — Str. I. L. Caragiale, 30 A. Bucureşti 1. (Telefon 2-0940).
84	1935, Aug. 22	LIVADA F. GRIGORE. Licenţiat în Matematici.— Profesor secundar.— Liceul militar „D. A. Sturdza". Craiova.
85	1934, Dec. 19	MALAXA ELENA. Profesoară de Matematici.— Str. Aurel Vlaicu, 36. Bucureşti 3.
86	1934, Dec. 19	MALAXA N. Inginer. Industriaş. — Aleea Alexandru, 38. (Parcul Filipescu). Bucureşti 3.
87	1913, Aug. 30	MALCOCI C. Inginer Inspector General. — Str. Pia Brătianu, 4. Bucureşti 3.
88	1934, Febr. 21	MANAFU VALERIU. Inginer E. C. P.—Uzinele de fier şi Domeniile din Reşiţa.
89	1926, Iunie 28	MANOILESCU MIHAIL. Inginer. — Profesor la Şcoala Politehnică din Bucureşti. Mare industriaş. — Str. Mussolini, 27. Bucureşti 3.

90	1932, Apr. 20	MĂRĂCINE B. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Imprimeriei Naţionale. — Str. Lânăriei 80. Vila 26. Bucureşti 6.
91	1921, Febr. 5	MAREŞ T. Inginer-Şef. — Direcţia Generală a Drumurilor. — B-dul Bonaparte, 20 (Alee). Bucureşti 3.
92	1922, Mai 10	MATEESCU CR. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Subdirector la Soc. „Electrica" Bucureşti. — Calea Dorobanţilor, 1. Vila B. Bucureşti 3.
93	1927, Mai 11	MEREUŢĂ V. Inginer. — Subdirector Direcţiunea de Intreţinere C. F. R. — Str. Dan Vodă, 3. Bucureşti 2.
94	1929, Ian. 31	MIHĂILESCU P. TIBERIU. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoala Comercială din Ploeşti. — Str. Dionisie Eclesiarhul, 15. Bucureşti 2.
95	1921, Febr. 5	MIHAILOPOL C. Inginer Inspector General.—Subdirector General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Splaiul Independenţei, 63. Bucureşti 6.
96	1934, Dec. 19	MIRESCU PETRE. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Şcoalele Comerciale elementară şi superioară din Brăila.— Str. Galaţi, 17. Brăila.
97	1925, Febr. 11	MIRCEA M. E. Inginer.—Inginer-Şef la Societatea „Concordia".— Gura Ocniţei, Jud. Dâmboviţa.
98	1929, Aug. 28	MITESCU CAMIL. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. — Directorul Serviciului Exploatării Fabricelor la Casa Autonomă a Monopolurilor. — Piaţa Lahovary. 1 A. Bucureşti 3.
99	1920, Ian. 10	MITITELU C. CLAUDIU. Inginer-Şef. Licenţiat în Matematici. — Director de Serviciu în Adm. Centrală a Casei Autonome a Monopolurilor. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Piaţa Lahovari, 1 A. Bucureşti 3.
100	1920, Ian. 10	MITITELU C. I. Inginer. — Intreprinzător de lucrări publice. — Str. G-ral Manu, 28. Bucureşti 3.
101	1932, Febr. 21	NEAMŢU PETRE. Inginer. Director S. T. B. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str Roma, 59. Bucureşti 3.
102	1922, Mart. 1	NEGRETZU I. Inginer de mine.—Exploatări agricole (agricultor).— Str. Şerban-Vodă, 170. Piteşti.
103	1928, Aug. 29	NEGURĂ ST. Licenţiat în Matematici dela Universitatea din Bucureşti. — Profesor cu titlu definitiv la liceul „Codreanu" din Bârlad. — Str. Lascăr Catargiu, 63. Bârlad.
104	1934, Dec. 19	NICOLAU AL. Inginer. — Profesor. — Şcoala Politehnică Timişoara.
105	1910, Mai 21	NICHIFOR A. G. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti şi la Şcoala de Arhitectură Bucureşti.—Str. Dimitrie Racoviţă, 32. Bucureşti 4.
106	1929, Aug. 28	NICOLAU H. CONSTANTIN. Inginer-industrial. — Directorul tehnic al Fabricei de hârtie Letea-Bacău.

107	1921, Noem. 4	NICOLAU T. M. Inginer Inspector General. — Director al Direcţiunii Tehnice din Ministerul Lucrărilor Publice şi al Comunicaţiilor. Profesor la Şcoala de Conductori de Lucrări Publice din Bucureşti. — Str. Lăzureanu, 31 bis. Bucureşti 6.
108	1923, Iulie 4	NICULESCU V. GHEORGHE. Diplomat al Şcoalei Politehnice Timişoara şi al Şcoalei Superioare de Aeronautică din Paris. — Locot.-comandor inginer. — Str. Izvor, 98. Bucureşti 6.
109	1929, Ian. 31	NICULESCU MIRON. Fost elev al Şcoalei Normale Superioare din Paris. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Sorbona. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Cernăuţi. — Seminarul Matematic Cernăuţi şi Str. Paris 14. Bucureşti 3.
110	1934, Dec. 19	NICULESCU IOAN RADU. Comandor de Marină (în rezervă). — Profesor (particular) de liceu —Str. Puţul de Piatră. Bucureşti, 3.
111	1931, Mart. 11	NICULESCU V. ALEX. Licenţiat în Matematice. —Profesor definitiv la Liceul „Ion Maiorescu", Giurgiu. — Str. Izvor, 98. Bucureşti 6.
112	1920, Oct. 28	NICULESCU CRISTEA. Inginer-Şef. — Preşedintele Comisiei de control C. F. R. — Str. Londra, 35. Bucureşti 3.
113	1922, Mart. 1	ONICESCU O. Doctor în Matematici. — Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. Director al Institutului Superior de Educaţie Fizică. Director al Şcoalei de Statistică: — Str. Rozelor, 9. Bucureşti 6.
114	1927, Ian. 28	OPRESCU GH. General. — Comandantul Diviziei I. Timişoara.
115	1927, Ian. 28	ORĂNESCU O. Inginer-Şef. Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti, Secţia Electro-Mecanică. — Inginer mecanic la Navigaţiunea Fluvială Română, Galaţi. — Str. Bolintineanu, 2 bis. Galaţi.
116	1913, Oct. 7	ORĂŞANU D. CEZAR. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. Inginer Cadastral Şcoala Politehnică. Inginer Hotarnic şi Operator Topometru. Licenţiat în Matematici. Conferenţiar titular la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti la cursul de Construcţii Generale. Profesor suplinitor la cursul de Topografie şi Geodezie. — Str. Sfinţii-Voievozi, 9. Bucureşti 2.
117	1910, Mai 21	ORĂŞANU GR. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Liceul „Gh. Lazăr" din Bucureşti. — Str. Popa Nan, 19. Bucureşti 4.
118	1914, Dec. 20	PANAITESCU SC. General de Divizie în retragere. — Conferenţiar Universitar. Membru corespondent al Academiei Române.—Str. Călăraşi, 9. Iaşi.
119	1929, Ian. 31	PANTAZI ALEXANDRU. Doctor în Matematici.— Redactor Statistic.— Profesor la Şcoala de Statistică. Asistent Universitar. Inspector actuar Ministerul de Industrie şi Comerţ. — Str. Al. Lahovary, 9. Bucureşti 3. (Telefon 3-4305).
120	1932, Aug. 24	PÂRVU AUREL. Inginer diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti. Licenţiat în Matematici.— Str. Justinian, 18. Bucureşti 3. (Telefon 2-2581).

121	1924, Ian. 30	PAŞCANU S. Inginer diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele (1919); Arhitect Naval diplomat Univ. din Glascow (1921). B. Sc.; A. N. I. A. — Calea Dorobanţilor, Aleea A, 8. Bucureşti 3.
122	1911, Dec. 17	PATRICIU G. TITUS. Licenţiat în Matematici. — Profesor. Directorul Liceului „M. Kogălniceanu„ din laşi. Fost Director General al Invăţământului Primar şi Normal în Ministerul Instrucţiunii.— Str. Rosetti, 8. laşi.
123	1920, Oct. 28	PHILIPIDE M. Inginer. — Director General al Societăţii Anonime Române de Navigaţie pe Dunăre S. R. D.— Str. Radu-Vodă, 25. Bucureşti 5.
124	1934, Dec. 19	POPESCU-BOTOŞANI G. Inginer la Subsecretariatul de Stat al Aerului, Uzinele I. A. R. Braşov. — Str. General Berthelot, 65. Bucureşti 1.
125	1922, Aug. 31	POPESCU ION. Inginer. — Director la Soc. Comunală a Tramvaielor Bucureşti. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Popa Savu, 12 A. Bucureşti 2.
126	1935, Apr. 10	POPESCU VICTOR. Ingine. Soc. Comunală a Tramvaelor Bucureşti. Asistent Şcoala Politehnică „Regele Carol II".—Str. Argentina, 44. Bucureşti 3.
127	1928, Mai 9	POPOVICIU TIBERIU. Doctor în Matematici. — Seminarul de Matematici Universitatea Cluj.
128	1931, Mart. 11	POPP N. Lt.-Comandor. Inginer. — Preşedintele Comisiunii militare de recepţie la Uzinele I. A. R. Braşov.
129	1927, Mai 11	POPP TRAIAN. Licenţiat în Matematici. — Profesor la Seminarul Pedagogic Universitar şi la Colegiul Naţional „Sf. Sava". — Parcul Delavrancea. Aleea D, 2. Bucureşti 2.
130	1929, Ian. 31	PORTOCALĂ MIHAIL. Inginer-Antreprenor.—B-dul Basarab (alee) 9. Bucureşti 2.
131	1930, Aug. 31	POTOPEANU GHEORGHE. Colonel.—Comandantul Regimentului 2 Artilerie. — Str. Dr. Lister, 5. Bucureşti 6.
132	1935, Apr. 10	PRAPORGESCU N. Licenţiat în Matematici.—Director general al Casei generale de pensiuni. — Str. Aviator Sănătescu, 28. Bucureşti 2.
133	1925, Febr. 11	PROTOPOPESCU GRIGORE. Colonel de Artilerie. — Str. Ana Davila, 25. Bucureşti 6.
134	1927, Mai 11	RACLIŞ RODOLPHE. Doctor în Ştiinţele Matematice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. Licenţiat în Ştiinţele Fizice dela Facultatea de Ştiinţe din Paris. — Inginer Diplomat al Şcolii Superioare de Electricitate din Paris. — Directorul Institutului Matematic Român. Profesor Bucureşti. — Aleea Vulpache, 21 (Parcul Filipescu). Bucureşti 3. (Telefon 2-2444).
135	1920, Aug. 15	REVICI TEOFIL. Inginer S. N. P. S. — Inginer-Şef în Direcţia de Poduri C. F. R. — Str. T. Masaryk, 20. Bucureşti 1.
136	1933, Febr. 22	ROŞU AL. AL. Licenţiat în Matematici. — Controlor financiar. — Str. Arcului, 16. Bucureşti 1.
137	1914, Dec. 20	ROŞU V. Inginer Inspector General. — Directorul Serviciului Hidraulic. — Calea Victoriei, 2. Bucureşti.
138	1929, Aug. 28	SĂLĂGEANU AUREL. Inginer. — Director tehnic al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului.—Şos. Viilor, 7. Bucureşti 6.

139	1904, Sept. 1	SALIGNY M. Inginer Inspector General. — Subdirectorul Serviciului Hidraulic. Ministerul Lucrărilor Publice şi Comunicaţiilor.— B-dul Elisabeta, 27. Bucureşti 2.
140	1920, Ian. 10	SĂPUNARU S. GH. Inginer de Poduri şi Şosele. — Director General al Societăţii „Clădirea Românească". — Str. Pia Brătianu, 5. (Parcul Ioanid). Bucureşti 3.
141	1929. Aug. 28	SARIAN MIHAI. Inginer. —Referent la Direcţiunea Atelierelor C. F. R. Griviţa. Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Str. Columb, 7. Bucureşti 3.
142	1935, Aug. 22	SCHILERU-DILI C. ION. Inginer. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică din Timişoara. — Directorul Şcoalelor P. T. T.—Palatul P. T. T. — Timişoara.
143	1920, Aug. 15	ŞERBĂNESCU GH. VICTOR. Inginer.—Antreprenor de construcţii.— Str. Paleologu, 3. Bucureşti 4.
144	1928, Aug. 29	SERGESCU BARBU. Inginer dela Şcoala de Mine din Paris. Licenţiat în Matematici. Licenţiat în Drept.— Inginer la Societatea „Steaua Română". Str. Lahovary, 12. Câmpina.
145	1919, Sept. 12	SERGESCU PETRE. Doctor în Matematici. — Licenţiat în Filosofie. Profesor la Universitatea din Cluj. Membru al Academiei Internaţionale de Istoria Ştiinţei (Paris), al Academiei Masaryk (Praga), Corespondent al Societăţii de Ştiinţe din Varşovia şi al Societăţii Regale de Ştiinţe din Liège. Laureat al Academiei de Ştiinţe din Paris şi al Academiei Române.— Str. Berde, 3. Cluj.
146	1921, Febr. 5	SFINŢESCU I. CINCINAT. Inginer Inspector General.— Profesor la Academia de Arhitectură. Director General Tehnic la Municipul Bucureşti. — Str. Barbu Delavrancea, 43. Bucureşti 2.
147	1934, Mai 2	SIMIONESCU D. GH. Licenţiat în Matematici. Profesor Liceul militar „Nicolae Filipescu" dela Mănăstirea Dealu. — Str. V. Dumitrescu, 18. Târgovişte.
148	1910, Aug. 3	SMĂNTÂNESCU AUREL. Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele. — Inginer Inspector General în Corpul Tehnic al Statului. Subdirector General la Direcţia Generală a Drumurilor. — Str. Sf. Ştefan, 23. Bucureşti 4.
149	1933, Aug. 31	STAMATESCU I. GH. Inginer-Şef. — Inspector Principal în Direcţiunea Tracţiunii C. F. R.—Str. G-ral Lahovary, 87. Bucureşti, 3. (Telefon 2-3575).
150	1923, Iulie 4	STAMATESCU I. Profesor la Liceul Mateiu Basarab şi Seminarul Pedagogic Universitar. — Str. Toamnei, 47. Bucureşti 3.
151	1920, Ian. 10	STAN D. Inginer.—Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II„ din Bucureşti. Inginer la Soc. Anonimă Română de Telefoane.— Aleea Mântuleasa, 1. Bucureşti 4.
152	1934, Mai 2	STOICA V. DUMITRU. Inginer. — Diplomat al Şcoalei Naţionale de Poduri şi Şosele din Bucureşti.— Directorul Societăţii de locuinţe ieftine Bucureşti.— Str. Veronica Micle, 2. Bucureşti 2.
153	1927, Mai 11	TĂNĂSESCU A. General. — Inspectorul G-ral Tehnic al Armatei.— Str. Gr. Cantacuzino, 54. Bucureşti 2.

154	1928, Mai 9	TĂNĂSESCU A. TUDOR. Inginer. Licenţiat în Matematici. — Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Str. Salvator, 37. Bucureşti 6.
155	1900, Noem. 1	TEODOREANU V. Pensionar.— Str. Zlataust, 7. Iaşi.
156	1934, Mai 2	TEODORESCU C. C. Inginer-Şef. — Profesor şi Rector al Şcoalei Politehnice din Timişoara.
157	1911, Mai 18	TEODORESCU V. N. Inginer Inspector General.—Fost Ministru.— Str. Aurel Vlaicu, 22. Bucureşti 3.
158	1910, Mai 21	THIERRIN H. G. Licenţiat în Matematici. — Directorul Institutului „Schewitz-Thierrin".— Str. Scaune, 33. Bucureşti 1.
159	1921, Aug. 31	ŢINO O. Doctor în Matematici. — Profesor la Şcoala Politehnică din Timişoara.— Str. Ismail, 16. Bucureşti 4.
160	1929, Oct. 30	ŢIŢEICA GABRIELA. Licenţiată în Matematici. Inginer. — Asistentă la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
161	1895, Noem. 1	ŢIŢEICA GH. Doctor în Ştiinţele Matematice. — Secretar General al Academiei Române. Profesor la Facultatea de Ştiinţe şi la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. Profesor agreat la Sorbona. — Str. Dionisie, 80. Bucureşti 3.
162	1919, Sept. 12	ULESCU AL. Inginer. — Directorul Uzinelor I. A. R. — Str. M. Eminescu, 4. Braşov.
163	1914, Dec. 20	VARDALA I. Inginer Inspector General. Diplomat al Şcoalei Centrale de Arte şi Manufacturi din Paris, — Director General al Administraţiei Comerciale a Porturilor şi Căilor de Comunicaţie pe Apă. — Str. Vilson, 13 etaj 4. Bucureşti 1.
164	1927, Mai 11	VASILACHE I. Inginer-Şef. — Profesor şi Subdirector al Şcoalei Superioare de Arte şi Meserii din Bucureşti. — Str. Polizu, 11. Bucureşti 2.
165	1920, Ian. 10	VASILESCU G. I. Inginer-Şef. - Str. Take Ionescu, 1. Bucureşti 2.
166	1923, Mart. 26	VASILESCU GR. Inginer. — Bucureşti, 6.
167	1932, Apr. 20	VASILIU GH. DAN. Inginer Diplomat al Şcoalei Politehnice din Bucureşti.— Inginer la Monitorul Oficial.— B-dul Schitu Măgureanu, 47. Bucureşti 1. (Telefon 3-6332).
168	1933, Febr. 22	VASILIU GH. Inginer. de mine şi geodez. — Antreprenor autorizat de Direcţia Cadastrului pentru Geodezie, Cadastru şi Comasare. Asistent supl. la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Cartierul Grant C. F. R., Str. D, 51. Bucureşti 2.
169	1925, Aug. 26	VASILIU M. Inginer. — Asistent la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — Director în Ministerul Industriei şi Comerţului. — Str. Vaselor, 70. Bucureşti 4.
170	1933, Febr. 22	WOINAROSKY R. Licenţiat în Matematici. — Str. Manu Cavafu, 16. Bucureşti 5.
171	1924, Ian. 30	ZAMFIRESCU GRIGORE. Inginer. Diplomat S. N. P. S. Bucureşti 1920 şi E. S. A. Paris 1921.— Proprietarul fabricei de avioane „SET".— Conferenţiar la Şcoala Politehnică „Regele Carol II" din Bucureşti. — B-dul Ferdinand, 168. Bucureşti 4.

172	1920, Sept. 28	ZAPAN GH. Doctor în Filosofie. — Conferenţiar Universitar.—Str. Maior Ene, 12. (O. N. E. F). Bucureşti 6. (Telefon 3-9705).
173	1921, Mai 4	ZAPAN GRIGORE. Lt.-Comandor Aviator. Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice (E. S. A.) din Paris. — Ofiţer de ordonanţă-Adjutant al A. S. R. Principelui Nicolae. — Casa „Gazeta Matematică". Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2. (Telefon 4-3929).
174	1925, Aug. 26	ZLATCU ST. C. Inginer-mecanic dela Şcoala Politehnică din Zürich.— Antreprenor. — Parcul Regina Maria, 28. Bucureşti 6.

†

MEMBRII DECEDAŢI*)

	Data admiterii	Data morţii
1. ALEXANDRESCU T. I.	1928 Mai 9	1930 Sept. 5
2. ALEXANDRINI O.	1895 Noemvrie 15	1905 Sept. 6
3. BALABAN V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1895 Sept. 22
4. CRISTESCU V.	1895 Sept. 15 (fondator)	1929 Martie 10
5. DAVIDESCU EM.	1895 Sept. 15 (fondator)	1905 Aug. 28
6. DORDEA TR.	1928 Ianuarie 26	1930 Apr. 30
7. ERBICEANU C.	1898 Septemvrie 15	1904 Apr. 3
8. EVOLCEANU V.	1927 Ianuarie 28	1928 Oct. 19
9. LALESCU TR.	1905 Martie 1	1929 Iunie 15
10. MIREA N. ŞT.	1909 Iunie 1	1932 Ian. 15
11. MOŢOI I.	1906 Aprilie 1	1929 Ian. 16
12. NĂSTURAŞ D.	1909 Noemvrie 9	1930
13. NICOLAEVICI G.	1909 Iunie 1	1917 Febr. 26
14. NICOLESCU N.	1895 Sept. 15 (fondator)	1924 Mai 5
15. ROCO M.	1895 Sept. 15 (fondator)	1931 Ian. 5
16. ROŞU AL.	1910 Iunie 21	1917 Apr. 17
17. SALIGNY A.	1914 Decemvrie 9	1925 Iunie 17
18. TEODOR D. I.	1906 Aprilie 1	1924 Iulie 30
19. TEODORESCU I. S.	1914 Iunie 12	1918 Dec. 22
20. ZOTTU I. G.	1895 Sept. 15 (fondator)	1902 Iulie 8

*) Aci sunt trecuţi numai redactorii şi membrii, cari au stat la *„Gazeta Matematică"* până la sfârşitul vieţii lor, în ordine alfabetică.

NUMĂR FESTIV
CU OCAZIUNEA ÎMPLINIRII A 40 ANI DE EXISTENȚĂ

PATRUZECI DE ANI DELA ÎNTEMEEREA „GAZETEI MATEMATICE“

Nu voiu uita niciodată emoția adâncă pe care am simțit-o, când am văzut, în Septembrie 1895, prins cu ținte în ușa unei librării, care azi nu mai există, cel dintâi număr al *Gazetei Matematice*. Și nu-mi vine să cred că au trecut de atunci *patruzeci* de ani de apariție regulată și de activitate bogată.

Faptul e că, cu numărul de față, scris numai de membri ai Societății noastre, *Gazeta Matematică* intră, cu oarecare mândrie, în al 41-lea an. E o sărbătoare a științei matematice românești. E, fără îndoială, un moment însemnat în desvoltarea culturii noastre naționale.

Intr'un volum jubilar, care va apare cât de curând, se vor arăta, în capitole deosebite, factorii materiali și sufletești, cari au asigurat publicarea regulată a revistei, precum și rezultatele neașteptate pe care le-a obținut.

O serbare specială, pe care o dorim cât mai înălțătoare, va consfinți oficial valoarea senină a unei activități statornice și îndelungate, care s'a închegat, încetul cu încetul, în jurul *Gazetei Matematice*.

* * *

Revista a fost produsul unui avânt de tinerețe. Câțiva ingineri tineri, cari de abia terminaseră vechea *Școală Națională de Poduri și Șosele*, convinși de serviciile mari pe care științele matematice le aduc ingineriei, doritori pe de altă parte ca viitorii elevi ai Școalei, pe care ei o absolviseră cu strălucire, să fie din ce în ce mai bine pregătiți, s'au hotărît să publice o revistă de matematice elementare pentru elevii de liceu.

In realitate idealul lor era ceva mai înalt, entusiasmul lor țintea ceva mai sus, căci sub titlul cunoscut și astăzi *Gazeta Matematică*, în cei dintâi ani mai figura „*Foaie lunară de matematici elementare și speciale pentru uzul școalelor secundare, speciale și superioare*“. Așa dar ținta trecea dincolo de matematicele elementare și de școalele secundare.

Mai mult de cât atât. Scopul lor real nu era, precum s'ar fi crezut la început, numai deprinderea banală cu un mecanism folositor, ci iniţiarea în tainele unei ştiinţe, care, de sigur e folositoare, dar este, mai presus de toate, cea mai minunată îndrumătoare către buna şi dreapta judecată. De aceea, în programul lor, publicat în cel dintâi număr, ei au scris:

„Scopul acestei reviste este: 1. Publicarea de articole originale de matematici. 2. Desvoltarea gustului pentru studiul acestei ştiinţe şi al cercetărilor originale".

O parte dintre aceşti tineri ingineri căpătaseră gustul şi dragostea de ştiinţele matematice rezolvând probleme la *Recreaţiile ştiinţifice*, care au apărut la Iaşi între anii 1883 şi 1889 sau la cunoscuta revistă belgiană *Mathesis*.

Idealul lor era precis ca şi ştiinţa căreia i se închinaseră, iar realizarea a fost temeinică şi trainică, pentru că izvora din specialitatea lor technică.

E admirabilă îmbinarea fericită, care s'a făcut şi s'a păstrat la *Gazeta Matematică* între idealism şi realitate, între jertfă şi rezultate pozitive, între sentimentul cald şi severitatea imparţială. In această privinţă nu cred să existe pildă mai ciudată de cât faptul, că Redactorul *Gazetei* cel mai aspru, cel mai sever, cel mai puţin iertător, dar de o nepărtinire desăvârşită, să fie cel mai iubit de către corespondenţi pentru sfaturile lui calde, îndrumările prieteneşti şi, uneori, sprijinul discret, în cazul când erau meritate.

O activitate intelectuală de acest fel a tinerilor, cari veneau în atingere cu *Gazeta Matematică*, a avut, în curgere de 40 de ani, din cauza regularităţii, efecte largi şi minunate.

In diferitele colţuri ale Ţării, în toate specialităţile, se găsesc astăzi foşti corespondenţi ai *Gazetei* din diferitele ei epoce de apariţie, care păstrează amintire duioasă frământării la care a fost supusă mintea lor, cât timp au lucrat la *Gazeta Matematică*.

* * *

Fenomen rar! Tocmai după 14 ani de apariţie a *Gazetei*, colaboratorii ei sau, cum se zicea pe atunci, membrii Redacţiei s'au constituit în Societate, care e astăzi persoană morală.

Statutele Societăţii *Gazeta Matematică* au înscris în articolele ei numai principii reale scoase dintr'o experienţă îndelungată. Iată câteva din ele:

„Pentru atingerea scopului său, Societatea va dispune de:

a) *Munca voluntară şi desinteresată a membrilor săi cari vor voi, conform tradiţiunii* **Gazetei Matematice**, *să se ocupe de redactarea Gazetei şi de administrarea Societăţii, etc".*

b) *Pentru redactarea* **Gazetei Matematice,** *pentru întocmirea volumelor din* **Biblioteca Gazetei,** *pentru conducerea, supravegherea şi darea de seamă a concursurilor fixate, se vor da, în fiecare an, în adunarea generală sau într'o adunare extraordinară, anumite însărcinări unora dintre membrii Societăţii, potrivite cu timpul disponibil şi specialităţile lor şi conform spiritului de sacrificiu şi de solidaritate care a domnit întotdeauna printre redactorii* **Gazetei Matematice.**

Societatea a încorporat în ea spiritul în care a fost creată revista, *Spiritul Gazetei Matematice*, care se păstrează şi astăzi şi în care lucrează împreună ingineri, profesori şi militari.

Pe lângă această regulamentare într'o societate organizată, *Gazeta Matematică* are de curând şi un local, *Casa Gazetei Matematice,* în Calea Griviţei, N-rul 158.

Gazeta Matematică are astăzi temelii solide ca să poată exista mai departe, dar cea mai solidă temelie rămâne tot dragostea de ştiinţă a membrilor şi a corespondenţilor ei. Aceasta e temelia sigură şi esenţială a tuturor întreprinderilor de acest fel.

* * *

Incheind aceste rânduri mă găsesc între două sentimente. Un sentiment de melancolie faţă de toţi aceia cari au luat parte la ridicarea *Gazetei,* prin munca şi inteligenţa lor, şi cari, rând pe rând, au dispărut din mijlocul nostru. Un sentiment de încredere în viitor, întemeiată pe un principiu transcendent, că energia sufletească curată, strânsă în jurul *Gazetei,* în curgerea celor 40 de ani, nu poate dispare, ci se transformă în altă energie sufletească.

Exprim şi acum dorinţa, ca şi în Septembrie 1920, când s'au încheiat 25 de ani de apariţie, ca peste 10 ani, când se va serba o jumătate de veac, să mai fie în viaţă cel puţin unul din întemeetorii *Gazetei,* ca să constate că firul nu s'a întrerupt şi că idealismu dela început n'a suferit nici o scădere.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE
G. ŢIŢEICA.

PRIMA ARITMETICĂ TIPĂRITĂ ÎN LIMBA ROMANĂ

Cei 40 de ani de apariţiune regulată a *Gazetei Matematice* constituesc de sigur o durată prea scurtă în vieaţa unui popor şi în desvoltarea ştiinţelor matematice, mai ales; totuşi noi ţinem un record care pune în evidenţă aptitudinea şi dorinţa de muncă a Românilor pe terenul ştiinţific. Dacă la unele popoare se vorbeşte de producţiuni matematice încă de pe acum 4000 de ani, noi nu am putut arăta în mod sigur că aveam cel puţin cunoscători în matematice acum 400 de ani! Totuşi, prima tipăritură de carte de matematică în limba românească, — după câte se ştie până azi, — datează din 1777, adică de 158 ani. In acest timp am avut o *Gazetă Matematică* care a durat, neîntrerupt, 40 de ani, adică peste 25% din timpul de când se fac şi la noi publicaţiuni matematice în limba română! E aci un record în care nu ne întrece nimeni!

Cu ocaziunea acestei sărbătoriri a *Gazetei Matematice* găsesc folositor să punem în paralel, ce matematice se publicau în româneşte acum 158 ani, şi ce se publică acum şi despre care îşi poate face oricine o idee citind acest număr jubilar. Cartea apărută în 1777 este o *aritmetică* mititică şi timidă, făcută pentru pruncii şcoalelor celor mici, ea, care nu a îndrăznit să se prezinte publicului decât însoţită de o colegă a ei streină, — o traducere în limba nemţească. O comparaţie între această cărticică şi numeroasele cărţi şi reviste de matematice care apar azi în tot cuprinsul României Mari, va arăta ce contribuţie ar fi putut da Românii în domeniul ştiinţific, dacă ar fi fost lăsaţi în pace să-şi vază de ei, dacă nu ar fi fost ţintă de cucerire pentru toţi vecinii din cele patru puncte cardinale, şi dacă produsele muncii lor nu ar fi fost răpite pentru întreţinerea şi propăşirea altor naţii. Prin luptele duse de veacuri pentru păstrarea neatârnării, şi prin ocupaţiunile vremelnice streine, Românii nu au avut liniştea necesară ca să facă ştiinţă; prin ele s'au asigurat însă liniştea şi desvoltarea altor popoare mai îndepărtate, care au putut lucra la progresul ştiinţei pure şi aplicate. Aceasta constitue o contribuţie indirectă a noastră la progresul general al ştiinţei, contribuţie care începe să ne fie recunoscută.

* * *

Să trec acum la a arăta ce cuprindea prima aritmetică română tipărită la Viena în 1777. Titlul cărţii este :

„Ducere de mâna | *către* **Aritmetica.** | *Sau socoteala* | *pentru treaba pruncilor rumâneşti celor ne* | *-uniţilor ce se învaţă în şcoale cele* | *mici.* | *Se vinde fără lăgătură cu 15. Kreiţ.* | *Cu devoirea stăpânitorilor.* | *Tipărită în împărăţitoarea cetatea* | *Beci la Iosif* | *de Kurţbec, nobil de curte. Tipograful şi Vân-* | *zător de cărţi în anul* | *1777"*.

(Liniuţele verticale indică trecerile dela un rând la altul).

Titlul german este acesta :

„Anleitung | *zur* | **Rechenkunst.** | *Zum Gebrauche* | *der in den Trivialschulen lernenden* | *nicht unirten walachischen* | *Jugend.* | *Kostet ungebunden 15 Kreiz.* | *Mit Erlaubniss der Obern. Gedruckt in der Kaiserl. Residenzstabe Wien, bey* | *Joseph Edlen von Kurzbeck, K. K. Jurischen. Oriental* | *Hochbuchdrucker und Buchhändler.* | *1777.*

Un exemplar din această carte se găseşte la Academia română şi unul la Biblioteca „*V. A. Urechiă*" din Galaţi. Exemplarul dela Academie nu are prefaţă, însă am găsit notat, după o dare de seamă a acestei cărţi, că pe unele exemplare ar fi tipărită şi o prefaţă care poartă data de 1758, ceeace ar denota că manuscrisul a fost pregătit cu 19 ani mai înainte. Cartea are 151 pagini de 140 × 80 mm şi e scrisă pe paginile din stânga româneşte, cu litere cirilice, şi pe cele din dreapta în nemţeşte, cu litere germane. Tabla de materii este pusă la început.

Cartea cuprinde patru părţi. La început, fără capitol numerotat, avem *„Tâlcuirile înainte mergătoare"*, apoi Cap. I *Pentru ceale patru speţies aritmetici şi numerile întregi de acelaşi feliu ;* Cap. II *Pentru numerile cele numite* [numerele complexe], [1]) Cap. III *Pentru oare care sămnile şi pentru Regula Detri.* Cartea nu conţine nimic despre fracţiile ordinare şi zecimale.

In prima parte se dau definiţiuni şi se arată cum se citesc şi cum se scriu numerele :

„Numerul iaste mulţime de unişoarele [unităţile] *sau lucrurilor de unul sau acelaşi feliu"*.

---

1) S'a pus în paranteze drept liniate explicaţiunile care nu se găsesc în carte.

„Un cal şi o oae nu fac nici un numer, căci punându-le împreună nu sânt nici doi cai, nici două oaele, dar socotindu-să ca dobitoace sunt lucrurile cu numele asemenea, aşa dar şi numerul“.

La *„numerare“* ni se spune că zece unişoare fac o *zeceşoară.* Numerele dela 10 la 20 sunt în zeceşoara *„cea proastă“,* iar de aci zeceşoara *„cea îndoită“* începând cu *doaozece,* apoi *trăizece,* etc., *până la sută* şi mai departe la *mie.* Aici nu mai găsim *sutişoară, miişoară,* care însă au apărut azi în vorbire de când cu devalorizarea monedelor, când se aude zicând *„na-ţi o sutişoară,.. dă-mi o miişoară!“* Pentru numere mari întrebuinţează *million, billion, trillion,* însă după sistema germană. Astfel billion este *„de mie ori mii millioane“.* Despre O spune că *„Intru sine nimica nu este şi pentru aceasta se chiamă* **nulă“.**

La scrierea numerelor ne spune că *„cele proaste unişoare cu o ţifră numai se scriu“.* Aici e traducerea greşită a expresiunii germane *blosen Einheiten.* Apoi spune:

„Că toate [cifrele] *au preţul îndoit. 1) după chipul său, cel ce nu să schimbă, 2) după locul sau după pusul său, precum atâtea ori să schimbă, de câte ori să pune într'alt loc“.*

Pentru ca să citească mai repede numerele mari le desparte în grupe de câte trei cifre astfel: 543,216 sau 543.216, însă nu spune cum se zice la semnele, sau, deşi în textul german le spune *„Beystrich (Komma) oder Punkt“.*

La pag. 40 încep operaţiile cărora, — după cuvântul german, — le zice *speţies.* Avem *Addiţie* sau *Adunarea,* la care numerele de adunat sunt *posti* [după germanul *Posten*], şi rezultatul *Summa.* Operaţia se face ca şi azi. Se ocupă apoi de *Substracţie* sau *Scoatere* la care întâlnim cuvintele *minuendus, substrahendus, restă,* sau *diferenţie* sau *diskilinarea.* Urmează *Multiplicaţie* sau *Inmulţire,* la care întâlnim *factori, multiplicandu, multiplicator* şi *product.* Dacă rezultatul e sub 10 la înmulţirea a două numere, avem *„producturi cei proşti“.* Inmulţirea se dispunea ca şi azi. In fine avem *Divizie sau Impărţire,* unde întâlnim cuvintele *Dividendus, divizor, kvoţientul.* La fine se arată cum se fac *probe.* Iată cum se dispune o împărţire a lui 6336 prin 18:

18 | 6336 | 352
54
93
90
36
==

Partea a treia se ocupă cu numerele cele *numite* [corespunzând la expresiunea germană *sogennanten Zahlen*]. Aci se dau mai întâiu monedele uzuale de pe atunci cu diviziunile şi notaţiunile lor, *„Măsura vreamelui* [timpul], *„Măsura vinului"* [apa nu se vindea cu contorul pe atunci], *„Măsura de grâu"*, *„Măsura zidului"*, *„Măsuri"* pentru greutăţi, *Măsura aurului, Măsura argintului* şi alte măsuri ca pentru hârtie, etc. Se arată şi care erau măsurile turceşti de pe atunci.

Pentru ca să facă operaţiunile cu numerele complexe, trebuia să se ştie să le transforme în unităţile cele mai mici şi invers. Prima operaţiune era *Rezoluţie* sau *Deslegare* iar a doua *Reducţie*. *„Numerul acela care arată de câte ori iaste cuprins unişoarele cu numerele mai mici întru unişoarele cu numerul mai mare să chiamă numerul deslegătoriu (Numerus Resolutorius) [Auflöszahl].*

Aceste operaţiuni sunt explicate pe larg, cu exemple numeroase ; insistă asupra diferenţei care există între rezoluţie şi înmulţire. La rezoluţie rezultatul nu e de felul deînmulţitului; la înmulţire numai deînmulţitul este *numit;* la rezoluţie ambii factori sunt *numiţi.* La împărţire câtul e mai mic decât deîmpărţitul, la reducţie e la fel, numai altfel numit, pe când la împărţire are acelaşi nume. Lămurirea acestor chestiuni nu se poate face deplin fără a ţine seama de *„Calculul aritmetic cu numere specificate"* de care m'am ocupat în *Gazeta Matematică.* Anul XVI pag. 201 şi 241.

După ce se arată cum se fac rezoluţiile şi reducţiile, se arată cum se fac cele patru operaţiuni şi probele cu *numere numite.*

In ultimul Capitol găsim semnele cele mai răspândite în aritmetică şi anume:

$=$ *iaste sămnul celui ce e asemenea,*
$+$ *iaste sămnul addiţiei* şi însamnă *mai bine, mai mult.*
$-$ sau $\div$ *iaste sămnul substracţiei* şi însamnă *mai puţin.*
$\times$ *iaste sămnul multuplicaţiei.*
$:$ *iaste sămnul diviziei.*

Aceste semne nu au fost întrebuinţate înainte. Cu o liniuţă (—) desparte diteritele feluri de unităţi la numerele numite, ca de exemplu 15 — 12 — 3, florinţi, groşi şi bănuţi.

Ultima chestiune de care se ocupă această aritmetică este *Regula Detri* care poate fi *direaptă* sau *directa* ori *întoarsă* sau *inversa.* Se vorbeşte de *proporţie* şi de *glăsuire proporţuită.* Cei

patru termeni ai Regulii de trei sunt *pusurile* ei [traducerea lui *Satz* german]. Regulii de trei simplă îi zice *proastă* [tot greşeală de traducere] iar de cele compuse nu se ocupă.

Acesta este tot cuprinsul Aritmeticei din 1777. Cartea pare să mai fi avut o ediţie în 1782, după o menţiune din Bibliografia română de I. BIANU şi N. HODOŞ, însă Academia are o ediţie din 1785, care diferă foarte puţin de cea din 1777.

* * *

Ducerea de mână către Aritmetică, de care vorbirăm, a servit lui GHEORGHE ŞINCAI ca să alcătuiască Aritmetica lui din 1785, cu titlul următor:

„*Introducere* | *către* | **Aritmetică.** | *Intăia parte.* | *Alcătuită şi întocmită pentru* | *folosul şi procopsala tuturor* | *Şcoalelor Normăleşti a Neamului* | *Românesc* | *de* | GEORGE SINCAI *din Sinca.* | *Directorul şi Katehetul numitelor Şcoale.* | *In Blaj.* | *Cu tiparul Seminariului.* | *1785*".

Cartea nu are prefaţă. Se afirmă de unii că ar fi exemplare cu o prefaţă datată din 1777. Ea are 81 pagini de 140×80 mm şi este scrisă numai româneşte, cu litere cirilice. Ea urmează programul aritmeticei din 1777 cu adaos la fine a unei table de înmulţire (tabla ŢIBETI), „*Carea fiind că e de mare folos şi tocma de lipsă nu numai pentru pruncii cei mici, pentru a căror procopseală sau şi făcut cartea aceasta, ci pentru toţi oamenii întru înmulţirea numerelor*". La fine este o tablă de comparaţie a scrierii numerelor Illuriceşti, [cu cifrele cirilice], şi cu *ţifrele Hărăpeşti.*

ŞINCAI a mai curăţat cartea de cuvintele nepotrivite din aritmetica dela 1777. Aşa el zice *unime, zecile* sau *unimile cele înzecite.* Fiecare *ţifră* are o *îndoită puteare.* Operaţiunilor aritmetice le zice şi *speţieaşuri,* dar şi *lucrări.* Se ocupă de *spunerea* şi de *însemnarea numerelor.* La rest îi zice *rămăşiţă* sau *restanţie.* La factor îi zice şi *făcătoriu,* la cât *cotient* sau *câtuitoriu.* La măsuri de *vreme* le mai zice şi de *tâmpuri,* la cele de vin adaogă *„şi de alte corpuri curgătoare",* în loc de măsuri de grâu le zice de *bucate,* pe cele de ziduri le înlocueşte cu *măsuri de lemne;* în schimb vorbeşte de măsuri de *papir.* Regula de trei proastă devine acum *nealcătuită.* Exemplele devin *pilde.* Adaogă la monede şi pe cele obişnuite în *Ţara Românească: lei, beşlici, parale, aspri.*

Despre fracţii nu spune nimic; probabil că ele se rezervaseră pentru partea II, care nu ştiu dacă a apărut, după cum nu ştiu dacă această carte a mai avut vreo nouă ediţie.

De aceste două aritmetici a fost influenţată o a treia apărută însă mai târziu, în 1806 şi intitulată:

„Povăţuire | către | aritmetică | sau Învăţătura numerelor spre | folosul | Şcoalelor Româneşti | celor din | Ţeara Ungurească | Şi din părţile ei împreunate. | Cu milostiva îngăduinţă a împărăteştei şi | Kesaro-Krăieştei, şi Apostoliceştei Măriri | Nelegată cu 12 Kreiţ. | Tipărită cu cheltuiala Crăieştei Tipografii a | Universităţii Ungureşti. | 1806“.

Exemplarul dela Academie nu are prefaţă. Se afirmă că unele exemplare ar avea o prefaţă datată în 1802. Această aritmetică a mai fost editată în 1822. Ea are 102 pagine de 150×85 mm. Aci găsim expresiuni şi cuvinte noui. Aşa avem *unime* sau *uninţă*, pune însă şi *unişoară?*,... [cu semnul de întrebare după ea!].

„De o mie de ori o mie fac un milion sau cum se zice, un întuneareac (1000000)“.

Aceasta nu opreşte pe autor să pătrundă şi în bezna bilioanelor, trilioanelor şi chiar a cvadrilioanelor, şi dă de cetit numărul:

234, 524, 568, 913, 335, 487, 700, 231, 120.

Despărţirea grupelor de trei cifre o face cu *vergeale (commaturi)* [virgule].

La operaţiuni găsim cuvinte noui ca *demicşorat* sau *de împuţinat* pentru descăzut; *înmulţitoriu, împărţitoriu.* Se ocupă şi aci de diferitele unităţi de măsură cărora le dă *catastihul* sau *catalogul.* «Rezoluţia» şi «Reducţia», — cărora le zice *despărţire* şi *reducere,* — sunt foarte sumar tratate. Numerelor numite le zice *otărâte,* şi celorlalte *neotărâte.*

In această aritmetică apare prima dată *fracţii* sau *frângeri.* Se arată *cum răsar fracţiile,* apoi *câţi numeri sunt de lipsă* la o *fracţie* şi dă răspunsul *numitoriu* şi *numerătoriu.* Arată cum se face *scrisul fracţiilor, spunerea fracţiilor, despărţirea fracţiilor* în *adevărate* sau *proprie* [(mai mic ca 1)], *neproprie* [mai mari ca 1], *curate* [fără întregi], *amestecate* [cu întregi]. Se ocupă de *scurtarea fracţiilor* [simplificarea], şi dă reguli de divibilitate prin 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 iar pentru 7 recomandă împărţirea directă! Află apoi *numitorul cel de obşte* şi cum se fac operaţiile cu fracţii.

La Regula Detri înseamnă *numărul necunoscut* cu X. Arată cum se reduce Regula Detri *înduplecată* [compusă] în *simplă*. Regulile *Detri* le aplică la socoteala *cametilor, neemurilor (arânzilor), chiriilor şi altor lucruri de folos.* La aceste probleme întâlnim cuvintele *câştig, interes, protent, 4 dela sută, împrumutătoriul.* Mai dă *regula soţietăţii (însoţirei) simplă şi înduplicată.*

Cartea are la fine table pentru cele patru operaţiuni. Tabla înmulţirii (Ţibetului) se poate reduce numai până la 5×6, când se numeşte şi *tabla leaneşilor,* iar de aici înainte îi învaţă cum să facă înmulţirile pe degete. Despre această metodă am vorbit în *Gazeta Matematică* Anul VI. pag. 221, unde am arătat că multă lume atribue Valahilor invenţiunea acestei metode de înmulţire.

Despre ediţia din 1822 a acestei cărţi a scris D. C. ASCANIU CRIŞAN un articol în *Natura,* Anul XXII No. 2 din 1933.

* * *

Iată dar ce publicaţii matematice erau în limba română în ultimul sfert al veacului al XVIII-lea şi la începutul celui de al XIX-lea! Până în 1800 se mai tipărise o aritmetică la Iaşi, în Tipografia Mitropoliei, de către AMFILOCHIE, Episcopul Hotinului la 1795 şi se afirmă că ANTON DE MARCHI, fost Director la Şcoala Normală din Cernăuţi ar mai fi tipărit una în limba română şi germană la 1785, pe care însă nu am văzut-o, — dacă care cumva nu ar fi tot cea apărută la Viena în acelaşi an. Aritmeticele întrebuinţate mai înainte la Bucureşti şi Iaşi erau tipărite în greceşte, iar în provinciile de sub stăpâniri streine în limbile respective. In Bucureşti nu se tipărise aritmetici decât în 1832, a lui I. ELIAD şi a lui G. POP.

Din cele expuse până aci, oricine îşi poate da seama în ce stare erea matematica română acum un secol şi jumătate şi apoi ce progrese uriaşe a făcut această ştiinţă de atunci până acum în ţara noastră! In prima jumătate a secolului trecut s'au înmulţit şi răspândit cărţile didactice de matematice; în al treilea sfert apar licenţiaţi în matematice, articole originale de matematice trimise de români revistelor streine sau tipărite în broşuri, iar în ultimul lui sfert apar doctori în matematice, Societăţi şi reviste de matematice, iar în secolul actual matematicienii români au început să strălucească pe la Congresele de matematicieni şi chiar pe catedre ale vechilor Universităţi streine. Timpul de ascensiune a fost scurt, dar iuţeala

de înălțare destul de mare ca să compenseze în bună parte timpul pierdut.

La mărirea și întreținerea acestei iuțeli a contribuit în bună măsură și *Gazeta Matematică* prin *„Publicarea de articole originale de matematice"* și prin *„Desvoltarea gustului pentru aceste științe și al cercetărilor originale"*, program pus în prima pagină a primului număr din primul an; program urmărit și realizat timp de 40 ani.

ION IONESCU.

VOLUMUL ȘI CENTRUL DE GREUTATE AL CALOTEI SFERICE

Nota de față are de obiect găsirea, pe cale elementară, a formulelor care dau volumul și centrul de greutate al unei calote sferice, metodă care poate fi extinsă și la alte cazuri similare. Ea presupune cunoscute formulele care dau volumul unui cilindru circular drept ($V = \pi r^2 i$), sumele primelor n numere întregi, a pătratelor și cuburilor lor [$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1^2$].

1. — Să considerăm o calotă sferică, despărțită dintr'o sferă de rază R, printr'un plan P dus la distanța i_1 de centrul O al sferei. Fie OBA perpendiculara scoborîtă din centrul sferei pe planul P, B intersecția cu planul, A cu sfera, $\overline{BA} = i = R - i$, va reprezenta înălțimea calotei. Să împărțim înălțimea $\overline{AB}$ în n părți egale, iar prin punctul de diviziune să ducem plane paralele cu planul P; vom descompune astfel calota în felii de grosimi egale cu i/n, iar razele cercurilor, care limitează felia cuprinsă între planele paralele duse prin punctele de diviziune $k-1$ și k, vor fi:

$$r_{k-1}^2 = \frac{(k-1)i}{n}\left[2R - \frac{(k-1)i}{n}\right] \text{ și } r_k^2 = \frac{ki}{n}\left[2R - \frac{ki}{n}\right];$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAȚIUNII SIBIIU

volumul V^k al acestei felii va fi cuprins între volumele a două cilindre având razele r_{k-1} şi r_k, şi înălţimea i/n, vom avea deci:

$$(1)\quad \pi\frac{(k-1)\,i}{n}\left[2R-\frac{(k-1)\,i}{n}\right]\frac{i}{n}<V_k<\pi\frac{ki}{n}\left[2R-\frac{ki}{n}\right]\frac{i}{n}\,.$$

Volumul calotei va fi:

$$V=V_1+V_2+\ldots+V_k+\ldots+V_n=\sum_{k=1}^{k=n}V_k\,,$$

iar în baza relaţiilor precedente (1) vom avea:

$$(2)\quad \pi\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(k-1)\,i}{n}\left[2R-\frac{(k-1)\,i}{n}\right]\frac{i}{n}<V<\pi\sum_{k=1}^{k=n}\frac{ki}{n}\left[2R-\frac{ki}{n}\right]\frac{i}{n}\,,$$

dar

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{(k-1)\,i}{n}\left[2R-\frac{(k-1)\,i}{n}\right]\frac{i}{n}=\frac{i^2}{n^2}\left[2R\frac{n(n-1)}{2}-i\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{ki}{n}\left[2R-\frac{ki}{n}\right]\frac{i}{n}=\frac{i^2}{n^2}\left[2R\frac{n\,(n+1)}{2}-i\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6n}\right];$$

presupunând că numărul diviziunilor n creşte nemărginit, expresiunile precedente tind — una şi alta — către $i^2\left(R-\frac{i}{3}\right)$.

V rămânând necontenit cuprins între două cantităţi variabile, care tind una şi alta către aceeaşi limită, rezultă că şi V va tinde către aceeaşi limită şi vom avea:

$$(3)\qquad V=\pi i^2\left(R-\frac{i}{3}\right),$$

care ne dă volumul calotei sferice.

2. — Aplicând teorema momentelor statice, în raport cu un plan tangent la sferă dus prin punctul A, vom avea:

$$(4)\qquad V\,.\,\bar{x}=\sum_{k=1}^{k=n}V_k\,x_k\,,$$

$\bar{x}$ distanţa centrului de greutate căutat de planul tangent precedent, x_k distanţa centrului de greutate al felii V_k la acelaş plan, avem:

$$\frac{(k-1)\,i}{n}<x_k<\frac{ki}{n}\,;$$

ţinând seama de inegalităţile ce trebue să satisfacă V_k şi x_k deducem:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \pi \frac{(k-1)^2 i^3}{n^3}\left[2R - \frac{(k-1)i}{n}\right] < V\bar{x} < \sum_{k=1}^{k=n} \pi \frac{k^2 i^2}{n^3}\left[2R - \frac{ki}{n}\right]$$

dar

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(k-1)^2 i^3}{n^3}\left[2R - \frac{(k-1)i}{n}\right] = 2R \frac{(n-1)n(2n-1)i^3}{6n^3} - \frac{n^2(n-1)^2}{4n^4} i^4$$

şi

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k^2 i^3}{n^3}\left[2R - \frac{ki}{n}\right] = 2R \frac{n(n+1)(2n+1)i^3}{6n^3} - \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} i^4,$$

făcând pe n să crească nemărginit, expresiunile precedente tind — una şi alta — către: $\frac{2}{3} R i^3 - i^4/4$; $V\bar{x}$ fiind cuprins între două cantităţi, care tind către aceeaşi limită, rezultă că vom avea

$$V\bar{x} = \tfrac{2}{3} \pi R i^3 - \pi \frac{i^4}{4}, \text{ sau} \tag{5}$$

$$\pi i^2 \left(R - \frac{i}{3}\right) \bar{x} = \tfrac{2}{3} R i^3 - \pi \frac{i^4}{4} \quad \therefore$$

$$\bar{x} = \frac{i}{4} \cdot \frac{8R - 3i}{3R - i}, \text{ care ne dă poziţia cen-} \tag{6}$$

trului de greutate căutat; pentru o jumătate de sferă $i = R$, $\bar{x} = \frac{3}{8} R$, iar distanţa la centru va fi $\frac{3}{8} R$.

3. — Procedeul de mai sus poate fi aplicat şi în cazul unui segment sferic cu două baze şi înălţime i. Segmentul îl vom despărţi de asemenea în felii V_k prin plane paralele cu bazele segmentului, razele acestor felii vor fi însă date de relaţiile

$$r_{k-1}^2 = \left[i_1 + \frac{(k-1)i}{n}\right]\left[2R - i_1 - \frac{(k-1)i}{n}\right], \; i_1 \text{ fiind înălţimea}$$

corespunzătoare calotei cu raza cea mică a segmentului; vom face apoi însumările ca mai sus.

Am putea încă să considerăm segmentul ca diferenţă a două calote ale căror volume şi centre de greutate sunt cunoscute.

A. G. Ioachimescu.

TOPOLOGIE ELEMENTARĂ

1. Topologia este o ramură superioară a ştiinţei matematice, care astăzi e adânc studiată. Intr'un înţeles mai restrâns, dar păstrând oarecare caractere comune cu această topologie generală, se poate desprinde din ea o parte care se poate studia cu mijloace elementare. Despre această parte, pe care o voiu numi *topologie elementară,* care e în acelaş timp simplă şi de mare folos pentru geometria elementară, vreau să scriu rândurile de faţă.

In topologia elementară e vorba de aşezarea elementelor unei figuri unele faţă de altele. Cercetarea deplină, clasificarea diferitelor aşezări ale părţilor constitutive ale unei figuri, caracterizarea acestor aşezări pot forma obiectul topologiei elementare.

Toţi cei cari s'au ocupat ceva mai de aproape de geometrie îşi dau seama de însemnătatea cercetării topologice. Inainte de a studia proprietăţile unei figuri geometrice, se impune în chip firesc să-i studiem, în rândul întâiu, structura, adică aşezarea părţilor unele faţă de altele, adică să-i cercetăm topologia elementară.

Care pot fi, de exemplu, diferitele aşezări ale centrului O al cercului circumscris unui triunghiu ABC faţă de laturile acestui triunghiu? Observăm mai întâi că laturile triunghiului împart planul în şapte regiuni şi că punctul O se poate găsi numai în patru din aceste regiuni sau pe una din laturile triunghiului. Se găseşte pe una din laturi, dacă unghiul opus e drept. Se găseşte în interiorul triunghiului, dacă toate unghiurile triunghiului sunt ascuţite, sau într'o regiune exterioară dacă unul din unghiuri e obtus.

Astfel, în acest caz simplu, problema topologică e rezolvată.

2. Probleme topologice se pot închipui nenumărate şi foarte variate. Ele sunt însemnate chiar prin natura lor, dar mai sunt interesante ca pregătire pentru demonstrarea unei teoreme. Orice demonstraţie presupune o anumită aşezare a figurii, despre care e neapărat necesar să avem o idee clară.

Cercetarea topologică se mai impune şi dintr'un alt punct de vedere. De multe ori demonstraţiile geometrice actuale se fac pe o figură ipotetică, fără să se cerceteze dacă această aşezare ipotetică este posibilă, adică fără o cercetare topologică preliminară. Intuiţia ne împiedică de cele mai multe ori de a greşi, dar numai topologia elementară suprimă definitiv putinţa unei greşeli.

Să dau un exemplu. Dacă presupunem că bisectoarea interioară a unghiului A în triunghiul ABC şi perpendiculara ridicată pe mijlocul laturii BC se taie în interiorul triunghiului, atunci, oricare ar fi triunghiul ABC, se poate arăta că avem AB = AC. Ceeace e absurd. Absurditatea rezultă dintr'o aşezare imposibilă pe care am presupus-o. In fapt, bisectoarea interioară şi perpendiculara pe mijlocul laturii BC se întâlnesc, în afară de triunghiu, la mijlocul A' al arcului BC din cercul circumscris. E vorba de arcul pe care nu se află vârful A.

Dar, chiar cunoscând această proprietate se poate întâmpla să greşim, dacă nu arătăm mai întâi proprietatea topologică simplă, că dacă proiectăm punctul A' pe laturile AB şi AC, în general, una din proiecţii cade chiar pe latură, cealaltă pe prelungire.

3. Şi până acum s'au studiat chestii de topologie elementară, cum e, de exemplu, aşezarea a două cercuri unul faţă de altul. Socotesc că pentru desvoltarea mai riguroasă a geometriei elementare e neapărată nevoie de un studiu sistematic al topologiei elementare, pe care-l recomand, cu toată stăruinţa, tinerilor noştri corespondenţi.

G. ŢIŢEICA.

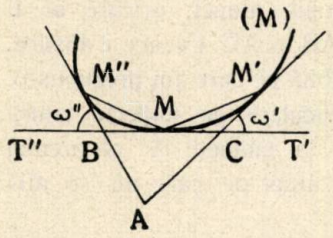
LIMITA RAZEI CERCULUI CIRCUMSCRIS TRIUNGHIULUI FORMAT DE TREI TANGENTE INFINIT VECINE LA O CURBĂ PLANĂ

Vom expune o metodă geometrică pentru determinarea razei cercului circumscris triunghiului ABC format de tangentele în punctele infinit vecine M'', M, M' ale curbei (M), când punctele M' şi M'' tind către M, şi vom arăta că această limită este R/4, R fiind raza de curbură în M.

Însemnând cu $\omega' = M'CT'$, $\omega'' = M''BT''$ unghiurile de contingenţă pentru arcele infinit mici MM', MM'', raza r a cercului circumscris triunghiului ABC este

$$(1) \qquad r = \frac{BC}{2\,\sin BAC} \quad , \quad r = \tfrac{1}{2}\frac{BM + MC}{\sin(\omega' + \omega'')} \; .$$

R fiind raza de curbură în M la curba (M), se ştie că $\frac{MM'}{\omega'} \to R$,



iar că, din punct de vedere infinitesimal, triunghiurile MCM', MBM'' sunt isoscele, şi $\measuredangle MM'C \sim \frac{\omega'}{2}$. Din triunghiul MCM', avem

$$\frac{MM'}{\sin\omega'} = \frac{MC}{\sin MM'C}, \quad \frac{MC}{\sin\frac{\omega'}{2}} \sim \frac{MM'}{\sin\omega'} \to R.$$

Deci

$$\frac{MC}{\sin\frac{\omega'}{2}} \sim R + \varepsilon', \quad \frac{MB}{\sin\frac{\omega''}{2}} \sim R + \varepsilon'',$$

ε' şi ε'' fiind infinit mici. Inlocuind în (1) MB şi MC, avem

$$r \sim \tfrac{1}{2} \frac{(R+\varepsilon')\sin\frac{\omega'}{2} + (R+\varepsilon'')\sin\frac{\omega''}{2}}{\sin(\omega'+\omega'')},$$

$$r \sim \frac{R}{2} \frac{\sin\frac{\omega'}{2} + \sin\frac{\omega''}{2}}{\sin(\omega'+\omega'')},$$

neglijând infiniţii mici de ordinul al doilea. Deci

$$r \sim \frac{R}{2} \frac{2\sin\frac{\omega'+\omega''}{4}\cos\frac{\omega'-\omega''}{4}}{4\sin\frac{\omega'+\omega''}{4}\cos\frac{\omega'+\omega''}{4}\cos\frac{\omega'+\omega''}{2}}, \quad r \to \frac{R}{4},$$

adică raza cercului circumscris triunghiului format de trei tangente infinit vecine la o curbă plană tinde către 1/4 din raza de curbură în punctul considerat.

N. ABRAMESCU.

LIMITA UNOR TRIUNGHIURI

Se dă în plan triunghiul $A_0B_0C_0$ şi un punct oarecare M. Polarele lui M faţă de unghiurile triunghiului $A_0B_0C_0$ formează un triunghiu $A_1B_1C_1$ notat aşa încât AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 sunt polarele lui M respectiv faţă de unghiurile A, B, C.

Fie α, α' intersecţiile lui BC cu B'C' şi AM; β, β' şi γ, γ' punctele analog obţinute.

Aplicând teorema lui CEVA triunghiului ABC şi cevienelor AM, BM, CM se găseşte:

$$(1) \qquad \frac{\overline{\alpha'B}}{\overline{\alpha'C}} \cdot \frac{\overline{\beta'C}}{\overline{\beta'A}} \cdot \frac{\overline{\gamma'A}}{\overline{\gamma'A}} = -1.$$

Punctele B, C, α, α' formează, prin construcţie, o diviziune armonică aşa că vom avea

$$\frac{\overline{\alpha'B}}{\overline{\alpha'C}} = -\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$$

şi încă 2 relaţiuni analoage, pe care înmulţindu-le şi ţinând seamă de (1), obţinem egalitatea

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1,$$

care arată că punctele α, β, γ sunt pe o dreaptă Δ. Triunghiurile $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ sunt deci omologice.

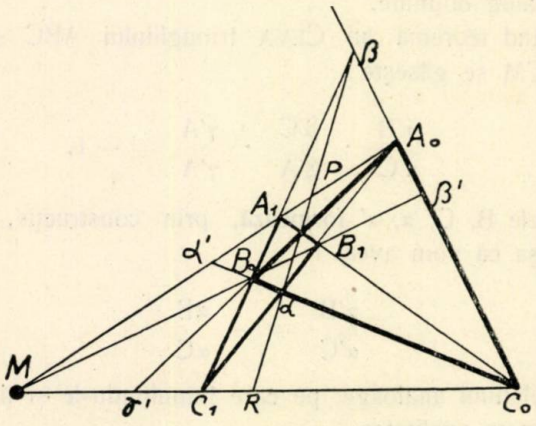
Aceasta este o proprietate cunoscută care se enunţă de obiceiu sub forma următoare: *polarele unui punct în raport cu cele trei unghiuri ale unui triunghiu întâlnesc laturile acelui triunghiu în trei puncte colineare.*

De oarece, prin construcţie fascicolul C ($M\alpha'A_1A$) este armonic şi punctele M, α', A sunt colineare, rezultă că A_1 se află pe AM. La fel B_1, C_1 se găsesc pe BM, CM. Prin urmare *centrul de omologie al triunghiurilor* $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$ *este punctul* M.

Fie acum $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... $A_nB_nC_n$ triunghiurile care se obţin succesiv din $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... aşa cum s'a obţinut $A_1B_1C_1$ din $A_0B_0C_0$. Se observă că polara lui M faţă de unghiul $B_1A_1C_1$ este dreapta $A_1\alpha$, după cum rezultă din construcţia clasică a polarei.

Prin urmare vârfurile B_2, C_2 ale triunghiului $A_2B_2C_2$ se găsesc pe $A_1\alpha$. La fel se arată că B_2A_2, A_2C_2 trec prin γ, β, şi că A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 trec prin M. Deci triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sunt omologice având pe Δ şi pe M ca axă şi centru de omologie. Continuând pe această cale se ajunge la concluzia că:

Triunghiurile $A_i\ B_i\ C_i$ *sunt omologice între ele şi omologice cu triunghiul iniţial* $A_0B_0C_0$.



Ne propunem acum să găsim ce devine triunghiul $A_n\ B_n\ C_n$ când n creşte la infinit. Pentru aceasta să presupunem că PQR ar fi triunghiul limită când n este infinit, vârfurile P, Q, R fiind pe AM, BM, CM.

Zic că P, Q, R sunt sau confundate sau colineare, căci altfel din triunghiul PQR s'ar putea obţine un alt triunghiu $A_i\ B_i\ C_i$ şi atunci PQR nu ar mai fi limita lui $A_1B_1C_1$.

Observ acum că A_2 fiind polara lui M faţă de unghiul $A_0C_1A_1$ se găseşte între A_0, A_1, apoi A_3 între A_1, A_2 şi aşa mai departe. Deci P se va găsi şi el între A_0, A_1. La fel Q şi R se vor găsi respectiv între B_0, B_1 şi C_0, C_1. Aceasta dovedeşte că P, Q, R nu se pot confunda decât dacă A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 s'ar confunda, adică dacă $A_0B_0C_0$ s'ar reduce la un punct sau o dreaptă.

Rămâne numai că P, Q, R sunt colineari şi anume pe Δ pentrucă triunghiul limită trebue să fie şi el omologic cu $A_i\ B_i\ C_i$. Urmează de aici că: *triunghiul* $A_n\ B_n\ C_n$ *devine la limită dreapta* Δ, *axa de omologie a triunghiurilor* $A_i\ B_i\ C_i$.

Nu am întâlnit până acum această proprietate care conduce la o altă problemă analoagă după cum se va vedea din cele ce urmează.

După cum s'a văzut, A_2 este conjugatul lui M față de A_1A_0, A_3 conjugatul lui M față de A_1A_2, ... și deci A_n este conjugatul lui M față de $A_{n-2}\ A_{n-1}$. Când n devine infinit A_n va avea o poziție limită P pe MA_1A_0 între A_1A_0. Ne propunem să găsim acea poziție cunoscând lungimile $MA_0 = a$, $MA_1 = b$.

Să aplicăm teorema transversalelor triunghiurilor A_0MC_0, A_1MC_1 tăiate primul de Δ și A_1C_1 și al doilea de Δ și A_0B_0. Găsim, dacă notăm cu P,Q,R intersecțiile lui Δ cu A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1:

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PA_0}} \cdot \frac{\overline{\beta A_0}}{\overline{\beta' C_0}} \cdot \frac{\overline{RC_0}}{\overline{RM}} = 1 \quad ; \quad \frac{\overline{\beta A_0}}{\overline{\beta C_0}} \cdot \frac{\overline{C_1C_0}}{\overline{C_1M}} \cdot \frac{\overline{A_1M}}{\overline{A_1A_0}} = 1$$

$$\frac{\overline{RC_0}}{\overline{RM}} \cdot \frac{\overline{PM}}{\overline{PA_1}} \cdot \frac{\overline{\gamma A_1}}{\overline{\gamma' C_0}} = 1 \quad ; \quad \frac{\overline{\gamma A_1}}{\overline{\gamma C_0}} \cdot \frac{\overline{\gamma' C_0}}{\overline{\gamma' M}} \cdot \frac{\overline{A_0M}}{\overline{A_0A_1}} = 1$$

de unde se scoate

$$\frac{\overline{PA_0} \cdot \overline{A_1M} \cdot \overline{C_1C} \cdot \overline{\gamma' M}}{\overline{PA_1} \cdot \overline{A_0M} \cdot \overline{C_1M} \cdot \overline{\gamma' C_0}} = 1$$

sau

$$(2) \qquad \frac{(MP - b)a}{(a - MP)b} \cdot \frac{\overline{\gamma' C_0}}{\overline{\gamma' M}} \cdot \frac{\overline{C_1M}}{\overline{C_0C_1}} = 1.$$

Dar punctele M, γ', C_1, C_0 formând o diviziune armonică, avem

$$\frac{\overline{\gamma C_0}}{\overline{\gamma' M}} \cdot \frac{\overline{C_1M}}{\overline{C_0C_1}} = 2,$$

așa că (2) devine

$$2a\,(MP - b) = b\,(a - MP)$$

$$\therefore \quad MP = \frac{3ab}{2a + b},$$

care definește poziția limită a lui P.

GENERAL GH. BUICLIU.

SPECTRUL DETENTEI DE GAZE LA GURA ȚEVILOR DE TUN SAU ARMĂ

Pentru studiul acestui spectru m'am servit de cercetările teoretice ale D-lor MEYER şi PRANDTL (Handbuch der Physik «Mechanik der Flüssigen und Gasförmigen Körper, 313»), şi de fotografiile publicate de D-l CRAUZ («Lehrbuch der Balistik II, 447 — 450»).

După aceste studii spectrul unei detente de gaze la gura țevilor de tun sau de armă are forma unui *clopot.*

Fie A diametrul maxim şi l abscisa lui, pentru un spectru al unei detente şi fie α_0 înclinarea tangentei la origine a curbei spectrului. Fie de asemenea u volumul «clopotului-spectru» şi c volumul interiorului țevei de tun sau armă de calibru a, atunci putem scrie:

$$1) \qquad \frac{u}{c} = x \cdot \left(\frac{A}{a}\right)^2 \cdot \frac{l}{a}$$

unde x este o constantă specifică tunului sau armei.

Fie de asemenea v_0 viteza inițială a proectilului, w viteza gazelor într'un punct de abscisă x, w_c viteza critică, p_0 şi v_0 presiunea şi volumul gazelor la gura țevei în clipa $t = 0$ şi p_x şi v_x aceleaşi la abscisa x dela gura țevei, atunci pentru o detentă *adiabatică* avem:

$$2) \qquad w = \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot \frac{n}{n-1} \cdot p_0 \cdot v_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{v_0}{v_x}\right)^{n-1}\right]}$$

unde n este raportul căldurilor specifice.

Ținând seamă apoi că:

$$3) \qquad w \text{ max.} = \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot \frac{n}{n-1} \cdot p_0 \cdot v_0}$$

şi

$$4) \qquad w_c = w \text{ max.} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \cdot$$

Apoi cum:

$$5) \qquad \frac{v_0}{v_l} = \frac{c}{c+u} \cdot$$

Explicitând pe v_x din 2) şi făcând $x = l$, obţinem:

$$6) \qquad \frac{u}{c} = \left[\frac{1 - \frac{n-1}{n+1} \cdot \left(\frac{v_0}{w_c}\right)^2}{1 - \frac{n-1}{n+1} \cdot \left(\frac{w_l}{w_c}\right)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}} - 1.$$

De unde scoţând valoarea lui $\left(\frac{w_l}{w_c}\right)$, avem:

$$7) \qquad \frac{w_l}{w_c} = \sqrt{\frac{\frac{n+1}{n-1}\left[\left(\frac{u}{c}+1\right)^{n-1} - 1\right] + \left(\frac{v_0}{w_c}\right)^2}{\left(\frac{u}{c}+1\right)^{n-1}}}$$

care ne dă următoarea variaţiune:

$\frac{u}{c}$	0	$\left[\frac{(n+1) - (n-1)\left(\frac{v_0}{w_c}\right)^2}{2}\right]^{\frac{1}{n-1}} - 1$	...	∞
$\frac{w_l}{w_c}$	$\frac{v_0}{w_c}$	1	...	$\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

In condiţiunile practicei însă, curba

$$\frac{w_l}{w_c} = f\left(\frac{u}{c}\right)$$

se poate înlocui prin porţiunea de dreaptă:

$$8) \qquad \frac{w_l}{w_c} = \frac{\left(1 - \frac{v_0}{w_c}\right) \cdot \frac{u}{c}}{\left[\frac{(n+1 - (n-1)\left(\frac{v_0}{w_c}\right)^2}{2}\right]^{\frac{1}{n-1}} - 1} + \frac{v_0}{w_c}.$$

De unde pentru $\frac{w_l}{w_c} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$ obţinem $\left(\frac{u}{c}\right)_{\text{max.}}$, care pentru $n = 1{,}25$ şi $x = \frac{1}{100}$ (pentru gurile de foc moderne), ne dă:

$$9) \qquad \left(\frac{u}{c}\right)_{\text{max.}} \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{A}{a}\right)^2 \cdot \frac{l}{a} = 135.$$

Apoi din analiza fotografiei spectrelor, observăm că :

$$10) \qquad \frac{A-a}{2l} = \operatorname{tg}\frac{\alpha_0}{2} .$$

Iar, după calculele D-lor MEYER şi PRANDTL, avem :

$$11) \qquad (\alpha_0)_{max.} = 52^0.$$

Prin urmare din 9), 10) şi 11) rezultă că avem :

$$12) \qquad \left(\frac{A}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{A}{a} - 1\right) = 131{,}8$$

ceeace ne dă drept soluţii pentru *maximum :*

$$\left(\frac{A}{a}\right)_{max.} = 5{,}442 \; ; \left(\frac{l}{a}\right)_{max.} = 4{,}442.$$

Aceste soluţiuni sunt foarte necesare la calculul *„frânelor de gură“*, cu care sunt dotate gurile de foc moderne.

MAIOR I. LINTEŞ.

ASUPRA RĂDĂCINILOR ECUAŢIILOR ÎN CARE COEFICIENTUL LUI x^p ARE CEL MAI MARE MODÙL

Fie ecuaţia cu coeficienţi reali sau complecşi

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_n x^n = 0.$$

Dacă

$$| ap | \geqslant | a_0 | , | a_1 | , \ldots | a_{p-1} | , | a_{p+1} | , \ldots | a_n |$$

atunci modùlele a p rădăcini ale acestei ecuaţii sunt inferioare unei limite fixe. In o notă din 1931 din *C. R. de la Soc. de Sciences de Varsovie* am pus problema găsirii acestei limite în general. Bazat pe relaţiile între coeficienţi şi rădăcini, am arătat că pentru ecuaţia de gradul al treilea în care a_2 e cel mai mare coeficient în modùl, două rădăcini sunt inferioare lui $1 + \sqrt{6}$. D-l M. BIERNACKI a reluat problema aceasta în o notă din *Mathematica* Vol. VIII (1934) şi a scăzut limita la 3.

O teoremă a lui VAN VLECK, demonstrată în mod elementar şi elegant de D-l P. MONTEL în *Comentarii Mathematici Heloetici* (1935), permite să regăsim limita D-lui BIERNACKI şi să răspundem complet la problema pusă în 1931.

Teorema D-lui VAN VLECK se enunţă astfel:

Ecuaţia

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + x^p + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

are p rădăcini al căror modùl e mai mic decât rădăcina pozitivă a ecuaţiei:

$$\rho^p - C^1_{n-p+1} |\alpha_{p-1}| \rho^{p-1} - C^2_{n-p+2} |\alpha_{p-2}| \rho^{p-2} - \ldots - C^p_n |\alpha_0| = 0.$$

Să aplicăm acest rezultat la $f(x)$ pentru $n = 3$, $p = 2$. Impărţim pe $f(x)$ cu a_2 şi însemnăm cu α_i nouii coeficienţi. Ecuaţia are două rădăcini mai mici în modùl decât rădăcina pozitivă a ecuaţiei

$$\rho^2 - 2 |\alpha_1| \rho - 3 |\alpha_0| = 0$$

adică decât:

$$|\alpha_1| + \sqrt{|\alpha_1|^2 + 3 |\alpha_0|}.$$

Dar $|a_2|$ a fost presupus *cel mai mare* modùl, deci $|\alpha_1|$ şi $|\alpha_0|$ sunt *cel mult* egali cu 1, aşa că limita devine *cel mult* $1 + \sqrt{1 + 3} = 3$. Recădem peste rezultatul citat mai sus. Observăm *în plus* că coeficienţii puterilor superioare lui p nu au nici o influenţă în această determinare a limitei.

Pentru cazul general, dacă împărţim pe $f(x)$ cu a_p, toţi nouii coeficienţi α_i sunt *cel mult* de modùl 1. Rădăcina pozitivă a ecuaţiei în ρ a lui VAN VLECK e atunci, evident, mai mică decât rădăcina pozitivă a ecuaţiei în care înlocuesc pe toţi α_i prin 1. Avem deci teorema:

Dacă în ecuaţia

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_n x^n = 0$$

avem $|a_p| \geqslant |a_0|, |a_1|, \ldots |a_n|$, *atunci* p *rădăcini ale acestei ecuaţii sunt mai mici în modùl decât rădăcina pozitivă a ecuaţiei:*

$$\rho^p - C^1_{n-p+1} \rho^{p-1} - C^2_{n-p+2} \rho^{p-2} - \ldots - C^p_n = 0.$$

PETRE SERGESCU.

REZOLVAREA PROBLEMELOR PRACTICE DE MATEMATICI

Intr'o serie de articole intitulate „*Consideraţiuni practice la alcătuirea şi rezolvarea problemelor de matematică*“ publicate în *Gazeta Matematică* (Anul XVI pag. 9 şi 121, Anul XVII pag. 325 şi 363 şi Anul XXXVIII pag. 44) serie care „*va urma*“, D-l PROFESOR ION IONESCU, face un studiu amănunţit al acestei chestiuni, dovedind grija pe care alcătuitorii de probleme de matematici trebue să o aibă, din punct de vedere practic, pentru ca problemele propuse să se poată rezolva şi în acelaşi timp acele probleme să aibă şi un sens practic bine determinat.

Am plecat dela acest studiu din mai multe motive, printre care, cele mai importante sunt următoarele:

1. Pentrucă în cele ce urmează mă voiu ocupa de rezolvarea problemelor practice de matematici adică de rezolvarea acelor probleme de matematici care îşi au obârşia în vieaţa practică; în vieaţa de toate zilele, probleme cercetate dintr'un anumit punct de vedere şi în studiul D-lui PROFESOR ION IONESCU.

2. Pentrucă găsesc, ca, cu ocazia Jubileelor, pe lângă un pas hotărît înainte, este bine să se arunce şi o privire plină de învăţăminte şi spre trecut, amintind, prin aceasta făuritorilor de cărţi de matematici, ca pe lângă interesul material, care, în mod evident, la foarte mulţi primează, să se aibă în vedere şi sfaturile date cu atâta generozitate de marii înaintaşi, cărţile lor devenind astfel utile şi altora nu numai celor ce le fac şi le vând.

3. Pentrucă acel care va ceti cele ce urmează, dacă va avea posibilitatea să cetească mai înainte Studiul D-lui PROFESOR ION IONESCU se va edifica mai bine asupra laturii speciale pe care am vrut s'o fixez aci, în legătură cu rezolvirea problemelor practice de matematici.

Multe din cele ce vor urma au mai fost spuse de mine, în repetate rânduri, foştilor mei elevi din Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele şi din Şcoala Politehnică; n'au fost însă niciodată scrise pe hârtie până acum.

* * *

Prin „*Probleme practice de matematici*“ înţeleg acele probleme care se pot rezolva cu ajutorul matematicilor aplicate dar

care își au obârșia, după cum am spus mai sus, în viața de toate zilele.

Rezolvarea unor astfel de probleme, nu trebue să iasă întru nimic din desfășurarea vieții însăși, rezolvarea preblemei constituind de fapt, refacerea episodului respectiv de viață prins și imobilizat în enunț, și desfășurarea lui astfel încât să se obțină rezultatul dorit, cerut în enunț, cu ajutorul matematicilor.

Pentru aceasta, primul lucru care trebue făcut, este, ca cel ce vrea să rezolve o asemenea problemă practică să caute să *„priceapă enunțul"*. Aci stă partea cea mai importantă a chestiunii.

De foarte multe ori, am văzut la elevi tresăriri și mirări, când, văzându-i că pierd vremea de geaba cu lucruri aproape fără nicio legătură cu problema pe care vroiau să o rezolve, îi puneam să recitească enunțul problemei dat de mine! Tresăreau, și-mi spuneau rușinați că n'au observat lucrurile cele mai importante ale enunțului!

Ca să le fixez ideile și mai ales ca să-i fac să învețe cum se învață, le spuneam adesea cu un oarecare aer de dojană că, fiind elevi ai unei școli de inginerie unde vor învăța cum să execute, mai târziu, lucrările inginerești la care vor fi chemați, elementul esențial este ca și ei să se obișnuiască să execute exact ceea ce li se cere nu ceea ce ar dori ei să facă, căci altfel o să se pomenească cândva făcându-i unuia o moară în loc să-i facă o casă pe care i-a cerut-o!

Pusă chestiunea astfel, elevii se apucau și citiau, și reciteau de câteva ori enunțul și de-odată fața li se lumina și spuneau veseli că problema nu e mare lucru, dar că o crezuse mai complicată.

Realitatea era că la început, când nu pricepuse enunțul problemei acesta era într'adevăr complicat, dar că citindu-l de mai multe ori *și pricepându-l,* executase într'adevăr partea cea mai dificilă a rezolvării problemei: *punerea minții sale exact în situația reală a episodului de viață prins în enunțul problemei.* Iată în ce consistă *„priceperea enunțului"*.

Odată aceasta făcută, tot restul rezolvării problemei se reduce la niște socoteli pe care le arată desfășurarea însăși a elementului cristalizat în problemă.

* * *

Să luăm câteva exemple, şi pentru ca să fim şi mai practici să începem cu cele două exemple date chiar de D-l PROFESOR IONESCU într'unul din articolele sale şi anume cele din Anul XVII pag. 327.

Primul exemplu este următorul:

1. *Un mocan pleacă la baltă cu 2375 oi. Pe drum un proprietar îi cumpără 1246 oi, şi după două zile întâlneşte pe alt mocan cu 453 pe care i le cumpără. Trecând pe lângă un oraş i se cumpără de măcelari 1625 oi, iar în drum mai cumpără dela ţărani odată 159 şi altă dată 347 oi. Cu câte oi a ajuns el la baltă?*

D-l PROFESOR IONESCU arată că deşi problema se poate rezolva algebriceşte găsind că mocanul s'ar fi dus la baltă cu 463 oi dacă operaţiile din enunţ ar fi fost posibile, totuşi, dacă se obsearvă că după ce a vândut cele 1246 oi din cele 2375 cu câte a plecat, mocanul, a mai rămas cu 1129 de oi la care, adăugând pe cele 453 oi, pe care le cumpără dela un alt mocan, adună numai 1582 oi şi deci n'are de unde să vândă măcelarilor din oraş 1625 şi prin urmare, conchide D-l IONESCU, problema este imposibilă !

Dacă recitim enunţul, însă vedem că mocanul nu a trecut cu oile *printr'un oraş* ci *pe lângă* un oraş, şi că n'a vândut *unui măcelar* cele 1625 oi ci, că ele i-au fost *cumpărate de măcelari,* adică de mai mulţi măcelari, fără să se specifice în enunţ nici câţi măcelari au fost şi nici că i le-au cumpărat pe toate cele 1625 oi deodată ; astfel încât este posibil ca mocanul să fi cumpărat între timp *dela ţărani* primul grup de 159 oi, pe care adăugându-le la cele ce mai rămăsese, a avut de unde să vândă şi altor măcelari şi restul de oi până la 1625. Plecând apoi cu cele 116 oi ce i-au mai rămas şi mai cumpărând şi al doilea grup de 347 oi, a putut astfel ajunge la baltă cu cele 463 oi, problema fiind astfel şi practic posibilă!

Al doilea exemplu este următorul:

2. *Un articol publicat într'o revistă s'a scos în 324 broşuri aparte care conţin 22.652 pagine în total. Dacă se scoteau 400 broşuri, câte pagine era să aibă toate.*

Şi aci, D-l PROFESOR ION IONESCU, găseşte că problema nu corespunde unor condiţiuni practice şi că prin urmare problema

este imposibilă, din cauză că, deşi broşurile ar fi trebuit să aibă un număr pereche de pagine, se găseşte, dintr'un calcul, că fiecare broşură ar fi trebuit să aibă câte 73 pagine ceea ce este imposibil.

Recitind şi aci enunţul, se vede că broşurile au rezultat *dintr'un articol care a fost publicat într'o revistă*, şi că de acolo s'au scos broşurile ca publicaţii aparte. Ori, într'o revistă articolul respectiv a putut foarte bine să aibă 73 pagine, iar la publicarea în broşură s'ar fi putut profita de cea de a 74-a pagină, pentruca să se formeze o mică copertă a broşurii şi astfel problema iarăşi să poată fi practică şi posibilă.

Cu oarecare bunăvoinţă ar putea fi posibilă chiar problema No. 4 dela pagina 329 al aceluiaşi articol, făcând interpretarea practică următoare:

Dacă din cei 15 bărbaţi, găsiţi de D-l PROFESOR ION IONESCU rezolvând problema algebriceşte, 14 erau celibatari, iar al 15-lea era căsătorit, atunci el ar fi putut avea drept soţie jumătatea ce trece peste cele 7 femei întregi ale problemei!

Dar această interpretare i-a putut scăpa D-lui PROFESOR ION IONESCU, întrucât D-sa şi astăzi este tot celibatar!

In fine, pentru a ilustra şi mai mult că priceperea enunţului unei probleme practice de matematici constitue aproape rezolvarea ei, să cercetăm problema No. 2709, care până astăzi este încă nerezolvată, desigur, din cauză că n'a fost *pricepută*.

Iată această problemă.

2709. Pentru a transporta un bloc de piatră dispunem de 5 inşi. Să se aranjeze transportul aşa fel ca fiecare din ei să suporte absolut aceeaşi greutate.

ION IONESCU.

Ca date ale acestei probleme nu avem decât cifra 5 a *„inşilor"* cari trebuesc astfel aranjaţi încât fiecare din ei să suporte absolut aceeaşi greutate.

Ni se cere, aşa dar, mai întâi, *„să se aranjeze transportul"* adică să se organizeze transportul, şi apoi se cere *ca fiecare din ei să suporte absolut aceeaşi greutate"*.

Aci cuvântul *greutate* poate avea două înţelesuri cu totul deosebite, şi anume: 1) matematic şi 2) greutate cu înţelesul de *„dificultate de transport"* adică de oboseală.

Cele două figuri dau soluția problemei în ambele accepțiuni ale cuvântului greutate, ajutorul dat de matematice reducându-se aci la calculul lungimilor și grosimilor barelor de suport în primul

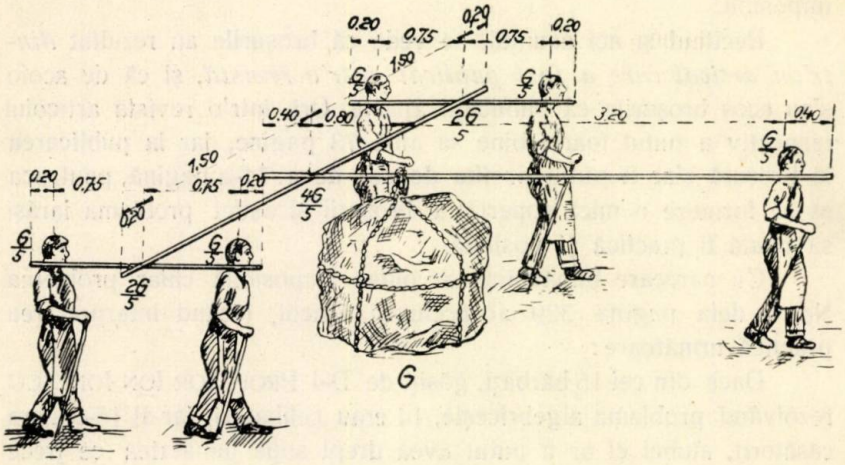


Fig. 1

caz, care trebue să aibă absolut toate aceeași grosime și deci aceeași greutate pe unitatea de măsură pentru lungimi; pentru stabilirea atârnării blocului de piatră printr'o sfoară și un cârlig,

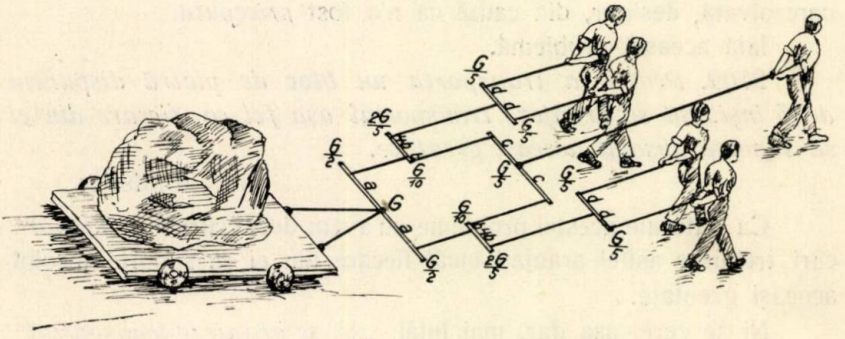


Fig. 2

transformând astfel blocul neregulat într'o forță concentrată a cărui greutate, împreună cu aceea a sforii și a cârligului se distribue, automat, descompunându-se în cinci componente verticale

repartizate în mod egal pe umerii celor 5 inşi, împreună cu cota parte a porţiunii din barele de suport care, se poate verifica uşor, se distribue deasemenea egal. Transportul este şi organizat, întrucât unul din cei 5 inşi mergând înainte conduce convoiul astfel încât toate condiţiile enunţului sunt îndeplinite.

In al doilea caz legăturile făcându-se într'un punct greutatea blocului şi a căruţului se distribue automot descompunându-se în cinci componente egale repartizate în mod egal pe cei 5 inşi. Pentru ca totul să fie în mod indiscutabil exact, trebue că, sau să se facă ipoteza neglijării greutăţii frânghiilor de tras şi a barelor de distribuţie, sau să se deplaseze puţin punctele de legătură pe aceste bare pentruca distribuţia să se facă deasemenea egal pe cei 5 inşi, problema fiind prin aceasta complet rezolvată.

ING. ŞEF I. I. CHIŢULESCU.

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR

Aflarea directă a restului diviziunii a două numere

In *Gazeta Matematică* (vol. XXIV, pag. 113 — 116) sub titlul: *„Două Teoreme de Aritmetică"* *) am stabilit două teoreme, a căror consecinţă este o formulă generală pentru aflarea directă a restului diviziunii oricărui număr întreg prin altul. Cu ajutorul acestei formule găsim regulile clasice de divizibilitate cunoscute, precum şi o infinitate de reguli noui, dintre care unele foarte practice.

In lucrarea: *„La Divisibilidad de los Números en cualquier Sistema de Numeración"* publicată în *Revista de Matematicas y Fisicas Elementales,* din Buenos Aires, (vol. V, pag. 3—6 şi 25—29) pe baza aceloraşi teoreme şi a consecinţei lor, am stabilit reguli generale de divizibilitate pentru numerele scrise în orice sistem de numeraţie.

Iată cum se ajunge la acea formulă generală prin consideraţiuni algebrice:

*) Lucrare premiată de *Gazeta Matematică* cu premiul „V. CONTA". (*Gazeta Matematică*, XXVI, 252 — 254).

Este evident că un număr întreg oarecare N, scris în sistemul de numerație cu baza x, poate fi considerat identic unui polinom ordonat $f(x)$, adică:

$$N = f(x).$$

Dar polinomul $f(x)$ poate fi pus sub forma:

$$f(x) = (A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + \ldots + A_n x^{n-1}) + x^n \cdot (B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \ldots$$

$$+ B_n x^{n-1}) + (x^n)^2 \cdot (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1}) + \ldots$$

$$+ (x^n)^{k-1} \cdot (L_1 + L_2 x + L_3 x^2 + \ldots + L_n x^{n-1}).$$

Notând polinoamele din paranteze respectiv cu $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k$ și punând $z = x^n$, avem:

$$N = f(x) = g_1 + z g_2 + z^2 g_3 + \ldots + z^{k-1} g_k = \varphi(z).$$

Cum însă în general:

$$\varphi(z) - \varphi(a) = M(z - a)$$

sau, sub formă de congruență:

$$\varphi(z) \equiv \varphi(a) \qquad \text{Mod } (z - a)$$

putem scrie relațiunea:

$$N \equiv \varphi(a) \qquad \text{Mod } (z - a)$$

adică:

$$\boxed{N \equiv g_1 + a g_2 + a^2 g_3 + \ldots + a^{k-1} g_k \qquad \text{Mod } (x^n - a)}$$

ceeace înseamnă că:

Restul diviziunii unui număr întreg oarecare N, *scris în sistemul de numerație cu baza* x, *prin* $(x^n - a)$ *este dat de relațiunea:*

$$R = g_1 + a g_2 + a^2 g_3 + \ldots + a^{k-1} g_k,$$

$g_1, g_2, g_3, \ldots . g_k$ *fiind numerele de câte* n *cifre despărțite dela dreapta spre stânga numărului* N.

Aceasta este formula generală ce am stabilit-o pe cale aritmetică în articolele mai sus citate. Dând lui a succesiv valorile $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, etc. ..., obținem regulile aflării resturilor diviziunii lui N prin $x^n \mp 1$; $x^n \mp 2$; $x^n \mp 3$; $x^n \mp 4$; etc. ...

Pentru sistemul zecimal de numeraţie nu avem decât să facem $x = 10$. In acest caz, dând lui a de exemplu valoarea $+1$, găsim regula diviziunii lui N prin numărul $999\ldots99$ de n cifre anume:

Restul diviziunii unui număr întreg oarecare N, *prin numărul* $999\ldots99$, *de n cifre, se obţine făcând suma numerelor de câte n cifre despărţite dela dreapta spre stânga lui* N.

Dacă dăm lui a valoarea -1, găsim regula diviziunii prin numărul $100\ldots01$, de $(n+1)$ cifre:

Restul diviziunii unui număr întreg oarecare N, *prin numărul* $100\ldots01$, *de* $(n+1)$ *cifre, se obţine făcând suma numerelor de câte n cifre despărţite dela dreapta spre stânga lui* N *şi afectate alternativ de semnele* $+$ *şi* $-$.

Am citat aceste două remarcabile reguli, foarte practice şi uşor de reţinut, numai ca un exemplu al roadelor ce rezultă din formula noastră generală. Cu ajutorul ei putem afla direct restul diviziunii prin oricare număr, obţinând pe lângă regulile clasice, cunoscute din cursurile de aritmetică şi reguli noui originale.

Găsesc interesant a expune, în cele ce urmează, o parte din regulile astfel găsite:

Divizibilitatea prin 3. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 3 se găseşte făcând suma cifrelor sale.

Divizibilitatea prin 4. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 4 se găseşte adunând cifra unităţilor cu de 2 ori cifra zecilor.

Divizibilitatea prin 5. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 5 este dat de cifra unităţilor.

Divizibilitatea prin 6. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 6 se găseşte adăugând cifrei unităţilor de 4 ori suma celorlalte cifre, sau scăzând din ea dublul sumei celorlalte cifre.

Divizibilitatea prin 7. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 7 se găseşte adunând produsele obţinute înmulţind cifrele sale dela dreapta spre stânga respectiv cu 1, 3, 2, — 1, — 3, —2, etc.

Divizibilitatea prin 8. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 8 se găseşte adunând cifra unităţilor cu de 2 ori cifra zecilor şi de 4 ori cifra sutelor.

Divizibilitatea prin 9. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 9 se găseşte făcând suma cifrelor sale.

Divizibilitatea prin 10. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 10 este chiar cifra unităţilor sale.

Divizibilitatea prin 11. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 11 se obține adunând cifrele sale afectate dela dreapta spre stânga de semnele alternative + și — .

Divizibilitatea prin 12. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 12 se obține scăzând dublul cifrei zecilor din cifra unităților mărită cu de 4 ori suma celorlalte cifre rămase.

Divizibilitatea prin 13. — Restul diviziunii unul număr întreg prin 13 se obține adunând produsele obținute înmulțind cifrele sale dela dreapta spre stânga respectiv cu + 1, — 3, — 4, — 1, + 3, + 4 etc.

Divizibilitatea prin 14. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 14 se obține adăugând cifrei unităților produsele obținute înmulțind celelalte cifre ale sale dela dreapta spre stânga respectiv cu —4, + 2, + 6; + 4 — 2, — 6; etc.

Divizibilitatea prin 15. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 15 se obține scăzând din cifra unităților de 5 ori suma celorlalte cifre.

Divizibilitatea prin 16. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 16 se obține scăzând din cifra unităților de 6 ori cifra zecilor și adunându-i apoi de 4 ori cifra sutelor, plus sau minus de 8 ori cifra miilor.

Divizibilitatea prin 18. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 18 se obține adăugând cifrei unităților de 10 ori suma celorlalte cifre, sau scăzând din ea de 8 ori suma celorlalte cifre.

Divizibilitatea prin 20. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 20 se obține scăzând din cifra unităților de 10 ori cifra zecilor sale.

Divizibilitatea prin 22. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 22 se obține adăugând cifrei unităților de 10 ori suma celorlalte cifre afectate dela dreapta spre stânga de semnele alternative + și — .

Divizibilitatea prin 24. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 24 se obține adunând cifra unităților cu de 10 ori cifra zecilor și de 4 ori cifra sutelor, scăzând apoi de 8 ori suma celorlalte cifre.

Divizibilitatea prin 25. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 25 se obține scăzând din cifra unităților de 15 ori cifra zecilor.

Divizibilitatea prin 27 [1]).—Restul diviziunii unui număr întreg

---

1) Restul diviziunii unui număr întreg prin 27 se mai poate obține la fel ca și pentru 999 sau 37.

prin 27 se obține adunând produsele obținute înmulțind cifrele sale dela dreapta spre stânga respectiv cu $+1+10,-8;+1+10-8$; etc...

Divizibilitatea prin 30. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 30 se obține adunând cifra unităților cu de 10 ori suma celorlalte cifre.

Divizibilitatea prin 32. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 32 se obține adunând cifra unităților cu de 10 ori cifra zecilor, de 4 ori cifra sutelor și de 8 ori cifra miilor, plus sau minus de 16 ori cifra zecilor de mii.

Divizibilitatea prin 33. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 33 se obține despărțindu-l dela dreapta spre stânga în grupe de câte două cifre și făcând apoi suma numerelor astfel obținute.

Divizibilitatea prin 35. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 35 se obține adunând produsele obținute înmulțind cifrele sale de la dreapta spre stânga respectiv cu $+1,+10,-5,+20;-10,+5-20$; etc.

Divizibilitatea prin 36. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 36 se obține scăzând din numărul format de ultimele două cifre, de 8 ori suma celorlalte cifre rămase.

Divizibilitatea prin 37. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 37 se obține despărțindu-l dela dreapta spre stânga în grupe de câte 3 cifre și făcând apoi suma numerelor astfel obținute.

Divizibilitatea prin 40. — Restul diviziunii unui număr întreg prin 40 se obține dacă numărului format din ultimele sale două cifre îi adăugăm sau îi scădem de 20 ori cifra sutelor.

Etc., ...

. . . . . .

Observare. Este evident că regula divizibilității, găsită pentru un număr, este valabilă pentru toți divizorii săi. Astfel, de exemplu, regula divizibilității prin 999 este aplicabilă și pentru numerele 27 și 37, de oarece:

$$999 = 27 \cdot 37.$$

Tot astfel, regula divizibilității prin 1001 este aplicabilă și pentru numerele: 7, 11 și 13 de oarece:

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13,$$

Etc., ...

Aplicaţiuni. — 1. *Se cere restul împărţirei numărului*

$$N = 12\ 345\ 678\ 987\ 654\ 321$$

prin 15.

Aplicând regula noastră avem:

$$N \equiv 1 - 5(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2). \quad \text{(Mod. 15)}$$

$$\therefore\ N \equiv -399 \quad \text{(Mod. 15)}$$

Aplicând şi lui — 399 regula noastră avem:

$$N \equiv -[9 - 5(3 + 9)] \quad \text{(Mod. 15)}$$

$$\therefore\ N \equiv 51 \quad \text{(Mod. 15)}$$

Dacă acum aplicăm regula şi lui 51 obţinem:

$$N \equiv 1 - 25 \quad \text{(Mod. 15)}$$

$$\therefore\ N \equiv 6 \quad \text{(Mod. 15)}$$

deci restul cerut este 6.

2. *Ce condiţie trebue să îndeplinească cifrele* x, y, z *pentru ca numărul:*

$$N = 237\ x41\ 30y\ 8z4$$

să fie divizibil prin 9999?

Aplicând regula noastră, avem:

$$N \equiv y8\,z4 + 4130 + 237x \quad \text{(Mod. 9999)}$$

sau, ceeace este tot una:

$$N \equiv 804 + 4130 + 2370 + yozx \quad \text{(Mod. 9999)}$$

$$\therefore\ N \equiv 7304 + yozx \quad \text{(Mod. 9999)}$$

de unde se deduce imediat:

$$x = 5,\ y = 2,\ z = 9.$$

3. *Dacă* N *este un număr de forma:*

$$N = 999\ldots99$$

având cel puțin 2 cifre, atunci restul diviziunii sale prin 12 este totdeauna 3.

Aplicând regula noastră, avem:

$$N \equiv 9 - 2 \cdot 9 + 4(9 + 9 + \ldots + 9) \quad \text{(Mod. 12)}$$

$$\therefore \quad N \equiv -9 \equiv 3 \quad \text{(Mod. 12)}$$

adică restul este 3.

LT. COMANDOR-AV. GR. ZAPAN
Inginer de Construcții Aeronautice
și Mecanice.

O CLASĂ DE CONSTANTE REMARCABILE

Este îndeajuns de cunoscută constanta lui EULER, $C = 0{,}577215664\ldots$, definită ca limită, pentru $n = \infty$, a expresiunii

$$C_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Îmi propun să pun în evidență, în cele ce urmează, o clasă generală de constante analoage, printre cari figurează și constanta lui EULER, definite prin proprietatea următoare:

I. **Teoremă.** *Dacă într'o serie divergentă, cu termenii pozitivi, avem neegalitatea*

$$\text{(A)} \qquad u_n > u_{n+1}\, e^{u_{n+1}},$$

expresiunea

$$\text{(B)} \qquad G_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \log u_n$$

tinde către o limită bine determinată G, *pentru* $n = \infty$.

Dacă G_n are o limită G, expresiunea e^{G_n} va avea deasemenea o limită e^G și reciproc. Ori, putem scrie

$$e^{G_n} = u_n\, e^{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} = u_n\, e^{s_n},$$

iar inegalitatea (A) arată că avem

$$u_n\, e^{s_n} > u_{n+1}\, e^{s_{n+1}}.$$

Această neegalitate arată că şirul e^{G_n} este descrescător şi cum este limitat inferior, căci termenii sunt pozitivi, urmează că va avea o limită e^G, deci G_n va avea o limită G.

Din inegalitatea (A) se deduc uşor câteva proprietăţi ale termenilor seriei divergente (u). In primul rând se vede că $u_n > u_{n+1}$, deci seria este descrescătoare, iar $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, căci altfel seria ar fi convergentă. In fine, din

$$1 = \lim \frac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant \lim e^{u_{n+1}} = e^{\lim u_{n+1}} \geqslant 1$$

se deduce $\lim u_n = 0$, condiţiuni verificate de seria armonică, ce constitue un caz particular al teoremei de mai sus, $u_n = \frac{1}{n}$.

II. **Teoremă.** *Dacă într'o serie divergentă, cu termenii pozitivi, avem neegalitatea*

$$u_n > u_{n+1} e^{u_{n+1}},$$

expresiunea

$$E_{n,\,m} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots u_m$$

are aceeaşi limită ca $\log \frac{u_n}{u_m}$, *când* m *şi* n *tind în acelaşi timp către infinit.*

Putem scrie, în adevăr

$$G_m - G_n = E_{n,\,m} + \log \frac{u_m}{u_n},$$

de unde

$$\lim (G_m - G_n) = \lim E_{n,\,m} - \lim \left(\log \frac{u_n}{u_m}\right),$$

sau, în virtutea primei teoreme,

$$\lim E_{n,\,m} = \lim \left(\log \frac{u_n}{u_m}\right).$$

Condiţiunea (A) este îndeplinită, în particular, când avem neegalitatea

(C) $$u_n - u_{n+1} \geqslant u_n u_{n+1},$$

care se deduce uşor, majorând pe $u_{n+1}\ e^{u_{n+1}}$ printr'o progresie geometrică descrescătoare cu raţia u_{n+1}.

Un exemplu remarcabil este următorul:

Expresiunea

$$\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\ldots\frac{1}{n\log n}-\log n-\log\log n$$

tinde către o limită bine determinată pentru $n=\infty$.

Alte exemple voiu da sub formă de probleme propuse.

M. GHERMĂNESCU.

ASUPRA PROBLEMEI 1402

In această problemă D-l C. ŞUŞU întreba dacă *există numere (întregi, pozitive) pentru care cubul sumei lor să fie divizibil cu suma pătratelor lor.* In vol. XVI al «G. M.», la pag. 24, sunt date *două procedee ingenioase* pentru a obţine soluţiuni, care răspund afirmativ la întrebarea limitată a problemei propuse. Ele nu constituesc o soluţiune completă a problemei. In cele ce urmează ne propunem să găsim forma numerelor X şi Y întregi şi pozitive, care răspund condiţiunii cerute, anume:

$$(X+Y)^3=n\,(X^2+Y^2). \qquad (1)$$

Inlăturând soluţiunile banale $X=Y$, vom presupune că d este cel mai mare divizor comun ai numerelor X, Y, anume, că avem: $X=dx$, $Y=dy$, unde d, x, y sunt numere întregi pozitive, iar x şi y prime între ele.

Avem atunci a rezolva în numere întregi pozitive ecuaţiunea:

$$d\,(x+y)^3=n\,(x^2+y^2). \qquad (2)$$

Scriem ecuaţiunea (2) sub forma:

$$d\,(x+y)\,[x^2+y^2+2xy]=n\,(x^2+y^2)$$

sau încă:

$$2dxy\,(x+y)=(x^2+y^2)\,[n-d\,(x+y)] \qquad (3)$$

rezultă pentru egalitate că $n>d\,(x+y)$, partea întâia a ei fiind un produs de numere pozitive.

Acum x fiind prim cu y, este asemenea prim cu $x^2 + y^2$, deci cum el trebue să dividă produsul din partea a doua, este neapărat divizor al factorului al doilea $(n - dy - d \cdot x)$, deci al lui $(n - d \cdot y)$, adică

$$\boxed{n - d \cdot y = \theta \cdot x}, \quad \theta \text{ întreg pozitiv.} \tag{4}$$

Egalitatea (3) devine :

$$2dy\,(x + y) = (\theta - d)\,(x^2 + y^2). \tag{5}$$

Asemenea y fiind prim cu x, este prim cu $(y^2 + x^2)$ deci este necesar divizor al lui $(\theta - d)$, adică :

$$\boxed{\theta - d = ty} \tag{6}$$

în urma cărei relațiuni avem :

$$2\,d\,(x + y) = t\,(x^2 + y^2). \tag{7}$$

Observăm în egalitatea (7) că al doilea produs trebue să fie divizibil cu 2, atunci avem de examinat două cazuri :

a) x şi y sunt de parități diferite, în care caz $(x^2 + y^2)$ fiind impar *2* trebue să dividă pe t; *b)* x şi y sunt de aceeaşi paritate (deci impare), în care caz $(x + y)$ fiind par primul produs este divizibil cu *4,* prin urmare şi $t\,(x^2 + y^2)$ trebue să fie divizibil cu *4,* dar

$$(2r+1)^2+(2S+1)^2=4r^2+4r+4S^2+4S+2=2\,(2r^2+2S^2+2r+2S)$$

deci şi în acest caz t trebue să fie divizibil cu 2. Punând : $t = 2\alpha'$, avem egalitatea :

$$d\,(x + y) = \alpha'\,(x^2 + y^2) \tag{8}$$

pe care punându-o sub forma :

$$x\,(\alpha' x - d) = y\,(d - \alpha' y). \tag{9}$$

Observăm că x fiind prim cu y trebue să fie divizor lui $d - \alpha' y$ adică :

$$\boxed{d - \alpha' y = \beta' x} \tag{10}$$

şi deducem din (9)

$$\boxed{\alpha' x - d = \beta' y} \tag{11}$$

Comparând (10) cu (11) şi eliminând pe d, avem:

$$\boxed{\alpha' (x - y) = \beta' (x + y)} \tag{12}$$

Să însemnăm cu k cel mai mare divizor comun al numerelor α' şi β', şi să punem: $\alpha' = k\alpha$, $\beta' = k\beta$, unde α şi β sunt numere întregi pozitive prime între ele; egalitatea (12) devine:

$$\alpha (x - y) = \beta (x + y) \tag{12'}$$

Numerele x şi y fiind prime între ele, numerele $x - y$, $x + y$ sunt prime între ele, sau au cel mult divizorul 2 (cel mai mare). In primul caz x şi y sunt de *parităţi diferite;* în al doilea caz sunt ambele *impare*. In primul caz, egalitatea (12') dă:

$$\begin{cases} x - y = \beta \\ x + y = \alpha \end{cases} \text{ din care } \begin{cases} x = \dfrac{\alpha + \beta}{2} \\ y = \dfrac{\alpha - \beta}{2} \end{cases} \quad \alpha \text{ şi } \beta \text{ prime între ele ambele impare}$$

$$d = \alpha' y + \beta' x = k(\alpha y + \beta x) = k \cdot \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2}{2} = k\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right).$$

Aşa dar, avem soluţiunea

$$\boxed{\begin{aligned} X &= k \cdot \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \\ Y &= k \cdot \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{aligned}} \tag{14}$$

unde α şi β sunt numere întregi pozitive, prime între ele, ambele impare.

Exemplu. Să luăm pentru: $a = 2m + 1$ şi $\beta = 2m - 1$, două numere consecutive impare. Avem soluţiunea:

$$\begin{cases} X = k\,2m\,(4m^2 + 1) \\ Y = k\,(4m^2 + 1). \end{cases} \tag{14'}$$

Făcând pe $m = 1$, găsim soluțiunea : $X = 10k$, $Y = 5k$, care pentru $k = 1$ este exemplul dat de D-nii : A. BELEȘ și C. BĂLTEANU.

In al doilea caz, x și y fiind ambii impari vom avea din (12') soluțiunea :

$$\begin{cases} x + y = 2\alpha \\ x - y = 2\beta \end{cases} \quad \text{deci} \quad \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases}$$ unde α și β sunt numere

întregi, pozitive, prime între ele și de parități diferite. Avem, pe lângă aceasta :

$$d = k(\alpha y + \beta x) = k(\alpha^2 + \beta^2)$$

și ca urmare soluțiunea :

$$\boxed{\begin{aligned} X &= d \,.\, x = k \,.\, (\alpha + \beta) \,.\, (\alpha^2 + \beta^2) \\ Y &= d \,.\, y = k \,.\, (\alpha - \beta) \,.\, (\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}} \,. \qquad (15)$$

Exemplu. Să luăm pentru α și β două numere consecutive oarecare : *a)* $\alpha = 2m + 1$, $\beta = 2m$ pentru care avem :

$$d = k[(2m + 1)^2 + (2m)^2] = 8m^2 + 4m + 1)\, k$$

deci :

$$\begin{cases} X = k(4m + 1)(8m^2 + 4m + 1) \\ Y = k(8m^2 + 4m + 1) \end{cases}$$

b) $\alpha = 2m$, $\beta = 2m - 1$, de unde : $d = k(8m^2 - 4m + 1)$ deci :

$$\begin{cases} X = k(4m - 1)(8m^2 - 4m + 1) \\ Y = k(8m^2 - 4m + 1). \end{cases}$$

Particularizând acum $m = 1$, avem $X = 15k$, $Y = 5k$, care pentru $k = 1$, este exemplul dat de D-l C. MIHĂESCU.

Observare. Dacă facem suma cuburilor numerelor X și Y găsite, avem :

a) Pentru soluțiunea (14)

$$X^3 + Y^3 = k^3\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^3\left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3 + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^3\right]$$

$$= k^3\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^3(\alpha^3 + 3\alpha\beta^2),$$

deci divizibilă cu suma pătratelor lor

$$X^2 + Y^2 = k^2\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2.$$

b) Pentru soluțiunea (15)

$$X^3 + Y^3 = 2k^3(\alpha^2 + \beta^2)^3(\alpha^3 + 3\alpha\beta^2)$$

care iarăși este divizibilă cu suma pătratelor:

$$X^2 + Y^2 = 2k^2(\alpha^2 + \beta^2)^3.$$

Așa dar, soluțiunile (14) și (15) răspund asemenea problemei, în care se cer numerele pentru care *suma cuburilor lor* este divizibilă cu *suma pătratelor lor.*

Ele pot fi găsite printr'o analiză mai simplă puțin ca aceea de mai sus, bazată însă pe aceleași principii.

O. N. ȚINO
Profesor.

O PROPRIETATE A UNEI FAMILII DE TRAIECTORII

Să considerăm traiectoriile pe care le descrie un punct material, în plan, asupra căruia lucrează o forță care derivă dintr'o funcțiune de forță U (x, y), condițiile inițiale fiind astfel alese, încât constanta h a forței vii să fie aceeași pentru toate traiectoriile. Se știe că ecuația unei traiectorii este

$$(1) \qquad \frac{\partial W(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = \alpha',$$

unde $w(x, y, \alpha)$ este o integrală completă a ecuației cu derivate parțiale

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 = 2[U(x, y) + h],$$

care depinde de o constantă arbitrară α, iar α' este o altă constantă arbitrară.

Vreau să demonstrez că *dacă se consideră toate traiectoriile care trec printr'un punct* M, *locul geometric al centrelor lor de curbură în punctul* M *este o dreaptă perpendiculară pe forța care trece prin punctul* M.

Observăm că W (x, y, α) fiind o integrală completă a ecuației (2), când se derivează (2) în raport cu α, se obține

$$\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\, \partial x}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\, \partial y}=0$$

și când ne deplasăm pe curba (1), avem

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\, \partial x}\partial x+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha\, \partial y}\partial y=0.$$

De unde se deduce că dealungul unei traiectorii avem

$$\frac{\partial W}{\partial y}dx-\frac{\partial W}{\partial x}dy=0. \tag{3}$$

Ecuația normalei în M (x, y) la traiectorie este deci:

$$(X-x)\frac{\partial W}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial W}{\partial y}=0.$$

Pentru a găsi coordonatele X și Y ale centrului de curbură, diferențiem această ecuație în raport cu x și y ținând seama că dx și dy sunt legate de ecuația (3). Se obține astfel o nouă ecuație

$$(X-x)\left[\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial x}\right]+(Y-y)\left[\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2$$

care se reduce ținând seama de ecuația (2), la

$$(X-x)\frac{\partial U}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial U}{\partial y}=2(U+h). \tag{4}$$

Ecuația aceasta fiind independentă de α și de α', se deduce că pentru toate traiectoriile cari trec prin același punct M (x, y), centrul de curbură se găsește pe dreapta (4), perpendiculară pe forța F din M, și la distanța $\frac{2(U+h)}{F}$ de punctul M.

Voiu da în altă parte o demonstrație elementară a acestei proprietăți însoțită de câteva aplicațiuni interesante.

D. V. IONESCU
Profesor la Facultatea de Științe
din Cluj.

ASUPRA UNOR INTEGRALE

In nota «Asupra unor integrale» din G. M., (Vol. XXXVI, pagina 23), D-l M. GHERMĂNESCU încearcă să calculeze *direct* o clasă de integrale considerate de mine, într'un articol din G. M., (Vol. XXXIV, pag. 55).

Calculul ce face D-l M. GHERMĂNESCU are nevoie de următoarea completare :

D-l M. GHERMĂNESCU își propune să calculeze integrala

$$y_1 + iz_1 = \int_0^\infty e^{-au^n}\, du,$$

unde

$$a = \frac{1}{n} - ix,$$

x fiind real, iar n fiind un număr pozitiv.

In acest scop D-l M. GHERMĂNESCU schimbă variabila u, punând

$$v = au^n$$

și deduce

$$y_1 + iz_1 = \frac{1}{n\sqrt[n]{a}} \int_0^\infty e^{-v} v^{\frac{1}{n}-1}\, dv.$$

Această formulă pe care o stabilește D-l GHERMĂNESCU numai făcând schimbarea de variabilă nu este exactă, deoarece când variabila u parcurge axa Ox a numerelor reale dela zero la $+\infty$, variabila v, complexă (din cauza lui a), descrie o semidreaptă ON care face cu axa Ox, unghiul α egal cu argumentul numărului complex a, n fiind pozitiv, α va fi cuprins între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$.

Prin urmare schimbarea de variabilă dă egalitatea :

$$y_1 + iz_1 = \frac{1}{n\sqrt[n]{a}} \int_{(ON)} e^{-v} v^{\frac{1}{n}-1}\, dv.$$

Totuşi rezultatul final al notei D-lui M. GHERMĂNEBCU este exact şi aceasta este datorit faptului că există egalitatea

$$(E) \qquad \int_{(ON)} e^{-v}\, v^{\frac{1}{n}-1}\, dv = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Formula (E) este o proprietate a funcţiunei $\Gamma(x)$.

Rămâne deci de dovedit egalitatea (E). Aceasta se face pe două căi: 1^0. Se calculează y_1 şi z_1 rămânând în domeniul numerelor reale, cum de exemplu am procedat eu, şi apoi se verifică egalitatea (E), sau:

2^0. Se dovedeşte egalitatea (E) cu ajutorul variabilei complexe. Voiu schiţa numai raţionamentul ce trebue făcut.

Se consideră domeniul cuprins între dreptele Ox şi ON şi două arcuri de cerc, unul de rază infinit mică şi altul de rază infinit mare. In acest domeniu funcţiunea

$$g(z) = e^{-z}\, z^{\frac{1}{n}-1},$$

este helomorfă.

După teorema lui CAUCHY avem

$$\int_{\Gamma} g(z)\, dz = 0,$$

Γ fiind conturul domeniului definit mai sus. Făcând ca una din razele cercurilor să tindă către zero şi cealaltă către infinit, şi observând că integralele luate dealungul arcelor de cerc respective tind către zero, deducem că

$$\int_0^{\infty} g(z)\, dz = \int_{(ON)} g(z)\, dz,$$

adică se conchide formula (E).

Dar se observă că raţionamentul dela No. 2^0 nu este altceva decât calculul integralelor y_1 şi z_1 cu ajutorul teoriei reziduurilor, ce se găseşte citat în articolul meu.

TH. ANGHELUŢĂ.

ASUPRA FASCICOLELOR DE CERCURI

1°. Să considerăm două cercuri (O′) şi (O″) şi un cerc (O) din fascicolul lor linear. Printr'un punct F curent, al lui (O), ducem la cele două cercuri tangentele F G'_i şi F G''_i ($i = 1,2$).

Intre contactele G'_i şi G''_j avem o corespondenţă în aparenţă de natura (4,4) care, în realitate, se descompune în două corespondenţe de natura (2,2). Cele 4 perechi G'_i G''_j se desfac în grupe de câte două, fiecare din grupe conţinând perechi, omoloage numai într'una singură din corespondenţele (2,2):

$$\Phi \begin{cases} G'_1\ G''_1 \\ G'_2\ G''_2 \end{cases} \qquad \bar{\Phi} \begin{cases} G'_1\ G''_2 \\ G'_2\ G''_1 \end{cases}$$

Analiticeşte, descompunerea corespondenţei (4,4) în corespondenţele Φ şi $\bar{\Phi}$ de natura (2,2), rezultă imediat. Atât punctele G'_i cât şi punctele G''_i depind de o aceeaşi iraţională.

$$\sqrt{(f-a_1)\ (f-a_2)\ (f-a_3)\ (f-a_4)},$$

unde f e parametrul raţional al lui F pe cercul (O) iar a_i ($i = 1,2,3,4$), parametrii pe acelaşi cerc (O) ai intersecţiilor, — inclusiv punctele absolute, — cercurilor date (O′) şi (O″).

2°. Corespondenţele Φ au fost cercetate întâiu de CAYLEY (*Philosophical Transactions,* 1861), din punctul de vedere transcendent. CAYLEY extinde cu ajutorul lor teorema de închidere a lui PONCELET dela 2 conice, la n conice în fascicol. Mai de curând, d. H. LEBESGUE (*Annales de la Faculté de Toulouse,* 1921) a reluat cercetarea lui CAYLEY prin mijloace geometrice. Evident, studiul corespondenţelor Φ e punctul de plecare al consideraţiilor d. LEBESGUE.

Domnia-sa stabileşte acest criteriu, strict proiectiv, pentru a recunoaşte că punctele de contact ale tangentelor duse prin două puncte F şi $\mathfrak{F}$ de pe cercul (O) la cercurile (O′) şi (O″) aparţin uneia singure din corespondenţele Φ şi $\bar{\Phi}$: *dacă* G′G″ *şi* $\mathfrak{G}'\mathfrak{G}''$ *sunt punctele de contact, trebue şi e suficient ca dreptele* G′ $\mathfrak{G}'$, G″$\mathfrak{G}''$, F$\mathfrak{F}$ *să fie concurente.*

Intr'o lucrare mai mare, nepublicată, am stabilit o teorie generală a corespondenţelor (2,2) pe contururile a două conice şi

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIUNII SIBIIU

am arătat legătura ei cu *tetraedrele desmice* ale lui E. STUDY. In ceeace privește corespondențele speciale Φ, am demonstrat o teoremă care le sporește interesul:

Singurele corespondențe (2, 2) dintre două conice, ale căror perechi omoloage se grupează câte două

$$G'_1 \quad G''_1$$
$$G'_2 \quad G''_2,$$

prin proprietatea de a avea tangentele concurente, sunt corespondențele Φ *și corespondențele banale, în care punctul* F *e constrâns să rămână pe o dreaptă.*

3°. Din această lucrare extrag aici anume proprietăți metrice ale corespondențelor Φ, relative la două cercuri și le demonstrez elementar. Ele pot înlocui cu avantagiu criteriul d. LEBESGUE pentru recunoașterea perechilor aceleeași corespondențe Φ. In orice caz, proprietățile de mai jos, formează un complement important și firesc la teoria elementară a două cercuri, căci corespondențele Φ conțin drept cazuri singulare celebrele corespondențe (1, 1) pe care STEINER întemeia soluțiile problemelor de contact: corespondențele de *puncte omoloage* și *antiomoloage.*

Intr'adevăr, în cazul când cercul (O) se descompune în axul radical completat cu dreapta dela infinit, corespondențele Φ și $\overline{\Phi}$ se descompun în câte o corespondență omologică și o corespondență antiomologică.

* * *

4°. In tot ceea ce urmează numim „axă" o perpendiculară pe linia centrelor O'O''. Fie Δ o asemenea axă; C, piciorul ei; E' și E'' intersecțiile a două tangente FG' și FG'', duse printr'un punct F la cercurile (O') și (O''), cu axa; R' și R'' razele cercurilor.

Demonstrăm următoarea:

Lemmă. *Dacă* D' *și* D'' *sunt proiecțiile lui* F *pe axa* Δ, *sub unghiuri* ω' *și* ω'' *direct egale cu*

$$(1) \qquad \omega' = \widehat{FO'E'} \quad , \quad \omega'' = \widehat{FO''E''},$$

avem relațiile

$$(2) \qquad FG' = \frac{R'}{O'C} \cdot D'C \quad , \quad FG'' = \frac{R''}{O''C} \cdot D''C.$$

E deajuns să stabilim prima relație.

In virtutea felului cum a fost construit punctul D', patrulaterul O'D'FE' rezultă inscriptibil. Deci unghiurile

$$\widehat{O'D'E'} = \widehat{O'FE'}$$

sunt egale, ceea ce aduce asemănarea triunghiurilor dreptunghice O'D'C și O'FG'. Proporționalitatea dintre laturi dă prima din relațiile (2).

5°. **Teoremă.** *Locul geometric al punctelor* F *prin care se pot duce la cercurile* (O') și (O'') *o pereche de tangente* FG' și FG'' *„segmentate echiunghiular" de axa* Δ, *e un cerc* (O) *din fascicolul lor linear.*

Zicem că tangentele FG' și FG'' sunt „echiunghiular segmentate" de axa Δ, când segmentele FE' și FE'' determinate pe aceste tangente de Δ se văd din centrele O' și O'' sub unghiuri direct egale:

$$(1') \qquad \widehat{FO'E'} = \widehat{FO''E''}.$$

Comparând cu (1), conchidem

$$\omega' = \omega'' = \omega.$$

Așa dar cele două proiecții D' și D'' ale punctului F pe axa Δ, sub unghiurile ω' și ω'' coincid:

$$D' \equiv D'' \equiv D.$$

Relațiile (2) devin atunci

$$FG' = \frac{R'}{O'C} \cdot DC \quad , \quad FG'' = \frac{R''}{O''C} \cdot DC$$

de unde, prin împărțire

$$(2') \qquad FG' : FG'' = \frac{R'}{R''} \cdot \frac{O'C}{O''C} = \text{Ctă},$$

ceea ce arată că locul geometric al lui F e un cerc din fascicolul linear al lui (O'), (O''). In cazul când C, piciorul axei Δ, coincide cu unul sau altul din centrele de similitudine S_1 sau S_2, cercul (O) se descompune în axul radical completat cu dreapta dela infinit, căci raportul de puteri din (2') devine egal cu 1.

6⁰. **Lemmă.** *Fiind dată o pereche arbitrară de tangente* FG′, FG″ *la cercurile* (O′) şi (O″), *există o singură axă* Δ *care le segmentează echiunghiular.*

Intr'adevăr, două puncte E′ şi E″ mobile pe FG′ şi FG″, în condiţiunile (1′), descriu evident două diviziuni perspective. Deci dreapta E′E″ trece printr'un punct fix, care se vede uşor că nu e la infinit. Deci există o singură dreaptă E′E″ perpendiculară pe linia centrelor O′O″.

Iată o altă demonstraţie, mai elementară (cel puţin în aparenţă):

In virtutea lui (1′), dreptele O′E′ O″E″ se taie într'un punct H pe cercul O′F, O″ care întâlneşte a doua oară pe FG′ şi FG″ în P′ şi P″. Din exagonul lui PASCAL P′F P″ O′ HO″ rezultă că E′E″ trece prin intersecţia M a dreptelor (în general neparalele) O′P′, O″P″. Deci axa căutată Δ e perpendiculara dusă din M pe O′O″.

7⁰. **Teoremă reciprocă.** *Cele 4 tangente duse printr'un punct* F *la cercurile* (O′) *şi* (O″) *se despart în două grupe de perechi complimentare.*

$$\Phi \begin{cases} FG'_1, FG''_1 \\ FG'_2, FG''_2 \end{cases} \qquad \bar{\Phi} \begin{cases} FG'_1, FG''_2 \\ FG'_2, FG''_1 \end{cases}$$

Perechile din aceeaşi grupă admit aceeaşi axă de segmentare echiunghiulară. Cele două axe rămân fixe, când F *se mişcă pe cercul din fascicolul linear* (O′), (O″), *care trece prin acest punct.*

Axele Δ *şi* $\bar{\Delta}$ *împart armonic linia centrelor. Picioarele lor* C *şi* $\bar{C}$ *se găsesc la intersecţia liniei centrelor cu cercurile* G'_i G''_j Q, *unde* Q *e proiecţia lui* F *pe* O′O″.

Insemn cu M_{ij} ($i, j = 1, 2$) punctele comune ale perechilor de drepte O″P'_i, O′P''_j ($i, j = 1, 2$), — în care P_i şi P''_j sunt intersecţiile tangentelor FG'_i şi FG''_j cu cercul O′FO″. — Avem:

$$\overset{\frown}{P'_1 FO'} = \overset{\frown}{P'_2 FO'} \quad , \quad \overset{\frown}{P''_1 FO''} = \overset{\frown}{P''_2 F''},$$

de unde, prin măsuri de unghiuri:

$$\overset{\frown}{P'_1 O''O'} = \overset{\frown}{P'_2 O''O'} \quad , \quad \overset{\frown}{P''_1 O'O''} = \overset{\frown}{P''_2 O'O''}.$$

Deci dreptele $O''P'_i$, deoparte, şi $O'P''_j$, de alta, sunt simetrice faţă de $O'O''$, încât intersecţiile M_{11}, M_{22} şi M_{12}, M_{21} sunt aşezate pe câte o axă Δ şi $\bar{\Delta}$.

Conform lemmei precedente, aceste drepte sunt chiar axele de segmentare echiunghiulară ale perechilor Φ şi $\bar{\Phi}$. Din patrulaterul complet $O'O''$ M_{11} M_{12} M_{22} M_{21}, se vede că picioarele C şi $\bar{C}$ ale lui Δ şi $\bar{\Delta}$ împart armonic linia centrelor.

Ultima proprietate se dovedeşte uşor, printr'un calcul de unghiuri vectore. Fie G'_i, G''_i o pereche oarecare din grupa Φ. Din patrulaterele inscriptibile $O'G'_iQF$ şi $O'G'_iCE'_i$ scoatem

$$\overline{G_iQC} = \overline{E'_iFO'},$$

$$\overline{QCG'_i} = \overline{O'E'_iF},$$

de unde prin adunare

$$\overline{CG_iQ} = \overline{FO'E'_i}. \tag{3}$$

La fel, găsim

$$\overline{CG''_iQ} = \overline{FO''E''_i}. \tag{4}$$

Dar Δ e axa de segmentare echiunghiulară a perechii FG'_i, FG''_i. Prin urmare, unghiurile din membrul al doilea în (3) şi (4) sunt egale. Rezultă

$$\overline{CG'_iQ} = \overline{CG''_iQ},$$

ceeace înseamnă că axa $O'O''$ e tăiată a doua oară de cercul $G'_iG''_iQ$ în piciorul C al axei Δ.

Toate proprietăţile din această teoremă sunt, în realitate, criterii metrice pentru a distinge perechile corespondenţei Φ de perechile corespondenţei $\bar{\Phi}$. Ele pot înlocui câteodată criteriul proiectiv al d-lui LEBESGUE.

8°. **Teoremă.** *Fie* V, W *punctele lui* PONCELET *ale perechii de cercuri* (O'), (O'') *şi* Θ, $\bar{\Theta}$ *conjugatele armonice ale axelor precedente* Δ, $\bar{\Delta}$, *faţă de segmentul* VW. *Insemnăm cu* $\mathcal{E}'_i$ *şi* $\mathcal{E}''_j$ *intersecţiile tangentelor din grupa* Φ *(sau* $\bar{\Phi}$*) respectiv cu noua axă* Θ *(sau* $\bar{\Theta}$*). Dacă* $\mathcal{A}'_i$, $\mathcal{A}''_j$ *şi* $\mathcal{B}'_i$, $\mathcal{B}''_j$ *sunt intersec-*

ţiile aceloraşi tangente cu tangentele în punctele de tăiere $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *ale celor două cercuri, rapoartele anarmonice*

$$(5) \qquad (\mathcal{F}\mathcal{E}'_i\ \mathcal{A}'_i\mathcal{B}'_i) = (\mathcal{F}\mathcal{E}''_j\ \mathcal{A}''_j\mathcal{B}''_j)$$

rămân egale, când $\mathcal{F}$ *descrie cercul* (O) *care trece prin* $\mathcal{F}$ *al fascicolului linear* (O'), (O'').

Intr'adevăr, teorema dela alineatul 7° poate lua foarte uşor forma proiectivă, exprimând unghiul cu ajutorul raportului anarmonic, aşa cum învaţă teorema lui LAGUERRE. Dacă $\Omega'_i, \bar{\Omega}'_i$ şi $\Omega''_j, \bar{\Omega}''_j$ sunt intersecţiile tangentelor FG'$_i$ şi FG''$_j$ cu isotropele lui O' şi O'', egalitatea de unghiuri care exprimă segmentarea egală revine la

$$(6) \qquad (FE'_i\Omega'_i\bar{\Omega}'_i) = (FE''_j\Omega''_j\bar{\Omega}''_j)\ .$$

Fie w perpendiculara în W pe linia centrelor. Omologia de centru V şi de axă w permută punctele absolute Ω, $\bar{\Omega}$ cu celelalte puncte fixe $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ale fascicolului linear (O'), (O''). Fiecare cerc al fascicolului rămâne neschimbat prin omologie. Pe de altă parte, e clar că axa Δ se înlocueşte cu axa Θ. Dacă $\mathcal{F}$ e transformatul lui F, rezultă că relaţiunea (6) se transformă prin omologie într'o relaţiune de forma (5).

Rămâne însă îndoiala, dacă nu cumva prin omologie corespondenţele Φ şi $\bar{\Phi}$ se permută între ele. Vom arăta că, dinpotrivă, aceste corespondenţe rămân invariante, în parte. Intr'adevăr, luând punctul F pe axa w e clar că $\mathcal{F} \equiv$ F. Prin urmare tangentele (distincte între ele) FG'$_i$ deoparte şi FG''$_j$ de alta, se permută între ele. Deci perechea G'$_1$, G''$_1$, de exemplu, e înlocuită cu G'$_2$, G''$_2$; prin urmare nu-şi schimbă corespondenţa.

Teoremele 7° şi 8° luate împreună arată că *unui cerc* (O) *din fascicolul linear* (O'), (O'') *i se asociază patru axe* Δ, $\bar{\Delta}$ *de „segmentare echiunghiulară" şi două axe*: Θ, $\bar{\Theta}$ *de „segmentare echiproiectivă". Axele* Δ, Θ *sunt legate de corespondenţa* Φ, *pe când* $\bar{\Delta}$, $\bar{\Theta}$, *de corespondenţa* $\bar{\Phi}$, — *ceea ce constitue un mijloc de a distinge între perechile omoloage ale fiecărei corespondenţe.*

D. BARBILIAN.

OBSERVAȚIE ASUPRA ECUAȚIILOR ALGEBRICE AVÂND TOATE RĂDĂCINILE REALE

Fie

$$(1) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_n = 0$$

o ecuație algebrică de gradul n cu toate rădăcinile reale. Fie

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n$$

aceste rădăcini, presupuse nu toate egale. Vom zice că *rădăcinile formează un șir convex* dacă

$$x_2 - x_1 \leqslant x_3 - x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n - x_{n-1}.$$

In acest caz putem scrie

$$x_i = x_1 + (i-1)\, h_1 + (i-2)\, h_2 + \ldots + h_{i-1}\ , \quad i = 2,\ 3,\ .\ ,\ .\ ,\ n$$

unde $$h_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n-1.$$

Dacă determinăm pe x_1 astfel ca să avem

$$a_1 = -\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

obținem făcând calculele

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{j=i}^{n-2} \sum_{r=j}^{n-1} \gamma\, A_{i,j,r}\, h_i\, h_j\, h_r$$

unde γ este egal cu 1, 3 sau 6 după cum indicii $i,\ j,\ r$ sunt toți egali, doi dintre ei distincți sau diferiți între ei, iar coeficienții

$$A_{i,j,r} = \frac{(n-r)\,(n-r+1)}{12\,n^2}\,[3i\,(i-1)\,(n-j)\,(n-j+1)$$

$$+ n^2\,(r-j)\,(r-j-1) + n\,(j-i)\,(i+j-1)\,(2n+r-3j+1)$$

$$+ 2nj\,(r-j)\,(n-j+1)]$$

$$i \geqslant j \geqslant r\ , \quad A_{1,1,1} = 0,$$

sunt toți pozitivi.

Dacă $a_1 = 0$, avem neapărat

$$a_2 < 0 \text{ și } \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = -3a_3.$$

Printr'o transformare de forma $x \mid x + \alpha$ putem face totdeauna să dispară coeficientul a_1. Pe de altă parte o astfel de transformare nu influenţează faptul că rădăcinile formează un şir convex. Să mai observăm că pentru ecuaţia de gradul al treilea în care $a_1 = 0$ condiţia $a_3 \leqslant 0$ e necesară şi suficientă pentru ca rădăcinile să formeze un şir convex. Avem aşa dar următoarele proprietăţi:

Dacă rădacinile (nu toate egale) *ecuaţiei (1) formează un şir convex şi dacă* $a_1 = 0$, *avem* $a_2 < 0$, $a_3 \leqslant 0$.

Dacă rădăcinile (nu toate egale) *ecuaţiei (1) formează un şir convex, avem*

$$(2) \quad (n-1)\,a_1^2 - 2n a_2 > 0, \quad (n-1)(n-2)\,a_1^3 - 3n(n-2)\,a_1 a_2 + 3n^2 a_3 \leqslant 0.$$

Egalitatea nu e posibilă decât în cazul când rădăcinile sunt echidistante.

Dacă rădăcinile ecuaţiei (1) formează un şir convex, cele trei rădăcini ale ecuaţiei derivate de ordinul $n - 3$ *formează şi ele un şir convex.*

Dacă

$$x_2 - x_1 \geqslant x_3 - x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n - x_{n-1},$$

zicem că *rădăcinile formează un şir concav.*

Avem şi în acest caz proprietăţi analoage. Inegalitatea a doua din formula (2) îşi schimbă sensul, egalitatea fiind încă adevărată numai dacă rădăcinile sunt echidistante. Rădăcinile ecuaţiei derivate de ordinul $n - 3$ formează un şir concav.

TIBERIU POPOVICIU.

O CLASĂ SPECIALĂ DE FUNCŢIUNI PERIODICE

1. Vom zice că o funcţiune $f(x)$, uniformă şi mărginită în orice interval mărginit, are un *centru* în punctul $x = x_0$, dacă avem

$$(1) \qquad f(x_0 + h) = f(x_0 - h)$$

oricare ar fi h. O funcţiune cu un centru se reduce, prin substituţia $x - x_0 = X$, la o funcţiune pară. Reciproc, o funcţiune pară admite origina ca centru.

Centrul unei funcţiuni cu derivată continuă este neapărat un *extrem* (maxim sau minim) al acestei funcţiuni.

2. **Teoremă.** *O funcţiune cu două centre este o funcţiune periodică.*

Să presupunem că există două puncte x_0 şi x_1, astfel încât să avem relaţia (1) plus următoarea

$$f(x_1 + k) = f(x_1 - k), \tag{2}$$

oricare ar fi h şi k. Punând $x_1 - x_0 = \delta$, avem, graţie formulei (2),

$$f(x_0 - h) = f(x_1 - \delta - h) = f(x_1 + \delta + h) = f(x_0 + h + 2\delta),$$

de unde, prin comparaţie cu (1), şi punând $x_0 + h = x$,

$$f(x) = f(x + 2\delta).$$

Prin urmare $f(x)$ este periodică, de perioada 2δ.

Corolar. *Dacă o funcţiune are două centre, ea are o infinitate de centre.* Aceste centre sunt date de formula $x = x_0 + n\delta$, unde n este un număr întreg.

3. Dacă există un punct ξ_0 astfel încât să avem, oricare ar fi h,

$$f(\xi_0 + h) = -f(\xi_0 - h), \tag{3}$$

vom zice că $f(x)$ posedă un *anticentru* în punctul ξ_0. Anticentrul unei funcţiuni *continui* este neapărat un *zero* al acestei funcţiuni.

Se poate arăta, ca mai sus, că *o funcţiune cu două anticentre admite o infinitate de anticentre şi este o funcţiune periodică.*

4. **Teoremă.** *O funcţiune cu un centru şi un anticentru este periodică.*

Fie, respectiv, x_0 şi ξ_0 centrul şi anticentrul funcţiunii $f(x)$. Notând cu x_1 simetricul punctului x_0 faţă de ξ_0, avem

$$f(x_0+h) = f[\xi_0 - (\xi_0 - x_0 - h)] = -f[\xi_0 + (\xi_0 - x_0 - h)] = -f(x_1 - h),$$

$$f(x_0 - h) = f[\xi_0 - (\xi_0 - x_0 + h)] = -f[\xi_0 + (\xi_0 - x_0 + h)] = -f(x_1 + h),$$

de unde

$$f(x_1 - h) = f(x_1 + h).$$

Deci x_1 este un centru şi, în virtutea teoremei dela No. 2, $f(x)$ este periodică, de perioadă $2 \mid x_1 - x_0 \mid$.

Rezultă încă de aici că $f(x)$ posedă o infinitate de centre şi de anticentre, alternând la distanţe egale. In sfârşit, se mai poate vedea că $f(x)$ posedă o *semi-perioadă* egală cu $\mid \xi_0 - x_0 \mid = \delta$, adică avem

$$f(x) + \delta) = - f(x),$$

oricare ar fi x.

5. Consideraţiile de mai sus se pot extinde la funcţiuni de mai multe variabile. Fie, de ex., $f(x, y)$ o funcţiune mărginită în orice domeniu mărginit. Un punct P_0 este un *centru* pentru această funcţiune, dacă valoarea funcţiunii într'un punct oarecare este egală cu valoarea ei în simetricul acestui punct faţă de P_0.

In mod analog se defineşte şi *anticentrul.*

Teoremă. *O funcţiune $f(x, y)$ cu trei centre nu în linie dreaptă este dublu periodică.*

Fie P_1, P_2, P_3 cele trei centre. Este suficient să arătăm că $f(x, y)$ este periodică pe orice paralelă la una din laturile triunghiului $P_1P_2P_3$. Fie (D) o paralelă la P_1P_2, A un punct arbitrar al acestei drepte, A' simetricul său faţă de P_1, B simetricul lui A' faţă de P_2. Punctul B se află pe (D), la distanţa constantă $2\,\overline{P_1P_2}$ de A. Prin ipoteză avem

$$f(A) = f(A') = f(B),$$

deci f admite pe dreapta (D) perioada $2\,\overline{P_1P_2}$. La fel se arată că f este periodică de perioadă $2\,\overline{P_2P_3}$ pe orice paralelă la P_2P_3. Deci f este dublu periodică.

La fel se arată că o funcţiune cu două centre şi un anticentru, sau un centru şi două anticentre, sau trei anticentre, nu în linie dreaptă, este dublu periodică.

De observat că stabilirea tuturor proprietăţilor de mai sus nu a cerut continuitatea funcţiunilor despre care s'a tratat.

MIRON NICOLESCU
Profesor la Universitatea
din Cernăuţi.

MEDII DEFINITE PRIN OPERAȚIA DE MEDIAȚIE ARITMETICA ASUPRA ARGUMENTELOR UNOR FUNCȚIUNI

Interesul pe care l-a trezit problema ce am propus sub No. 4217 în G. M. Vol. XXXVIII, p. 199, (vezi nota D-lui I. IONESCU în G. M. XXXIX, p. 404), m'au îndemnat încă de pe atunci să dau explicații mai ample celor ce au voit să se intereseze de această problemă, care, cum se va vedea, nu este izolată ci se integrează într'o metodă generală de generare de astfel de medii. Profit de jubileul «Gazetei» ca să expun pe scurt această metodă, care, elementară fiind, are totuși rădăcini mai adânci în Analiza matematică.

Fie $y = f(x)$ o funcțiune pozitivă definită pentru $l_1 \leqslant x \leqslant l_2$ și $0 \leqslant L_1 \leqslant y \leqslant L_2$. Să considerăm două valori ale funcțiunii $f(x)$, fie ele: $f(x_1) = a$ și $f(x_2) = b$, precum și valoarea:

$$(1) \qquad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Ori de câte ori putem să exprimăm acest număr cu ajutorul lui $f(x_1) = a$ *și* $f(x_2) = b$, *oricare ar fi* x_1 *și* x_2, *numim acest număr media relativă la* f, *a numerelor* a *și b*. Este evident că putem considera valoarea (1) și în cazul când această exprimare nu se poate face ca medie a numerelor *a* și *b* relativă la *f*, dar ne interesează anumite expresii analitice ce putem ataşa numerelor *a* și *b*. Iată în ce caz se poate face această exprimare a expresiei (1).

Să presupunem că $f(x)$ satisface la o *teoremă de adiție* de forma:

$$(2) \qquad f(x + y) = F[f(x), f(y)],$$

F (X, Y) fiind o funcție definită pentru

$$L_1 \leqslant X \leqslant L_2 \ , \ L_1 \leqslant Y \leqslant L_2 ,$$

și că ecuația:

$$(3) \qquad F(X, X) = a$$

poate să fie rezolvată, și fie $X = \varphi(a)$ soluția ce convine.

Atunci expresia (1) se poate scrie:

$$(4)\quad f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=F\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right),f\left(\frac{x_2}{2}\right)\right]=F\left[\varphi(a)\ ,\ \varphi(b)\right].$$

Tot astfel putem defini medii relative la f, pentru 3, 4 numere, dacă ecuațiile analoage cu (3) pot fi rezolvate. In adevăr, dacă $f(x)$ satisface la ecuația (2) avem și:

$$(5)\quad f(x+y+z)=F\left[f(x)\ ,\ f(y+z)\right]$$
$$=F\left\{f(x)\ ,\ F\left[f(y)\ ,\ f(z)\right]\right\}=\Phi(X,\ Y,\ Z)$$

unde

$$X=f(x)\ ,\ Y=f(y)\ ,\ Z=f(z).$$

Fie numerele:

$$a=f(x_1)\ ,\ b=f(x_2)\ ,\ c=f(x_3)$$

și media lor:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)=\Phi\left[f\left(\frac{x_1}{3}\right)\ ,\ f\left(\frac{x_2}{3}\right),f\left(\frac{x_3}{3}\right)\right].$$

Dacă $\psi(a)$ este rădăcina ecuației:

$$\Phi(X,\ X,\ X)=a$$

atunci avem că media de mai sus se poate scrie sub forma:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)=\Phi\left[\psi(a)\ ,\ \psi(b)\ ,\ \psi(c)\right].\quad \text{ș. a. m. d.}$$

Să considerăm câteva exemple:

1°. $f(x)=x$ avem *media aritmetică:* $A=\dfrac{a+b}{2}$.

2°. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se obține imediat *media armonică:* $H=\dfrac{2ab}{a+b}$

3°. $f(x)=A^x$ $(A>0)$ obținem *media geometrică:* $G=\sqrt{ab}$

4°. $f(x)=\operatorname{tg}x$ caz considerat în problema 4217 și care duce la ceeace am numit *media tangențială:* $T(a,\ b)=\operatorname{tg}\dfrac{x_1+x_2}{2}$, dacă punem $a=\operatorname{tg}x_1$, $b=\operatorname{tg}x_2$. Dacă a și b sunt pozitivi, $T(a,\ b)$ este rădăcina pozitivă a ecuației:

$$\frac{2X}{1-X^2}=\frac{a+b}{1-ab}\ ,\ \text{deci}\ T=\frac{ab-1+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}}{a+b}.$$

Dacă considerăm trei valori: $a = \operatorname{tg} x_1$, $b = \operatorname{tg} x_2$, $c = \operatorname{tg} x_3$ şi media lor: $T(a, b, c) = \operatorname{tg} \dfrac{x_1 + x_2 + x^3}{3}$, $T(a, b, c)$ este rădăcină a ecuaţiei de gradul trei:

$$\frac{3X - X^3}{1 - 3X^2} = \frac{a + b + c - abc}{1 - (ab + bc + ca)} .$$

O discuţie simplă arată care din cele trei rădăcini convine. Dacă luăm $f(x) = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ obţinem ceeace putem numi *media tangenţială iperbolică* a două numere a, b cuprinse între 0 şi 1.

Cum în acest caz relaţia (2) este:

$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$$

această medie, rădăcină a ecuaţiei:

$$\frac{2X}{1 + X^2} = \frac{a + b}{1 + ab}$$

are ca expresie:

$$(6) \qquad \mathcal{T} = \frac{1 + ab - \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}}{a + b} .$$

5°. Să luăm $f(x) = \sin x$ şi două numere $a = \sin x_1$, $b = \sin x_2$ cuprinse între 0 şi 1. Fie: $S(a, b) = \sin \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Se găseşte uşor că:

$$(7) \qquad S(a, b) = \frac{\sqrt{(1 + a)(1 + b)} - \sqrt{(1 - a)(1 - b)}}{2},$$

putem numi această expresie *media sinusoidală* a celor două numere şi are un sens oricare ar fi numerele cuprinse între — 1 şi + 1.

Dacă am lua $f(x) = \cos x$ găsim aceeaşi expresie ca mai sus.

6°. Pentru a şi b mai mari ca 1 putem defini o expresie analoagă luând $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Ţinând seamă că în acest caz formula (2) este:

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \sqrt{(\operatorname{ch}^2 x - 1)(\operatorname{ch}^2 y - 1)}$$

obţinem media *sinusoidală iperbolică:*

$$(8) \qquad C(a, b) = \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)} + \sqrt{(a-1)(b-1)}}{2}.$$

Intre aceste diverse medii se pot stabili relaţii de inegalitate, aşa cum se vede de ex. din chiar problema 4217, dar las pe seama corespondenţilor să stabilească direct diverse inegalităţi între mediile ce am definit mai sus.

NICOLAE CIORĂNESCU.

O GENERALIZARE A FORMULEI LUI LEIBNITZ

1°. Binomul lui NEWTON:

$$(1) \qquad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \, a^{n-i} \, b^i$$

este generalizat de formula:

$$(2) \quad (a_1 + a_2 + \ldots + a_p)^n = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p} \frac{n!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_p!} a_1^{x_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_p^{\alpha_p}$$

unde $$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n.$$

2°. Derivata de ordinul n a funcţiunii $y = u \cdot v$ este dată de formula lui LEIBNITZ:

$$(3) \qquad (uv)^{(n)} = \Sigma \, C_n^i \, u^{(n-i)} \, v^{(i)}$$

care prezintă analogii cu formula binomului. Această formulă poate fi generalizată de o alta, ce prezintă analogii cu formula (2):

$$(4) \quad (u_1 \cdot u_2, \ldots u_p)^{(n)} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p} \frac{n!}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_p!} u_1^{(\alpha_1)} \cdot u_2^{(\alpha_2)} \ldots u_p^{(\alpha_p)}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ variază astfel că $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$, iar în fiecare termen figurează toate funcţiunile u_i nederivate, sau derivate

un număr de ori indicat de indicele α. Demonstrația se face din aproape în aproape

$$(u_1 . u_2, \ldots u_p)' = u_1 u_2 \ldots u_p \left(\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \ldots + \frac{u'_p}{u_p} \right).$$

A calcula pe $(u_1 . u_2 \ldots u_p)''$ revine la a înmulți simbolic cu expresia $(u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_p)$. Se ajunge astfel la concluzia că coeficienții formulei (4) sunt identici cu coeficienții formulei (2).

3⁰. *Aplicație.* Să considerăm funcțiunea :

$$y = (x-a)^n (x-a)^n \ldots . (x-a)^n = (x-a)^{pn}.$$

Calculând derivata $(n) - a$ după formula (4)

$$y^{(n)} = n! (x-a)^{(p-1)n} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p} C_n^{\alpha_1} C_n^{\alpha_2} \ldots C_n^{\alpha_p} .$$

Derivând direct obținem :

$$y^{(n)} = n! \, C_{pn}^n (x-a)^{(p-1)n}.$$

Deducem formula :

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p} C_n^{\alpha_1} C_n^{\alpha_2} \ldots C_n^{\alpha_p} = C_{pn}^n \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n)$$

formulă găsită mai de mult de D-l TIB. POPOVICIU *) pe o altă cale.

In particular avem cunoscuta formulă :

$$1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n .$$

Corespondenții noștri pot stabili pe cale analoagă formula mai generală *) :

$$\sum_{\alpha, \beta \ldots \lambda} C_a^{\alpha} C_b^{\beta} \ldots C_l^{\lambda} = C_{a+b+\ldots+l}^n$$

unde $a, b, \ldots l$ sunt numere constante, iar $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ variabile, suma lor rămânând însă fixă și egală cu n.

N. BOTEA.

---

*) T. POPOVICIU. Asupra coeficienților binomiali. „Rev. Mat. din Timișoara". An. V, pag. 99.

ASUPRA FUNCȚIILOR LUI BESSEL

Să considerăm funcția generatoare a funcțiunilor lui BESSEL:

$$(1) \qquad e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x),$$

cu ajutorul căreia putem scrie desvoltarea

$$(2) \quad e^{\frac{x_1}{2}\left(t_1-\frac{1}{t_1}\right)+\frac{x_2}{2}\left(t_2-\frac{1}{t_2}\right)+\ldots+\frac{x_p}{2}\left(t_p-\frac{1}{t_p}\right)}$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \ldots t_p^{np} J_{n_1}(x_1) J_{n_2}(x_2) \ldots J_{n_p}(x_p).$$

Inlocuind aci pe t_k prin ut_k avem

$$(3) \quad e^{\frac{u}{2}(x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_p t_p) - \frac{1}{2u}\left(\frac{x_1}{t_1}+\frac{x_2}{t_2}+\ldots+\frac{x_p}{t_p}\right)}$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \ldots \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} u^N \left[t_1^{n_1} t_2^{n_2} t_p^{np} J_{n_1}(x_1) J_{n_2}(x_2) \ldots J_{np}(x_p)\right],$$

unde am notat prin: $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$. Dar în baza lui (1) putem scrie

$$(3') \quad e^{\frac{u}{2}(x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_p t_p) - \frac{1}{2u}\left(\frac{x_1}{t_1}+\frac{x_2}{t_2}+\ldots+\frac{x_p}{t_p}\right)}$$

$$= \sum_{N=-\infty}^{+\infty} u^N \left(\frac{x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_p t_p}{\frac{x_1}{t_1}+\frac{x_2}{t_2}+\ldots+\frac{x_p}{t_p}}\right)^{\frac{N}{2}} J_N(\omega),$$

unde

$$\omega^2 = (x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_p t_p)\left(\frac{x_1}{t_1}+\frac{x_2}{t_2}+\ldots+\frac{x_p}{t_p}\right).$$

Desvoltările (3) și (3') comparate între ele ne dau formula ce vroiam să stabilim .

$$(4) \quad \left(\frac{x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_p t_p}{\frac{x_1}{t_1}+\frac{x_2}{t_2}+\ldots+\frac{x_p}{t_p}}\right)^{\frac{N}{2}} J_N(\omega)$$

$$= \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_p=N} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \ldots t_p^{np} J_{n_1}(x_1) J_{n_2}(x_2) \ldots J_{n_p}(x_p).$$

Această formulă conține două cazuri particulare interesante:
1°. Dacă luăm:

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_p = 1,$$

găsim

$$(5) \quad J_N(x_1 + x_2 + \ldots + x_p) = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_p=N} \sum \ldots \sum J_{n_1}(x_1) J_{n_2}(x_2) \ldots J_{n_p}(x_p),$$

care generalizează la mai multe variabile formula de adițiune a lui NEUMANN-LOMMEL.

2°. Dacă considerăm formula numai pentru două variabile și punem: $t_1/t_2 = e^{i\varphi}$ atunci găsim

$$(6) \quad \left(\frac{x + xe^{-i\varphi}}{x + ye^{-i\varphi}}\right)^{\frac{N}{2}} J_n\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\varphi}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{N+m}(x) J_m(y) e^{mi\varphi},$$

care este formula lui GRAF pentru cazul când indicele funcțiunii din prima parte este întreg.

GH. TH. GHEORGHIU.

ASUPRA UNOR TETRAEDRE

In *Gazeta Matematică* Vol. XL, pag. 295, sub același titlu am publicat un mănunchiu de proprietăți relative la tetraedrele pentru care proiecția unui vârf pe fața opusă se află pe dreapta lui EULER a triunghiului.

1°. *Condițiile necesare și suficiente pentru ca proiecția vârfului* T, *al tetraedrului* TABC, *pe planul* ABC *să se afle pe dreapta* OI *și să împartă segmentul* OI *în raportul* k, — O *și* I *fiind centrele cercurilor circumscris și înscris triunghiului* ABC —, *sunt:*

$$(1+k)\,\overline{TA}^2 - k \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = (1+k)\,\overline{TB}^2 - k \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BA} = (1+k)\,\overline{TC}^2 - k \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB}.$$

a) Se notează A′ mijlocul muchiei BC , M proiecția lui T pe planul ABC , m și i proiecțiile punctelor M și I pe BC. Deoarece Tm e perpendiculară pe BC,

$$\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2 = 2\,\overline{BC} \cdot \overline{mA'}. \qquad (1)$$

Și dacă

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{MI}} = k$$

$$\frac{\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2}{2\,\overline{BC} \cdot \overline{iA'}} = \frac{\overline{mA'}}{\overline{iA'}} = \frac{k}{k+1}.$$

Dar

$$\overline{iA'} = \overline{Bi} - \overline{BA'} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}}{2} - \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AB} - \overline{AC}}{2}. \qquad (2)$$

Deci

$$(k+1)\left(\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2\right) = k\,\overline{BC}\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right), \text{ sau}$$

$$(k+1)\,\overline{TB}^2 - k\,\overline{BC} \cdot \overline{BA} = (k+1)\,\overline{TC}^2 - k\,\overline{CB} \cdot \overline{CA}. \qquad (3)$$

Analog, făcând proiecțiile pe muchia CA, se obține

$$(k+1)\,\overline{TC}^2 - k \cdot \overline{CB} \cdot \overline{CA} = (k+1)\,\overline{TA}^2 - k \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}. \qquad (4)$$

Condițiile enunțate sunt deci necesare.

b) Sunt și suficiente. Admițând egalitatea (3), urmează

$$\frac{\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2}{\overline{BC} \cdot \left(\overline{AB} - \overline{AC}\right)} = \frac{k}{k+1},$$

care, cu (1) și (2) devine

$$\frac{\overline{mA'}}{\overline{iA'}} = \frac{k}{k+1}, \text{ deci } \frac{\overline{OM'}}{\overline{M'I}} = k,$$

unde M′ e punctul în care perpendiculara ridicată în m pe BC taie dreapta OI. Proiecția vârfului T pe planul ABC se află pe dreapta M′m.

Folosind și condiția (4), la fel se conchide că punctul M se găsește pe perpendiculara lăsată din M′ pe Ac. Punctul M coincide cu M′

2'. Dacă M se află chiar în I , $k = \infty$.

Deoarece

$$\frac{\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2}{\overline{BC} \cdot (\overline{AB} - \overline{AC})} = \frac{k}{k+1},$$

$$\lim_{M \to I} \frac{\overline{TB}^2 - \overline{TC}^2}{\overline{BC} \cdot (\overline{AB} - \overline{AC})} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = 1 .$$

Deci, luând cazul limită,

$$\overline{TB}^2 - \overline{BC} \cdot \overline{BA} = \overline{TC}^2 - \overline{CA} \cdot \overline{CB} .$$

La fel

$$\overline{TC}^2 - \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{TA}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} .$$

Deci:

„*Condiţiile necesare şi suficiente pentru ca vârful* T *al tetraedrului* TABC *să se proiecteze pe planul* ABC *în centrul cercului înscris triunghiului* ABC, *sunt:*

$$\overline{TA}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{TB}^2 - \overline{BC} \cdot \overline{BA} = \overline{TC}^2 - \overline{CA} \cdot \overline{CB} .$$

3°. *Dacă vârful* T *al tetraedrului* TABC *se proiectează pe planul* ABC *în primul punct al lui* BROCARD *al triunghiului* ABC, *există relaţia:*

$$\overline{TA}^2 \cdot \overline{BC}^2 \cdot (\overline{CB}^2 \cdot \overline{CA}^2 - \overline{AB}^4) + \overline{TB}^2 \cdot \overline{CA}^2 (\overline{AC}^2 \cdot \overline{AB}^2 - \overline{BC}^4)$$

$$+ \overline{TC}^2 \cdot \overline{AB}^2 (\overline{BA}^2 \cdot \overline{BC}^2 - \overline{AC}^4) = 0 .$$

Demonstraţie asemănătoare celei folosite în articolul citat.

C. IONESCU-BUJOR.

O TEOREMĂ RELATIVA LA PATRULATERE CIRCUMSCRIPTIBILE

Fie ABCD un patrulater circumscriptibil în care notăm :

$$AB = a \ , \ BC = b \ , \ CD = c \ ; \ DA = d \ ; \ AC = \delta \ , \ BD = \delta' ;$$

$$\sphericalangle AIB = \varphi \ ; \ \sphericalangle BIC = \varphi' \ ,$$

I fiind punctul de întâlnire al diagonalelor.

Se cunoaşte relaţia :

$$a + c = b + d.$$

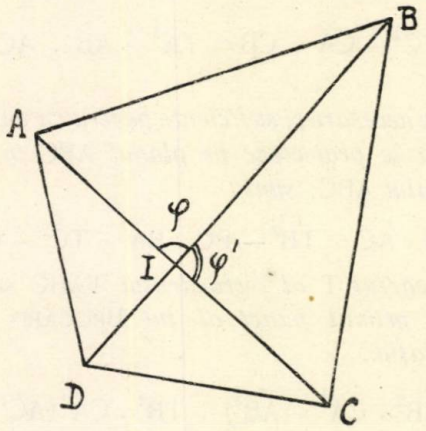
Ridicând ambii membri la patrat obţinem :

(1) $$a^2 + c^2 + 2ac = b^2 + d^2 + 2bd.$$

Insă :

$$a^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 - 2\overline{AI} \cdot \overline{BI} \cos\varphi$$

$$b^2 = \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 + 2 \cdot \overline{BI} \cdot \overline{CI} \cdot \cos\varphi \text{ etc...}$$



Dacă introducem aceste valori în (1) şi facem reducerile posibile ne rămâne :

$$-2\overline{AI} \cdot \overline{BI} \cos\varphi - 2 \cdot \overline{CI} \cdot \overline{DI} \cos\varphi + 2ac$$

$$= 2\overline{BI} \cdot \overline{CI} \cos\varphi + 2\overline{AI} \cdot \overline{DI} \cos\varphi + 2bd.$$

Simplificând cu 2 şi aranjând termenii convenabil obţinem succesiv :

$$ac - bd = (\overline{CI} + \overline{AI})\,\overline{BI} \cos\varphi + (\overline{CI} + \overline{AI}) \cdot \overline{DI} \cos\varphi$$

$$= (\overline{CI} + \overline{AI})\,(\overline{BI} + \overline{DI}) \cos\varphi$$

adică :

(2) $$\boxed{ac - bd = \delta\delta' \cos\varphi}\ .$$

Putem deci enunța următoarea teoremă :

Intr'un patrulater circumscriptibil, diferența produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor înmulțit cu cosinusul unghiului format de diagonale sub care se văd laturile ce formează termenul pozitiv al diferenței.

Se observă că această teoremă are o mare asemănare cu teorema lui PTOLOMEU relativă la patrulaterele inscriptibile.

Obs. Din (2) deducem imediat :

$$bd - ac = \delta\delta' \cos\varphi' \quad (\varphi' = \pi - \varphi)$$

așa încât enunțul teoremei e valabil oricum am forma diferența produselor.

* * *

Dacă presupunem că un patrulater e inscriptibil și circumscriptibil în același timp, atunci pe lângă relația (2) va trebui să fie satisfăcută relația lui PTOLOMEU :

$$ac + bd = \delta\delta'.$$

Prin adunare și scădere obținem :

$$(3) \quad \begin{cases} ac = \delta\delta' \cos^2 \dfrac{\varphi}{2} \\ bd = \delta\delta' \sin^2 \dfrac{\varphi}{2} = \delta\delta' \cos^2 \dfrac{\varphi'}{2} \end{cases}.$$

Ca verificare, în formula :

$$S = \frac{1}{2} \delta\delta' \sin\varphi = \delta\delta' \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

care dă aria unui patrulater oarecare să înlocuim pe $\sin \frac{\varphi}{2}$ și $\cos \frac{\varphi}{2}$ cu valorile scoase din (3). Rezultă :

$$S = \delta\delta' \cdot \sqrt{\frac{ac}{\delta\delta'}} \cdot \sqrt{\frac{bd}{\delta\delta'}} = \sqrt{abcd} \ .$$

Regăsim deci formula cunoscută care dă aria acestor patrulatere.

GH. D. SIMIONESCU
Prof. lic. mil. „N. Filipescu".

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN 1935

In zilele de 2, 3 şi 4 Mai a. c., s'a ţinut Concursul *Gazetei Matematice* ale cărui rezultate s'au publicat în No. 10, pag. 433—435.

Elevilor premiaţi în număr de opt, li s'a dat câte o diplomă specială, precum şi cărţile aci menţionate.

I. D-lui CEAUŞESCU VASILE:

1. *Georges Bouligand.* Leçons de Géométrie Vectorielle.

2. *Paul Montel.* Leçons sur les Fonctions Entières ou Méromorphes.

3. *I. Ionescu.* Isac Newton.

4. *I. Ionescu.* Beton Armat.

II. D-lui STOICA D. ALEXANDRU:

1. *G. Papellier.* Précis d'Algebre, d'Analyse et de Trigonometrie. Tome I et II.

2. *Paul Montel.* Leçons sur les Fonctions Entières ou Méromorphes.

3. *I. Ionescu.* Istoricul Invăţământului Ingineriei în România.

4. *I. Ionescu.* Beton Armat.

III. D-lui GRIGORESCU VINTILĂ:

1. *M. Ed. Brahy.* Exercices Méthodiques de Calcul Intégral.

2. *Paul Montel.* Leçons sur les Fonctions Entières ou Méromorphes.

3. *I. Ionescu.* Momente Statice Polare.

4. *I. Ionescu.* Beton Armat.

IV. D-lui CIOC I. DUMITRU:

1. Abbé *Th. Moreux.* Pour Comprendre la Mécanique.

2. *Traian Lalescu.* Trigonometria de Gheorghe Lazăr.

3. *I. Ionescu.* Comparaţiunea rădăcinilor mai multor ecuaţiuni de gradul al doilea, (2 vol.).

4. *I. Ionescu.* Beton Armat.

V. D-lui METEA S. VIRGIL:

1. *G. Papellier.* Précis de Géométrie Descriptive.

2. *Traian Lalescu.* Trigonometria de Gheorghe Lazăr.

3. *I. Ionescu.* Maşinile de Calcul.

4. *I. Ionescu.* Beton Armat.

VI. D-lui DECEANU GHEORGHE:

1. *Georges Durand.* Pour Comprendre le Calcul Intégral

2. *Paul Montel.* Leçons sur les Fonctions Entières ou Méromorphes.

3. *I. Ionescu.* Momente Statice Absolute.

4. *I. Ionescu.* Beton Armat.

VII. D-lui NĂSTASE MARIN:

1. Abbé *Th. Moreux.* Pour Continuer l'Algèbre.

2. *Traian Lalescu.* Trigonometria de Gheorghe Lazăr.

3. *I. Ionescu.* Nomografia sau Teoria Tablourilor Grafice (Abace).

4. *I. Ionescu.* Beton Armat.

VIII. D-lui TĂTARU NICOLAE:

1. Abbé *Th. Moreux.* Pour Comprendre la Géométrie dans l'Espace.

2. *Traian Lalescu.* Trigonometria de Gheorghe Lazăr.

3. *I. Ionescu.* Despre Comparațiunea Construcțiunilor Geometrice sau Geometrografia.

4. *I. Ionescu.* Beton Armat.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII:

I. BUȘILĂ, A. IOANOVICI, AL. D. BUNESCU

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE" DIN 1936

Adunarea generală a Societății *Gazeta Matematică* a hotărît, în ședința dela 22 August a. c. ținerea unui concurs de matematici în cursul anului 1936 între elevii liceelor, civile și militare, din țară și între elevii anului preparator al Școalei Politehnice «Regele Carol II».

Concursul va avea loc după Paște înainte de reînceperea cursurilor, în București, unde se va da examen înscris și oral, dacă Societatea va dispune de mijloace de a aduce candidații; dacă vor lipsi aceste mijloace, concursul se va ține într'o Duminecă din luna Mai, în diferite centre din țară, dându-se numai teze.

Deciziunea în această privință se va publica în numărul din Februarie 1936.

Fiecare candidat este obligat să se înscrie *la două din materiile clasei sale*, urmând a da, la fiecare, teză, iar în cazul ținerii concursului în București, și oral.

Pentru unitatea pregătirii, se va publica în numărul din Octomvrie al *Gazetei Matematice* un program, conţinând materia pe care candidatul unei anume clase va trebui să pregătească pentru obiectul la care e înscris.

Sub niciun motiv candidatul nu va fi scuzat de nepregătirea unor capitole trecute în programul clasei sale, pentru obiectul ales.

Cererile de înscriere se vor trimite direct de candidaţi Societăţii „Gazeta Matematică", Calea Griviţei, 158. Bucureşti 2, în plicuri recomandate până cel mai târziu la 31 Decemvrie 1935.

Nu se primesc cereri trimise de părinţi, corespondenţi, profesori sau şcoli.

Cererile vor arăta neapărat, numerotate şi în ordinea arătată aci, următoarele date:

1. Numele şi pronumele, scrise clar.

2. Clasa sau anul pregătitor în care urmează candidatul. Pentru cei pregătiţi în particular se va arăta şcoala la care a urmat anul precedent sau în care a depus examenul de fine de an pentru clasa precedentă.

3. Adresa în timpul şcoalei şi în timpul vacanţei Paştilor, pentru a se putea face comunicările şi înştiinţările necesare.

4. Dacă dispune de mijloace de a veni în Bucureşti, dacă are unde fi găzduit şi întreţinut aci în timpul concursului sau dacă unul din aceste mijloace ar urma să fie procurat de Societatea *Gazeta Matematică.*

Dacă are nevoie de bani pentru drum, va indica şi gara de unde va lua trenul pentru a veni la Bucureşti şi gara la care se întoarce după concurs.

5. Cele două materii la care se înscrie.

6. Activitatea sa la *Gazeta Matematică* sau la alte reviste din ţară şi străinătate.

Candidaţii înscrişi la concurs, dacă din diferite motive nu se mai pot prezenta, sunt obligaţi să anunţe din timp.

Părăsirea sălilor de concurs înscris este interzisă înainte de predarea tezelor.

Se atrage atenţiunea că toate condiţiunile, pentru înscriere şi ţinerea concursului, trebuiesc respectate cu toată exactitatea inerentă ştiinţelor matematice.

In numărul 6 din Februarie 1936 al *Gazetei Matematice* se

se va publica modul de ţinere al concursului, localitatea, orele de prezentare şi numele candidaţilor admişi la concurs.

Numărul celor admişi va depinde de sacrificiile materiale ce se vor cere Societăţii *Gazeta Matematică*, pentru transportul, găzduirea şi întreţinerea candidaţilor şi de pregătirea pe care aceştia vor arăta-o în cererile ce vor face.

Candidaţii reuşiţi la concurs vor primi ulterior diplome, recompense, premii sau menţiuni. Primul care va reuşi la concurs, dintre elevii anului preparator de pe lângă Şcoala Politehnică «Regele Carol II» din Bucureşti, va primi premiul «ANGHEL SALIGNY» (de 1000 lei) oferit de un membru al Societăţii noastre, iar primul reuşit dintre toţi candidaţii va primi premiul «LT-COL. G. TĂNĂSESCU» în cărţi, în conformitate cu înştiinţarea făcută în acest număr la articolul: *Premii şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice“*.

Comisiunea examinatoare se va compune din membrii Societăţii *Gazeta Matematică*, care nu vor avea rude printre candidaţii admişi la concurs.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

PREMIILE ŞI ALTE DISPOZIŢIUNI ALE FONDURILOR „GAZETEI MATEMATICE“

PENTRU

CURSUL ANULUI 1935 — 1936

(1 Septemvrie 1935 — 31 August 1936)

In conformitate cu dispoziţiunile art. 12 din Regulamentul general al administrării fondurilor *Gazetei Matematice*, subsemnaţii membri ai Comisiunii pentru controlul gestiunii fondurilor şi pentru privegher ea la îndeplinirea prevederilor regulamentare ale fiecărui fond, desemnaţi în adunarea generală dela 29 August 1934, aducem la cunoştinţă următoarele:

1. Din venitul anual al fondului «SPIRU C. HARET», potrivit dispoziţiunilor regulamentului pentru administrarea lui, se cumpără cărţi de matematici pure şi aplicate (literatură matematică, istoria matematicilor, recreaţiuni matematice, etc.) care se donează biblio-

tecilor şcolare dela şcolile secundare sau corespondenţilor meritoşi, elevi ai acestor şcoli.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 170.

In loc de cărţi se pot dona aparate sau modele necesare învăţământului matematic.

In baza hotărîrii luate de adunarea generală dela 22 August 1935, cărţile ce se vor procura din venitul fondului pe anul 1935 s'a destinat să se doneze Liceului de băieţi din Beiuş.

2. Premiul pentru lucrări de matematică aplicată la ştiinţele militare, din venitul fondului «GENERAL SC. PANAITESCU», se acordă celei mai bune lucrări de matematică aplicată la studiile militare, publicate în cursul anului.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII pag. 213.

Studiile în manuscris care se aduc la cunoştinţa Societăţii pe orice cale, se iau şi ele în consideraţie la acordarea premiului.

Autorii publicaţiunilor prezentate trebue să fie Români, sau să-şi fi făcut cultura matematică în ţară.

Premiul este indivizibil şi se acordă neapărat în fiecare an. In cazul când nu se găseşte nici o lucrare de premiat, sau în cazul când autorul lucrării premiate nu voieşte a primi suma fixată, ea se dă uneia din revistele militare în care se publică şi chestiuni de matematică aplicată la ştiinţele militare.

Raportul Comisiunii însărcinate cu acordarea premiului se publică în numărul *Gazetei Matematice* din Octomvrie.

3. Premiul «VASILE CONTA», din fondul constituit de *Gazeta Matematică,* se acordă pentru a recompensa cea mai bună lucrare originală de filosofia matematicelor.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII pag. 246.

Autorul trebue să fie Român şi să-şi fi făcut studiile secundare în ţară.

Lucrările trebuesc trimise Societăţii până la 1 Iulie al fiecărui an, iar rezultatul se va publica în numărul din Noemvrie al *Gazetei Matematice.*

Dacă până la acea dată nu se prezintă nicio lucrare, se va aştepta data de 1 Iulie a primului an când se va prezenta o asemenea lucrare.

Premiul constă din totalitatea venitului fondului cumulat până la data acordării.

4. Premiul bienal «INGINER H. CAPRIEL», pentru lucrări de matematici superioare, pure sau aplicate, se acordă celei mai bune lucrări ce se va prezenta Societății, de către studenții Universităților, elevii Școlilor Politechnice sau elevii Școlilor Militare de Aeronautică, Artilerie, Geniu și Marină din țară.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 327.

Subiectul lucrării pentru premiul pe anul 1936 s'a anunțat în *Gazeta Matematică* anul XL, numărul 10 (luna Iunie).

Lucrările — semnate de autor — trebuesc trimise Societății cel mai târziu până la 1 Mai 1936, iar rezultatul se va publica în numărul din Decemvrie 1936 al *Gazetei Matematice*.

Premiul constă din venitul fondului «INGINER H. CAPRIEL» și este indivizibil, iar în cazul când nu se acordă el mărește fondul.

5. Din venitul fondului «LT.-COLONEL G. A. TĂNĂSESCU» urmează să se dea cărți de matematici celui clasificat întâiul la concursurile anuale ale *Gazetei Matematice*.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 171.

In anii când aceste concursuri nu au loc, veniturile măresc fondul.

6. Premiul «INGINER VASILE CRISTESCU», se acordă din venitul fondului «VASILE CRISTESCU», autorului celui mai bun articol referitor la geometria triunghiului sau la trigonometrie, publicat în ultimul volum apărut al *Gazetei Matematice*.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 125.

Autorul articolului trebue să fie elev de liceu, de școală militară, de școală politechnică sau student de facultate.

Premiul este indivizibil și anual, iar în cazul când într'unul sau mai mulți ani de-a-rândul nu s'au publicat articole putând fi premiate, premiul se cumulează până la acordarea lui.

Raportul comisiunii însărcinate cu decernarea premiului se publică în numărul din Iunie al *Gazetei Matematice*.

7. Din venitul fondului «ANGHEL SALIGNY», destinat să servească la înființarea «Bibliotecii technice a Gazetei Matematice»,

urmează să se publice lucrări complete de matematici aplicate, sau cu cuprins technic, în legătură cu aceste ştiinţe.

Regulamentul acestui fond s'a publicat în *Gazeta Matematică* anul XXXVIII, pag. 289.

Până în prezent delegaţiunea societăţii n'a primit niciun manuscris care să poată fi publicat din acest fond, în cursul anului 1935 — 1936.

8. In «Biblioteca Gazetei Matematice», destinată publicării de cărţi privitoare la matematicile pure (cu caracter didactic sau ştiinţific), la matematicile aplicate, la filosofia sau istoria lor, precum şi la orice fel de lucrare cu caracter matematic, a apărut Lecţiuni de Algebră Superioară pentru clasa VIII ştiinţifică (Ediţia V) de N. ABRAMESCU, şi în cursul anului va apare Culegere de probleme de Trigonometrie de V. CRISTESCU (Fascicula I Goniometria) revăzută şi completată de G. T. GHEORGHIU.

COMISIUNEA PENTRU PREMII:
IOAN BUŞILĂ, GH. ILIESCU.

NOTE MATEMATICE

1. *Programul aritmeticei la Şcoala română din Braşov în clasa pregătitoare pentru Comerţ, în anul 1837.*

„*Elementurile aritmeticii* cu numere întregi şi frânţi, petrecând şi fracţiile decimale, regula de tri, a soţietăţii, a lanţului, a cametelor, a obligaţiei, a mestecării, toate acestea cu pilde mai mult de 1000 desluşite». I. I.

2. *O nouă soluţie a problemei 2683.* La pag. 79 Vol. XL s'a dat soluţia aritmetică a problemei 2683 prin care *se cer numerele de 3 cifre care adunate cu răsturnatele lor dau patrate perfecte.*

In nota de faţă voiu da o altă soluţie utilizând rezultatele pe care le-am găsit în nota intitulată «*Resturile diviziunii lui* N^2 *şi* N^3 *prin 101*" şi publicată în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVIII, pag. 374.

Fie *szu* numărul căutat. Evident că şi *usz* este o soluţie. Dacă N^2 este întreg, conform enunţului avem

$$(1) \qquad N^2 = 101\,(u+s) + 20z.$$

Dând lui *u, z, s,* valorile maxime se găseşte că

$$(2) \qquad N^2 < 1889 \quad \therefore \quad N < 45.$$

Relaţiunea (1) care pune pe N^2 sub forma $101m + R$ ne dă cu uşurinţă valorile lui N^2 pentru diferitele valori ale lui z dacă se ţine seamă de (2) şi de nota citată din Vol. XXXVIII.

Se găseşte.

(3) $N^2 = 100 ; 121 ; 484 ; 625 ; 1089$

$z = 5 ; 1 ; 4 ; 6 ; 9.$

Am eliminat soluţia banală $N^2 = 000$ corespunzătoare la $z = 0$.

Luând acum din (3) pe rând toate valorile lui N^2 şi procedând ca la partea finală a soluţiei dela pag. 79 Vol. XL, se găsesc toate soluţiile de acolo plus soluţia de formă 050.

Pe calea dată în această notă se găsesc cu uşurinţă soluţii de ale ecuaţiei (1) şi pentru u şi $s > 10$.

GENERAL GH. BUICLIU.

3. *Asupra problemei 1773.*

Iată enunţul acestei probleme:

Să se arate că în spaţiul cu patru dimensiuni, două plane pot fi deodată paralele şi perpendiculare unul pe altul.

I. IONESCU.

Această problemă se găseşte tratată şi rezolvată direct în toate tratatele care studiază poziţia relativă a două plane în interiorul spaţiului cu patru dimensiuni.

In româneşte ea este cercetată şi rezolvată la punctul 128 dela pag. 35-a a tratatului **„Chaosul“** (spaţiul cu 4 dimensiuni) de Ing. I. I. CHIŢULESCU, Tiparul Românesc. Bucureşti 1929.

INGINER-ŞEF I. I. CHIŢULESCU.

4. *Asupra teoremei lui* CESÀRO.

Este îndeajuns de cunoscută următoarea teoremă a lui CESÀRO.

Fiind date două şiruri de cantităţi cu termenii generali u_n *şi* v_n, *în care:* a) *şirul* v_n *este crescător şi nelimitat sau* b) *şirul* v_n *este descrescător şi tinde către zero odată cu* u_n, *avem* [1])

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}},$$

dacă ultima limită există

1) E. CESÀRO, Analisi Algebrica, 1894, pag. 98–99.

Vreau să observ mai întâi că această teoremă conține condiții supranumerare, datorită metodei de demonstrație a autorului și apoi că ea constitue o altă manieră de a enunța cunoscuta regulă a lui l'HOSPITAL. Voiu demonstra, pentru aceasta, următoarea propoziţiune, mai generală ca cea de mai sus:

I. *Fiind date două șiruri* u_n *și* v_n, *avem*

$$(A) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n=\infty} \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}},$$

dacă ultima limită există.

Să punem $u_n = F(n)$, $v_n = \Phi(n)$. Teorema mediei generalizată a lui CAUCHY, exprimată prin egalitatea

$$\frac{F(b) - F(a)}{\Phi(b) - F(a)} = \frac{F'(c)}{\Phi'(c)}, \quad a < c < b,$$

conduce pentru $b = n$, $a = n - 1$, la

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(n) - F(n-1)}{\Phi(n) - \Phi(n-1)} = \lim_{n=\infty} \frac{F'(\theta)}{\Phi'(\theta)} = \lim_{n=\infty} \frac{F'(n)}{\Phi'(n)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Pe de altă parte, după regula lui l'HOSPITAL, avem

$$\lim_{n=\infty} \frac{F(n)}{\Phi(n)} = \lim_{n=\infty} \frac{F'(n)}{\Phi'(n)},$$

deci...

Din această propoziţiune cu totul generală, rezultă umătoarea.

II. *Dacă raportul diferenţelor de un oarecare ordin p ale termenilor generali a două șiruri* w_n *și* v_n, *are o limită, aceeași limită o vor avea și rapoartele diferenţelor de ordinele inferioare, adică*

$$(B) \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\Delta u_n}{\Delta v_n} = \lim \frac{\Delta^2 u_n}{\Delta^2 v_n} = \ldots = \lim \frac{\Delta^p u_n}{\Delta^p v_n}.$$

Proprietatea aceasta se obţine prin aplicarea repetată a primei.

Teorema lui CESÀRO, ca și generalizarea ce i-am dat, deși sunt o manieră deghizată de a enunța regula lui l'HOSPITAL, au marele avantaj față de aceasta că evită calculul derivatelor termenilor raportului $\frac{u_n}{v_n}$, înlocuindu-l prin simple scăderi. Evident, aplicabili-

tatea acestei teoreme este restrânsă, căci se poate întâmpla să obținem expresiuni mai complicate decât cele inițiale. Se pune atunci întrebarea dacă reciproca acestor teoreme este adevărată. Voiu demonstra următoarea propoziţiune, care conţine un răspuns la această întrebare.

III. *Fiind date două şiruri* u_n *şi* v_n, *dacă* $\frac{v_{n-1}}{v_n}$ *are o limită diferită de unitate, avem*

$$(C) \qquad \lim \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim \frac{u_n}{v_n} ,$$

când ultima limită există.

Putem scrie

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{u_n v_{n-1} - v_n u_{n-1}}{v_n (v_n - v_{n-1}}$$

$$= \frac{\frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_n} - \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \cdot \frac{v_{n-1}}{v_n}}{1 - \frac{v_{n-1}}{v_n}} .$$

Dacă punem

$$\frac{u_n}{v_n} = a + \alpha_n , \frac{v_{n-1}}{v_n} = b + \beta_n ,$$

avem

$$\left| \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} - \frac{u_n}{v_n} \right| = | b + \beta_n | \frac{|\alpha_n - \alpha_{n-1}|}{|1 - b - \beta_n|} < \varepsilon ,$$

căci $\frac{u_n}{v_n}$, $\frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}$ având aceeaşi limită, modulul diferenţei lor tinde către zero.

Răspunsul cel mai general la întrebarea de mai sus îl constitue următoarea propoziţiune:

IV. *Fiind date două şiruri* u_n *şi* v_n, *dacă raportul deri-*

vatelor acestor termeni, — consideraţi ca funcţiuni de indicele n — în raport cu n are o limită, avem

$$\lim \frac{u_n - u_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} = \lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u'_n}{v'_n} .$$

In legătură cu a doua propoziţiune de mai sus, voiu mai demonstra încă pe următoarea.

V. *Dacă diferenţele de un ordin oarecare p ale termenilor unui şir sunt pozitive, iar cele de ordinul* $p + 1$ *sunt negative, limitele următoare există şi sunt egale*

$$\lim \frac{u_n}{n^p} = \lim \frac{\Delta u_n}{\Delta n^p} = \lim \frac{\Delta^2 u_n}{\Delta^2 n^p} = \ldots = \lim \frac{\Delta^p u_n}{\Delta^p n^p} ,$$

pentru $n = \infty$.

In adevăr, din

$$\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n < 0 \ , \ \Delta^p u_n > 0$$

se deduce că şirul $\Delta^p u_n$ este descrescător şi limitat inferior, căci termenii sunt pozitivi. Rezultă că va avea o limită λ, care poate fi chiar zero. Pe de altă parte, $\Delta^p n^p = k$ (const), deci raportul

$$\frac{\Delta^{p-1} u_{n+1} - \Delta^{p-1} u_n}{\Delta^{p-1}(n+1)^n - \Delta^{p-1} n_p} = \frac{\Delta^p u_n}{\Delta^p n^p}$$

va avea limita $\frac{\lambda}{k}$. In baza teoremei I, aceiaşi limită o va avea şi raportul

$$\frac{\Delta^{p-1} u_n}{\Delta^{p-} n^p} = \frac{\Delta^{p-2} u_{n+1} - \Delta^{p-2} u_n}{\Delta^{p-2}(n+1)^p - \Delta^{p-2} n^p}$$

şi deci şi raportul

$$\frac{\Delta^{p-2} u_n}{\Delta^{p-2} n^p}$$

în baza aceleiaşi teoreme. Raţionamentul se continuă până ajungem la raportul $\frac{u_n}{n^p}$.

M. GHERMĂNESCU.

BIBLIOGRAFIE

Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences. Tome 37 (1), 1935. Bucureşti. Integralgeometrie 2 zu Ergebnissen von M. W. CROFTON, von WILHELM BLASCHKE, in Hamburg. L'Equation intégrale linéaire à limites variables et à un paramètre, par NICOLAS CIORĂNESCU. Sur la représentation analytique des fonctions harmoniques par ALEXANDRE GHIKA. Asupra proprietăţilor generale ale variabilelor statistice interindependente, de G. MIHOC. Sur l'unicité de la représentation des fonctions harmoniques d'ordre p, au moyen des fonctions harmoniques d'ordre un, par MIRON NICOLESCO.

Bulletin of the A nerican Mathematical Society. Vol. XLI. No. 6. Iunie 1935. New-York. Tetraedru asociat cu expansiunea canonică pentru o suprafaţă curbă, de P. O. BELL. Asupra unei teoreme a lui PLESSNER, de N. DUNFORD. Legea reciprocităţii cuadratice, de A. WHITEMAN. Expansiunile aritmetizate pentru unele funcţiuni duble de a treia categorie, de G. D. NICHOLS. O teoremă fără conexiune în şirurile abstracte, de W. M. WHYBURN. Notă asupra funcţiunilor neanalitice, de I. M. SCHEFFER. O nouă soluţiune problemei lui GAUSS asupra lui $h(s^2d)/h(d)$, de G. PALL. Reducerea unei matrice prin grupul de matrice comutative cu o matrice dată, de P. L. TRUMP. Generalizarea funcţionalelor armonice de G. G. DRESSEL. Notă asupra punctului de echilibru al funcţiunii lui GREEN pentru o regiune inelară, de D. M. HICKEY. Notă asupra unei observaţiuni a lui D. J. STRUIK asupra coeficienţilor de corelaţie, de Y. B. D. DERKSEN. Notă asupra interpretării geometrice a anulării unui anumit invariant proiectiv al două conice, de R. ROBINSON. Un grup de operaţiuni pe o hartă parţial colorată, de I. KITTELL. Asupra echivalenţei celor două metode de a defini integralele lui STIELTJES, de B. D. GETCHELL. O nouă probă a teoremei lui MINKOWSKI asupra produsului a două forme lineare de R. Q. SALE. Unele observaţiuni asupra teoriei transformatorilor lui FOURIER, de E. HILL & A. C. OFFORD & J. D. TAMARKIN. O teoremă privitoare la spaciile separabile periferal local, de F. B. JONES. O reducere a şirului de postulate pentru spaciul abstract al lui HILBERT, de A. E. TAYLOR.

The Mathematical Gazette. Vol. XIX. No. 234. Iulie 1935. Londra. FREDERIK WILLIAM HILL. (Necrolog). Zile petrecute la Cambridge, de A. R. FORSYTH. Soluţia triunghiului căruia i se cunoaşte trei laturi. (Discuţiuni). Invăţământul matematicelor în liceele şi colegiile din Franţa, de S. MINOIS. JOHN NAPIER (Neper), de W. R. THOMAS.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 4. Iunie 1935. Buenos Aires, Contribuţie la cunoaşterea triunghiului, de B. I. BAIDAFF. Ecuaţia

$A_1^n + A_2^n + A_3^n + \ldots = B_1^n + B_2^n + B_3^n + \ldots\ldots$, $n = 1, 2, 3, 4$

şi formele derivate, de A. MOESSNER.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XV. No. 6. August 1935. Timişoara. Separarea numerelor după ultimul grup al pătratelor cuburilor şi bipătratelor lor, de I. V. MĂTIEŞ. Asupra unor probleme de examen, de I. V. MĂTIEŞ.

Buletinul I. R. E. Anul III. No. 1. Martie 1935. Bucureşti. (Organ al *Institutului naţional român pentru studiul amenajării şi folosirii izvoarelor de energie).*

G. TZITZEICA. *Sur les réseaux à invariants constants.* Athena 1935. (Extras din *Actes du Congrès interbalcanique des mathématiciens,* 2—9 septembre 1934, I).

G. TZITZEICA. *Réseaux et congruences.* Athena 1935. (Extras din *Actes du Congrès interbalcanique des mathématiciens,* 2—9 septembre 1934, I).

RÉNÉ GARNIER. *Leçons d'algèbre et de géométrie,* à l'usage des étudiants des Facultés des sciences. D'après la rédaction de M. BADRIG GUENJIAN, ingénieur E. S. E. Tome I. Algèbre linéaire. Homographie. Equations tangentielles. Paris. Gauthier-Villars, éditeur. Paris 1935.

Aceasta este o carte de pregătire pentru studenţii ce vor să urmeze cursurile Facultăţii de matematice, şi cari nu au făcut cursuri speciale în acest scop. Chestiunile tratate sunt următoarele:

Determinaţii, rezolvarea ecuaţiilor lineare, forme lineare, forme cuadratice, geometria proiectivă a dreptei şi raportul anarmonic, geometria proiectivă a planului şi a spaţiului, ecuaţii tangenţiale, înfăşurate şi extreme.

Cursul a fost redijat după notele luate de un elev al autorului la cursul făcut de acesta la Facultatea de ştiinţe din Paris. El este foarte util pentru viitorii noştri studenţi în matematice, deoarece la noi lipsesc clase de matematice speciale, căci cine voieşte să ştie bine, trebue să se pregătească bine şi singur; numai cu matematica din liceele noastre, nu se poate face direct matematice superioare.

I. I.

P. COUDERC & A. BALLICCIONI. *Premier livre du tétraèdre,* à l'usage des élèves de première, de mathématiques, des candidats aux grandes écoles et à l'agrégation. Paris. Gauthier-Villars, éditeur. Paris 1935.

Intr'o prefaţă scrisă de D-l H. VILLAT, membru al Institutului, D-sa spune că are cea mai vie plăcere de a prezenta publicului această carte cu subiecte frumoase şi rezultate elegante, obţinute simplu, acolo unde obţinerea lor ar părea cu totul dificilă. Până acum nu exista o expunere sistematică a geometriei tetraedrului, cum sunt atâtea pentru geometria triunghiului. Cetirea este captivantă. Se găsesc multe lucruri noui, analogii cu triunghiul în unele locuri şi diferenţe mari în altele. Expunerea e cu totul elementară, autorii rezervând un volum nou pentru chestiunile care cer cunoştinţe speciale de geometrie analitică sau de analiză.

In Cap. I se dau unele proprietăţi ale triunghiului care îşi găsesc aplicaţiuni sau proprietăţi asemuitoare în geometria tetraedrului.

Cap. II, II bis şi III se ocupă de triedre, plane concurente, drepte coplanare, triedre dreptunghice şi tridreptunghice.

Cap. IV şi V se ocupă cu patrulaterul strâmb, drepte şi puncte coplanare, sfere tangente la patru laturi.

Cap. VI, VII, VIII se ocupă cu tetraedrele oarecare, cu proprietăţile lor fundamentale, cu studiul unor particularităţi şi cu relaţiunile metrice într'un tetraedru oarecare.

Cap. IX, X, XI se ocupă cu tetraedrul ortocentric, care are cele patru înălţimi concurente, cu determinarea şi cu proprietăţile lui, cu triedrul lui fundamental şi cu proprietăţi metrice ale lui.

Cap. XII se ocupă cu tetraedrele echifaciale (cu feţele lor egale).

Cap. XIII tratează despre tetraedrul tridreptunghiu şi cel regulat.

Cap. XIV se ocupă de maxime şi simetrii.

Cap. XV se ocupă cu trecerile dela triunghiu la tetraedru.

Cartea cuprinde 204 pagine. Ea se citeşte cu uşurinţă şi constitue o recreaţiune pentru amatorii de geometrie.

I. I.

J. REY PASTOR. *Boletin del Seminario Matematico.* Vol. IV. No. 16. Decemvrie 1934. Buenos Aires. Teoria geometrică a transformărilor Euleriane şi pseudoeuleriane a seriilor, de J. REY PASTOR. Asupra clasificărilor curbelor lui JORDAN ale planului proiectiv, de F. I. TORANZOS. Polinoame generalizate ale lui BERNOULLI şi corelativele lor, de J. BABINI. Transformarea lui Pincherle şi sumarea seriilor divergente, de J. REY PASTOR. Sisteme funcţionale de neegalităţi lineare, de F. LA MENZA.

CAÏUS JACOB. *Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites.* (Thèse présenté à la Faculté des sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques). Cluj 1935.

Mathesis. Tomul XLIX. No. 6. Iunie 1935. Gembloux. Construcţia apropiată a poligoanelor regulate înscrise în un cerc dat, de R. GOORMAGHTIGH. Geometria numerelor complexe, de R. DEAUX. Asupra triunghiurilor ortologice, de J. BILO.

V. THÉBAULT. *Sur les nombres curieux.* Gembloux 1935. (Extras din Mathesis).

MAIOR I. LINTEŞ. *Problema preciziunii gurilor de foc.* (Extras din *Revista Artileriei).* Timişoara 1935.

J. LINTEŞ. *Contributo alla soluzione di alcuni problemi di artiglieria.* (Extras din *Supplemento Tecnico della Rivista d'Artiglieria e Genio).* Roma 1935).

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXIX Fascicola I, II, III. Ianuarie, Februarie, Martie, 1935. Buenos Aires.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 5. Iulie 1935. Buenos Aires. — Studiul derivatei unei medii generale, de B. I. BAIDAFF şi J. BARRAL S.

Ecuaţia $A_1^m + A_2^m + A_3^m \ldots = B_1^n + B_2^n + B_3^n \ldots$; $n = 1, 2, 3,$ şi de forme înrudite, de MOESSNER.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLI. No. 7. Iulie 935.

O. ONICESCU. *Propietà topologiche delle transformazioni puntuali dello spazio.* (Extras din *«Rendinconti della R. Accademia nazionale dei Lincei»*). Roma 1934.

O. ONICESCU. *La topologie de la fonction d'un point du plan ou de l'espage.* (Extras din *«Actes du Congrès interbalcanique de mathématiciens»*. Atena 1934). Atena 1935.

O. ONICESCU. *Sur les valeurs prises par un ensemble de fonctions dans le plan et dans l'espace.* (Extras din *«Comptes rendus du deuxième Congrès des mathématiciens des pays slaves»* Praga 1934). Praga 1935.

O. ONICESCU. *Un problème d'analyse.* (Extras din *«Buletinul Facultății de științe din Cernăuți»*). Cernăuți 1935.

O. ONICESCU & G. MIHOC. *Sur les chaînes de variables statistiques.* (Extras din *«Bulletin des Sciences mathématiques»*). Paris 1935.

HERMANN TONTSCH. *Die Honteruspresse in 400 Jahren. Festschrift der Buchdruckerei Iohann Götts Sohn.* Kronstadt-Brașov. Rumänien. 1933.

In *Gazeta Matematică*, Anul XXXIX, pag. 390 am vorbit despre *Rudimenta cosmographica* tipărită la 1548 de IOHANNES HONTERUS. Când am scris despre acea carte, nu aveam cunoștință de publicațiunea cu titlul de mai sus, asupra căreia mi-a atras atențiunea regretatul G. BOGDAN-DUICĂ că conține date asupra lui HONTERUS. Am căutat această carte pe la librării dar nu am putut-o găsi. Cu ocaziunea *«Săptămânii Cărții»* de anul acesta, am găsit-o expusă de Institutul de arte grafice *Krafft & Drotleff* din Sibiu, am vrut să o cumpăr, dar mi s'a răspuns că nu este de vânzare! Reprezentantul acelei Case mi-a spus însă că va încerca să mi-o procure dela autor. Intre timp tipografia *Iohann Götts Sohn* din Brașov mi-a oferit prin D-l G. EM. FILIPESCU un exemplar din acea publicațiune, pentru care exprim și pe această cale mulțumirile mele.

Cartea aceasta are 113 pag. și este tipărită cu multă îngrijire și cu mult gust. In ea se face istoricul actualei tipografii *Götts*. Ea funcționează de peste 400 ani, fiind întemeiată de HONTERUS în 1533, exact la un secol după descoperirea tipografiei de către *Gutenberg* la Mainz, în 1433. Ea a fost prima tipografie din Brașov și unica până la 1851. După HONTERUS ea a trecut în proprietatea mai multor persoane până la 1833, de când este în posesiunea familiei GÖTTS.

Această tipografie are o deosebită importanță și pentru desvoltarea culturii noastre naționale. Acolo HONTERUS a tipărit prima hartă a Transilvaniei, și a părților din Europa pe care se întinde România Mare de azi, — încă din 1542, hartă pe care am reprodus-o redusă în Anul XXXIX pag. 392. Acolo s'au tipărit multe cărți și în limba română, ca *Micul Catechism* al lui MARTIN

LUTHER la 1559; diaconii CORESI şi TUDOR au tipărit *Tetravanghelul* (1561) şi *Cetveroevangheliar slavonesc* (1562); CORESI şi cu FORRO, *Tâlcul evangheliilor* şi *Molitvenic Românesc* în 1564; CORESI, *Psaltirea* (1577), *Pravila* (1580) şi *Cartea ce se chiamă evanghelie cu învăţătură* (1581). Acolo s'a tipărit la 1733 primul calendar românesc intitulat: *«Calendari, acumântâi rumânesc. Aşezat d upă cel sârbesc pe limba rumenească. Ca întru 100 an să slujească,* ca şi cel slovenesc, într'acest chip au fost la Kiev *scos de un mar doctor muscal. S'au tălmăcit într'acest chip acum isvodit şi precum l'am aflat în stampă nouă s'au dat. In Braşov,* Febr. 20. 1733». La urmă scrie: *«Sfârşitul Călindarului, prin osteneala diaconului Soanul Petru dela Braşov şi lui Dumnezeu laudă».* La această tipografie GHEORGHE LAZĂR şi-a tipărit *Povăţuitorul tinerimii către adevărata şi drépta cetire»:* tot acolo s'a tipărit în 1837 *Gazeta de Transilvania,* căreia îi reproduce prima pagină din primul număr, şi ca Supliment al ei *«Foaia pentru Minte, Inimă şi Literatură»* din care reproduce Nr. din 21 Iunie 1848 în care ANDREI MUREŞEANU şi-a tipărit poezia sa „*Deşteaptă-te Române*" sub titlul *«Răsunet».* Tot acolo a eşit în 1837 şi *«Foile Duminicii spre înmulţirea cei de obşte cunoştinţe. Alcătuite de o soţietate de învăţaţi. In toată Sâmbăta ivite».*

Să revenim acum la HONTERUS. Iată datele ce le găsim privitoare la vieaţa lui dintre care unele concordă cu cele date în Anul XXXIX pag. 390—392. El s'a născut la Braşov în Schwarzgasse la 1498. Nu se cunoaşte luna şi ziua naşterii. După naştere urma să poarte numele IOHANN GRASS; nici în această publicaţie nu se stabileşte indiscutabil de unde şi-a luat numele de HONTERUS. Primele studii până la 1515 le-a făcut la Braşov, după care a plecat la Viena unde a stat până la 1525; acolo a făcut artele libere şi dreptul la Universitate luând titlul de *Magister.* Nu se ştie unde a fost în anii 1526—1528. In 1529 a fost prin Regensburg ca refugiat. In 1530 se duce în Cracovia unde se face profesor, tipăreşte prima lui *Gramatică* şi prima ediţie din *Cosmografia* lui, în proză şi fără hărţi. In anul următor se duce la Braşov iar în 1532 se duce la Bassel unde învaţă arta tipografiei la renumitul tipograf IOHANN FROBENIUS, şi în special arta xilografiei, în care HONTERUS a căpătat un renume european. Acolo a tipărit prima hartă a Transilvaniei: *«Chorographia Transilvaniae»* şi două hărţi ale Cerului. In anul 1533 se întoarce la Braşov prin Casovia, Oradea, unde se stabileşte şi stă până la moartea sa în 23 Ianuarie 1549.

In călătoria lui prin Europa, s'a pus în curent cu ideile reformatoare ale lui MARTIN LUTHER şi a devenit un reformator din cei mai convinşi. MARTIN LUTHER a spus despre el: *«El e în adevăr un Apostol pe care Domnul l'a trimis Ţărilor ungureşti».* MELANCHTON îl avea în mare stimă. Un biograf al lui spune că HONTERUS era poet, orator, filosof şi matematician Toate acestea şi mai ales propaganda religioasă, cerea publicaţiuni din partea lui şi de aceea, cum a ajuns la Braşov, a şi organizat la 1533 prima tipografie. Acolo a tipărit el cărţi şcolare latine, greceşti, germane; a tradus cărţi vechi de filosofie, retorică, morală, poezie, drept; a tipărit cărţi originale şi traduse pentru reforma luterană; calendare, etc. In tipografia lui, la 1541 iese celebra sa *Cosmografie* în

versuri, cu 1260 hexametri, în latină şi germană şi în anul următor însoţită de atlas cu 16 hărţi. El a organizat şcolile săseşti din Braşov şi a fost profesor la ele, şi le-a făcut şi o bibliotecă. Din 1544 el a fost pastorul oraşului pentru reformaţi.

Reprodusă după o carte postală a atelierului Weiss & Fuchs, Braşov.

Marea activitate ştiinţifică, literară, teologică şi socială a lui HONTERUS a făcut ca el să nu fie uitat. La 1689 NICOLAUS MÜLLER, spunea despre el:

«Was? ist Herr Honter todt? der treuen Kirchen-Lehrer, Den Gott verordnet hat zum Vaterlands-Bekehrer?

Was sag ich? ist Er todt? O nein! das glaub ich nicht, Es lebt noch sein Geblüt, auch lebt sein gut Gerücht».

La 20 August 1898, s'a sărbătorit împlinirea a 4 secole dela naşterea lui HONTERUS. Cu această ocaziune saşii din Braşov i-au ridicat o statuie lângă Biserica Neagră, — unde a slujit el, — având într'o mână un manuscris, iar cu dreapta arătând spre casa unde îşi instalase el tipografia. Pe partea din spate este inscripţia:

«Dem Licht vom Himmel brach er neue Bahnen, Sein Speer und Schild war das gedruckte Wort».

I. IONESCU.

CERERI

249. Cum ar fi mai bine să se zică: *patrat* sau *pătrat?* Chiar prin cărţile mai vechi de matematice se întrebuinţează amândouă aceste cuvinte. In caz când unul din ele nu ar putea fi îndepărtat pe motive serioase, nu am putea profita de ambele, pentru a deosebi figura geometrică de puterea a doua a unui număr? S'ar evita cu modul acesta unele confuziuni în vorbirea matematică. Astfel am zice de exemplu:

« Pătratul diagonalei unui patrat este îndoitul pătratului laturii sale »

I. IONESCU.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

PAUL POPOVAT. *Critique des propulseurs.* Paris 1917.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

R. E. DAY M. A. *Electric light arithmetic.* London 1897.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

* * *

Cărţile ce urmează au fost donate de *Institutul Naţional Român pentru studiul amenajării şi folosirii izvoarelor de energie. (I. R. E.)* prin D-l C. BUŞILĂ, Inginer:

1. E. ABASON. Contributions à l'étude du coéfficient de déformation des fonctions non sinusoïdales. Bucureşti 1927.

2. C. I. BUDEANU. Puissances réactives et fictives. Bucureşti 1927.

3. C. I. BUDEANU. Aspecte actuale ale problemei tracţiunii electrice în legătură cu adoptarea electrificării în România. Bucureşti 1931.

4. C. I. BUDEANU. Tracţiunea electrică pe liniile Căilor ferate în cadrul problemelor economiei naţionale. Bucureşti 1933.

5. C. I. BUDEANU. Asupra politicei şi legislaţiunii energetice în România. Bucureşti 1934.

6 C. I. BUDEANU. Rôle économique et social des entreprises de production et distributions d'énergie électrique. Bucureşti 1934.

7. C. I. BUDEANU. La question des grandeurs et unités électromagnétiques. Bucureşti 1934.

8. I. S. GHEORGHIU. Le problème général de la répartition des puissances actives et réactives dans la marche en parallèle des centrales électriques. Bucureşti 1931.

9. I. S. GHEORGHIU. Domeniul electrificării pe reţeaua C.F.R. Bucureşti 1933.

10. I. S. GHEORGHIU. Aspecte din evoluţia maşinilor electrice. Bucureşti 1934.

11. I. S. GHEORGHIU. Etude économique de l'électrification d'un réseau de chemin de fer avec application à la ligne Câmpina—Braşov des Chemins de fer Roumains. Bucureşti 1934.

12. M. D. HANGAN. Studiul experimental în technica construcţiunilor cu aplicaţiune la barage. Bucureşti 1931.

13. Cr. Mateescu. Contribuţie la stabilirea prescripţiunilor pentru calculul liniilor aeriene de transmisiune a energiei electrice. Bucureşti 1927.

14. Cr. Mateescu. Amenajarea raţională a lalomiţei superioare. Bucureşti 1927.

15. Cr. Mateescu. Asupra interconexiunii centrelor de producere şi de consumaţiune a energiei electrice. Bucureşti 1931.

16. Cr. Mateescu. Determinarea coeficienţilor de consumaţiune a câtorva basine hidrografice din România. Bucureşti 1934.

17. C. C. Teodorescu. Calculul probabilităţilor aplicat în industrie. Bucureşti 1932.

18. Gr. C. Vasilescu. Problème de la canalisation du secteur des cataractes du Bas Danube. I-ère Partie 1828. II-ème Partie 1932. Bucureşti.

19. Gr. C. Vasilescu. Debit solide du Danube. Evolution récente Delta. Bucureşti 1929.

20. Gr. C. Vasilescu. Dunărea internaţională şi transporturile. Bucureşti 1931.

21. M. Vasiliu. Din aspectele problemei combustibililor. Bucureşti 1928.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 691. *Dintr'un dreptunghiu de lungime şi de lăţime date să se taie dreptunghiul de lăţime dată şi de lungime cât mai mare. Discuţie.*

I. Ionescu.

Să notăm dreptunghiul dat ABCD cu T şi fie $AB = CD = a$ *lungimea* lui, pe care, pentru *orientare,* să o punem *orizontală* şi $BC = AD = b$ *lăţimea lui,* pusă *verticală.* (Fig. 1).

Fie $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2} = d$ lungimea diagoanelor şi O intersecţia lor, adică *centrul* lui T.

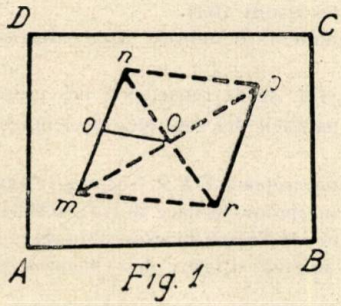


Fig. 1

După enunţ ar trebui să avem $a \geqslant b$. Egalitatea are loc pentru T *pătrat.* Vom da însă lui a şi b sensul general de *dimensiuni,* aşa că putem avea şi $a < b$. In acest caz în enunţ am înlocui *lungime* prin *lăţime* şi reciproc.

Să facem acum apel la câteva noţiuni de topologie, aproape evidente. *Conturul* sau *frontiera* lui T împarte planul său în o *regiune interioară* şi o *regiune exterioară.* Un punct

aparţine lui T dacă e în regiunea interioară sau pe frontieră. El este în regiunea interioară dacă în jurul lui luat drept centru se poate descrie un cerc cu o rază finită oricât de mică. Un segment de dreaptă aparţine lui T dacă extremităţile lui nu sunt niciuna în regiunea exterioară. Dacă însă capetele lui nu sunt interioare, segmentul se zice că este *în întregime în interior*. Dacă un segment de dreaptă aparţine lui T şi segmentul simetric faţă de O aparţine lui T, ceeace se vede uşor rotind T de 180° în jurul lui O. Două segmente simetrice fiind paralele, unul poate fi adus peste altul prin translaţie rectilinie. In această mişcare mijlocul segmentului trece prin O.

Despre un dreptunghiu U vom zice că *este în* T, *face parte din* T şi prin urmare *se poate tăia din* T dacă toate punctele lui U sunt puncte ale lui T. Dacă U nu are puncte pe frontiera lui T vom zice că U e *în întregime* în T.

Fie acum V centrul lui U. Putem da lui U o translaţie de direcţiunea şi mărirea VO şi el nu va ieşi din T, căci în această mişcare diagonalele lui U se mişcă numai cu jumătate din drumul până a ajunge simetrice cu prima lor poziţiune. Prin acea translaţie centrul lui U e adus în O, centrul lui T. Zicem că U a fost mişcat paralel cu el însuşi până a devenit *central*. Orice U din T are un corespondent al său central. Reciproc, un U central reprezintă pe toţi U paraleli şi egali cu el cari se pot construi în T. Deci toţi U centrali, care se pot construi, dau o reprezentare canonică pentru toţi U ce se pot tăia din T. Rezultă de aci că e destul a ne preocupa numai de U centrali, în studiul nostru. Dintre aceştia pe noi ne interezează numai aceia care au una din dimensiunile de o lungime dată l. Dintre aceştia apoi, pentru o orientare anumită a lui U, ne interesează numai aceia, U_m, care are cealaltă dimensiune z cât mai mare. Existenţa unui asemenea maximum e evidentă, căci $z \leqslant d$, diagonala fiind cel mai lung segment ce se poate trasa în T. Orice alt segment din T are proiecţiile pe AB şi AD mai mici ca a şi b şi deci el e mai scurt ca $\sqrt{a^2 + b^2} = d$.

Zicem acum că un U_m oarecare trebuie să aibă două vârfuri opuse pe frontiera lui T. In adevăr, fie *mnpr* un U cu toate vârfurile lui interioare. (Fig. 2). Putem deci înconjura aceste vârfuri cu patru cercuri mici egale interioare lui T. Să ducem tangentele $m'n'$ şi $p'r'$ cele mai depărtate de O. Punctele lor de contact fiind in-

terioare, segmentele $m'n'$ și $p'r'$ sunt interioare. Dreptunghiul $m'n'$ $p'r'$ e mai lung ca $mnpr$. Deci acesta nu poate fi un U_m. Spo-

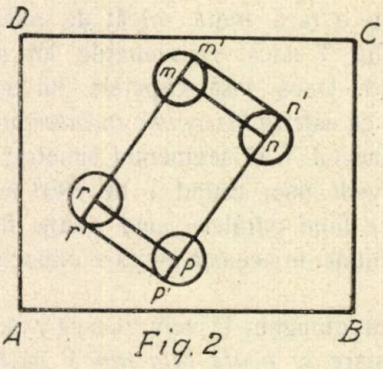


Fig. 2

rirea lui z devine imposibilă numai dacă deodată două vârfuri opuse sunt pe frontiera lui T. (Fig. 3). Aceste vârfuri pot fi m și p sau n și r.

Sunt câteva cazuri simple, banale, pentru U_m pe care le vom exclude dela început. Astfel e cazul când un vârf al lui U_m, (fie m), ar cădea în un vârf al lui T, (fie C), căci atunci vârful opus din U_m, (p) ar cădea în vârful opus al lui T, (A) și U_m s'ar reduce la o diagonală a lui T, (AC). Am avea astfel cazul unui *dreptunghiu nul,* care nu ne interesează. Excludem de asemenea cazurile când U_m ar avea o latură așternută pe o latură a lui T, căci atunci laturile lui U_m ar fi paralele cu ale lui T. Deci U_m s'ar tăia orizontal din T, paralel cu AB și ar avea $z = a$ dacă $l \ll b$, sau paralel cu AD, adică vertical, și ar avea $z = b$ dacă $b \ll l \ll a$. Tăieturile s'ar putea face în o infinitate de moduri.

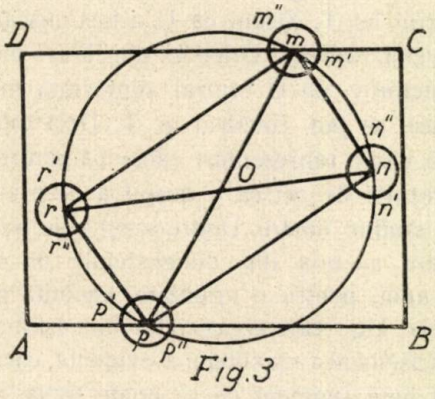


Fig. 3

Să presupunem dar că U_m ar avea m pe DC și p pe AB, iar n și p interioare lui T. Descriem iar cercuri mici din centrele m, n, p, r așa ca acelea din n și r să rămână interioare, iar cele din m și p să nu cuprindă vreun vârf al lui T. Construim cercul

K circumscris lui *mnpr*, care va avea centrul în O. Fie m', m'' intersecţiile lui cu cercul *m*. Mijlocul coardei comune $m'm''$ e pe linia centrelor O *m*, şi între aceste puncte. Punctele m' şi m'' nu pot fi dar de o dată exterioare, sau deodată pe frontieră, sau unul pe frontieră şi altul exterior. Rămâne ca unul din ele, (fie m') să fie interior lui T. Analog pentru vârful *p*.

Să vedem acum dacă prin o schimbare de orientare a lui U_m nu am putea să-l mai sporim. Pentru aceasta să dăm lui U_m o rotaţie în jurul lui O, care să aducă pe *m* în m'. Atunci *n*, *p*, *r* vor veni respectiv în n', p', r', şi U_m va lua poziţiunea $m'n'p'r'$. Acesta este deci în întregime în T, şi după cele spuse înainte nu mai poate fi un U_m pentru noua orientare dată, căci *z* al lui se poate spori. Vom numi Z pe cel mai mare dintre U_m ce s'ar putea obţine prin rotaţii în jurul lui O. Acest Z va fi soluţia căutată a problemei.

Pentru ca un U_m să fie Z, trebue ca dându-i o rotaţie să nu poată fi sporit. Insă cât timp rotaţia este posibilă, *sporirea* nu poate înceta. Trebue dar ca o rotaţie, în condiţiile arătate, să nu mai poată fi efectuată. Pentru aceasta rotaţia care aduce pe *m* în interiorul lui T trebue să scoată pe *n* afară din T. Trebue dar ca *n* să fie situat pe frontieră. Analog şi pentru vârful opus *r*. Cu alte cuvinte Z este *înscris* în T.

Fie MNPR (Fig 4) un asemenea dreptunghiu înscris. Fiecare vârf al lui e pe o latură diferită a lui T. Am exclus cazul când ar fi coincidenţe de vârfuri la Z şi T, sau când Z ar avea laturi aşternute pe ale lui T. Apoi M şi N nu pot fi pe laturi opuse, căci MR şi NP fiind dirijate de aceeaşi parte a lui MN, dacă una din ele intră în T cealaltă iese din T. In fine niciunul din punctele M, N, P, R nu pot fi la mijloc de latură a lui T, căci atunci (Fig. 3), punctele m' şi m'' sunt interioare, şi dacă o rotaţie de un sens scoate pe *n* afară din T, cea de sens opus îl introduce în T pe când m' şi m'' rămân

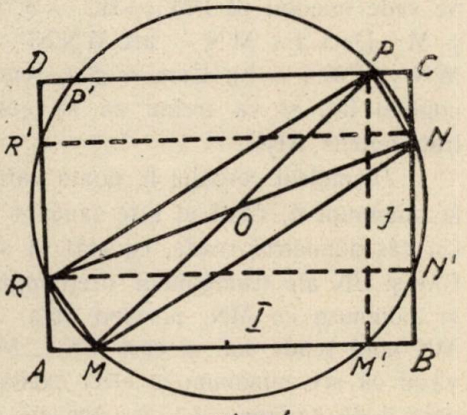


Fig. 4.

în interior pentru ambele rotații. Deci U_m ar avea vârfuri interioare și ar putea fi sporit. Mai mult încă, dacă I e mijlocul lui AB și J al lui BC, atunci dacă M este pe AI, punctul N trebue să fie pe CJ, căci numai așa o rotație în jurul lui O, care introduce pe M în interior, scoate pe N în exterior, sau dacă M e pe BI, punctul C să fie pe BJ. Deci latura $MN = l$ trebue să fie cuprinsă, sau în triunghiul IBJ sau în trapezul AIJC. Pe figură MN e pus în această zonă. Unei astfel de poziție a lui Z îi vom zice poziția *inclinată* și e de văzut dacă ea dă soluțiuni mai favorabile de cât cea *verticală* sau *orizontală*.

Pentru a studia această chestiune să presupunem că MN pornește dela poziția orizontală pe AB până la cea verticală pe BC. O poziție oarecare o vom fixa-o prin $\sphericalangle NMB = \alpha$ pe care MN îl face cu AB. Vom presupune dar că α variază dela O la $\frac{1}{2}\pi$. Soluțiunile celelalte se pot deduce prin simetrie față de axa verticală a lui T. Se vede că o soluțiune găsită dă o alta prin simetrica ei față de acea axă.

In studiul nostru sunt de deosebit trei cazuri după mărimea lui l față de a și de b.

Cazul I. $a < l \leqslant d$.

Aci nu mai încape poziționea verticală sau orizontală, lățimea dreptunghiului căutat întrecând lungimea celui dat; deci Z are o poziție înclinată. Cercul K mai taie laturile lui T în M', N', P', R' simetricele lui M, N, P, R față de mijloacele laturilor respective. Se vede imediat că $PM' = BC = b$. Punctele N și N' sunt între P și M'. Deci arc M'N' < arc M'N'NP, și deci și între coarde avem $M'N' < PM' (= b)$. Cum $b \leqslant a$, reiese că MN nu poate fi în triunghiul IBJ și va trebui să se găsească ca pe figură în zona trapezoidală AIJC.

Diametrul cercului K poate varia dela maximum său $AC = d$ la minimum a, când el este tangent la mijloacele laturilor AD, BC. Cu cât diametrul scade, cu atât M și N se apropie de B. Catetele BM și BN ale triunghiului dreptunghic MBN scad, și deci scade și ipotenusa lui MN, pornind dela valoarea ei maximă $AC = d$. MN apoi scade sub a, căci MN < MP, diametru al lui K, care am văzut că are minimum a. Deci există o singură pozițione a lui MN care îi dă lungimea $l > a$. Această poziție (și cea simetrică față de axa verticală a lui T) sunt cele două soluții ale problemei. Se

vede că MN poate lua și valoarea a pentru o anumită inclinare, afară de cea limită.

In cazul de față, în sensul uzual al cuvintelor, nu poate fi vorba de cât ca dreptunghiul căutat să aibă lungimea dată și lățimea cât mai mare.

Cazul II. $b < l \leqslant a.$

In acest caz Z poate fi tăiat vertical, așternând $MN = l$ pe AB. Lungimea maximă z este atunci b. In poziția înclinată (Fig. 4) MN nu ar putea fi decât în zona figurată unde $l > b$. In zona triunghiulară am arătat că $M'N' < b$. In zona trapezoidală a doua dimensiune este $NP = M'N' < b$. Deci poziția înclinată dă a doua dimensiune mai scurtă. Rămâne dar ca soluțiune numai cea verticală.

Avem de observat aci că cel mai mare pătrat ce se poate scoate din T este cel cu aria b^2. El corespunde cazului când $l = b$. De altfel Z nu poate fi pătrat de cât dacă T e pătrat.

Cazul III. $0 < l \leqslant b.$

Pozițiile orizontală și verticală sunt posibile. A doua dă lungimea $z = a$ mai mare ca prima. Pentru poziția înclinată, MN trebue luat în zona IBJ care dă $MN < b$. Să vedem dacă pentru poziții înclinate putem avea $z > a$. Se recunoaște imediat că asemenea soluții sunt posibile, căci pentru l foarte mic z se apropie de $d > a$. Să căutăm dar pentru ce poziție $z > a$ și în ce condițiuni ea se poate prezenta. Din cauza simetriei față de axa orizontală a lui T, avem $N'P' = NM = l$. Am găsit apoi că MN are o poziție care îi dă lungimea a. Deci există o poziție care ne dă $N'P' = a$. Dacă R' e proiecția lui N pe AD, atunci $NR = CD = a$. In acea poziție, coardele R'N și P'N' din cercul K fiind egale, și arcele corespondente R'P'PN și P'PNN' vor fi egale. Aceste arce au o parte comună P'PN, pe care scoțând-o din ele, rămân arcele egale R'P' și NN'. Dar arcele R'P' și PN, fiind cuprinse între două paralele, sunt egale. Deci arc PN = arc NN'. Conchidem de aci egalitatea coardelor PN și NN'.

Acum, când cercul K scade dela diametrul lui maximum d la cel minimum a (când el e tangent în J la BC), coarda NN' scade dela b la O iar coarda PN crește dela O la o valoare limită inferioară lui b. Rezultă că este o mărime a lui K care face ca să se egaleze cele două coarde la o lungime comună s. Prin urmare

când $N'P' = a$ avem $NN' = PN = s$, și aceasta se întâmplă pentru o singură poziție a lui MN. Altfel $NN' \gtrless PN$ dă $N'P' \gtrless a$ și $l \gtrless s$.

Iată o construcție grafică pentru a verifica condițiile de mai sus. (Fig. 5). Pe BC punem segmentul nn' așa ca mijlocul lui să vie în J. Luăm acest segment $nn' = M'N' = l$, sensul lui fiind același cu al lui NN'. Ducem cercul cu centrul O și raza On, care taie pe CD în p și pe AM în m'. Punctele m', n', n, p sunt analoage cu M', N', N, P. Dacă $nn' < pn$ suntem înainte de egalizare a arcelor, și deci $nn' < s$, adică $M'N' > s$, iar $N'P = z < a$. Altfel $M'N' > s$ și $N'P = z > s$.

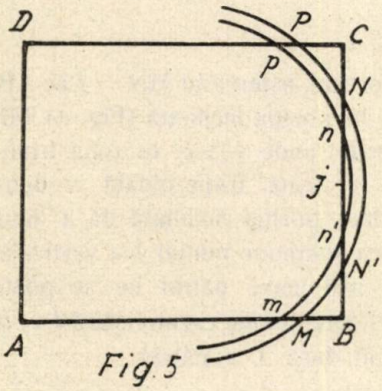


Fig. 5

In conculziune, dacă $l < s$ atunci Z este înscris sau înclinat; altfel trebue tăiat orizontal. Dacă $l = s$ atunci ambele soluțiuni au aceași lungime maximă a.

Să găsim condițiunea care face $l = s$. Să presupunem efectuată construcțiunea care ne dă $MN' = NN' = s$. Fie $BM' = x$, deci $AM' = a - x$. Avem apoi $MN = a$, $BN = \frac{1}{2}(b+s)$, $BN = \frac{1}{2}(b-s)$. Unghiurile NMB, PNC sunt egale ca având laturile perpendiculare, iar M'N'B și CNP ca simetrice față de axa orizontală a lui T. De aci reiese egalitatea unghiurilor NMB, M'N'B în triunghiurile dreptunghice BMN, BM'N care sunt prin urmare asemenea și ne dau:

$$\frac{s}{a} = \frac{x}{\frac{1}{2}(b+s)} = \frac{\frac{1}{2}(b-s)}{a-x}$$

din care eliminând pe x scoatem:

$$s^3 + bs^2 - 3a^2 s + a^2 b = 0.$$

Pentru $s = -\infty, 0, b, +\infty$ prima parte are semnul $-, +, -, +$. Deci ecuația are o singură rădăcină admisibilă în intervalul 0, b. Insemnând cu $f(s)$ prima parte a ecuației de mai sus, avem înlocuind s cu l:

$$f(l) = l^3 + bl^2 - 3a^2 l + a^2 b \gtrless 0 \quad \text{ne dă} \quad l \gtrless s$$

$$f(l) = l^3 + bl^2 - 3a^2 l + a^2 b = 0, \quad \text{ne dă} \quad l = s.$$

Concluziile sunt cele date mai înainte.

Să vedem cum se poate găsi Z pentru un MN $= l$ dat. Punem BM $= x$ și BN $= y$. Avem mai întâiu:

$$x^2 + y^2 = l^2. \tag{1}$$

Triunghiurile dreptunghice BMN, CPN fiind asemenea ne dau:

$$x/(b - x) = y/(a - x),$$

$$x^2 - y^2 - ax + by = 0. \tag{2}$$

Simetricul lui B față de O are coordonatele x și y față de axele BM, BN. El se găsește la intersecția cercului (1) cu iperbola echilateră (2). Odată acest punct găsit, avem pe x și pe y, cu care putem fixa poziționea lui MN și apoi a construi dreptunghiul căutat. Soluția nu e dar posibilă cu rigla și compasul.

Eliminarea lui y din ecuațiile (1) și (2) ne duce la ecuația de gradul IV:

$$4x^4 - 4ax^3 + (a^2 + b^2 - 4l^2)\,x + l^2(l^2 - b^2) = 0.$$

Cu această ecuație se poate calcula x numericește când se dau valori numerice pentru a, b și l. Aproximația se poate duce cât de departe dorim.

Cu aceasta problema este complet rezolvată.

INGINER ION I. IOANID.

(26 August 1935).

Notă. Problema aceasta a fost încercată de foarte mulți din corespondenții *Gazetei Matematice* în cei 33 ani de când a fost propusă și a stat nerezolvată complet. Nicio soluțiune primită nu examina toate cazurile posibile. Problema, după cum se vede aci, cere o cercetare minuțioasă. Primul care a găsit soluția din ultimul caz și condiția de a tăia dreptunghiul înclinat, a fost D-l GENERAL A. TĂNĂSESCU pe când era elev al Școalei fiilor de militari din Iași.

Soluțiunea cea mai bună, cu o cercetare mai amănunțită, ne-a fost trimisă de autorul soluției pe mai sus în 1913, pe când era elev al fostei Școale Naționale de Poduri și Șosele. Soluțiunea cerea oarecare rectificări și completări. D-l I. I. IOANID fiind informat că soluția acestei probleme vechi va apare în acest număr jubiliar, ne-a adus o soluțiune completă și elegantă pe care am dat-o mai sus, cu oarecare condensări.

Chiar în ultimii ani au mai venit soluțiuni la această problemă, însă foarte superficiale. Astfel un licențiat în matematice chiar, văzând că pentru lățimi foarte mici dreptunghiul trebue tăiat *cam* după diagonală, a conchis imediat pe simpla bază a acelui «*cam*» că dreptunghiul căutat are axa lui longitudinală după diagonala celui dat!.

I. I.

PROBLEMA 944. *Ştiind că una din rădăcinele ecuaţiei*

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ este } 0{,}61\ldots$$

Să se determine valorile întregi pe care le pot avea coeficienţii a, b, c.

A. G. IOACHIMESCU.

Să punem $\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q$, p şi q numere raţionale, ecuaţia dată devine

(1) $x^2 + px + q = 0$, punând $x = 0{,}61 + y$ ecuaţia (1) devine

(2) $y^2 + (p + 1{,}22)\, y + q + 0{,}61\, p + 0{,}3721 = 0$;

dacă ecuaţia (1) admite rădăcină $x_1 = 0{,}61\ldots$, ecuaţia (2) va admite o rădăcină y_1 cuprinsă între 0 şi 0,01 ; pentru aceasta trebue să avem:

(3) $(q + 0{,}61\, p + 0{,}3721)\ (q + 0{,}62\, p + 0{,}3844) < 0.$

Reciprocul este adevărat : dacă condiţia (3) este îndeplinită, cum prima parte din inegalitatea (3) reprezintă produsul rezultatelor substituţiilor lui 0 şi 0,01 în prima parte a ecuaţii (2), înseamnă că această ecuaţie are o rădăcină cuprinsă între 0 şi 0,01, deci ecuaţia (1) va avea o rădăcină cuprinsă între 0,61 şi 0,62, această rădăcină poate fi reprezentată prin $x_1 = 0{,}61\ldots$

Dacă în raport cu axele coordonate dreptunghiulare Op şi Oq, considerăm dreptele reprezentate prin ecuaţiile

(4) $q + 0{,}61\, p + 0{,}3721 = 0$ şi $q + 0{,}62\, p + 0{,}3844 = 0,$

aceste drepte împart planul în 4 regiuni : regiunea I, aceea unde se află origina axelor coordonate ; regiunea II adiacentă cu precedenta de partea ordonatelor negative, regiunele III şi IV opuse respectiv regiunelor I şi II. Condiţiunea (3) va fi îndeplinită pentru punctele planului situate în regiunele II şi IV.

Să dăm lui p o valoare raţională arbitrară $p = \alpha : \beta$, din ecuaţiile (4) vom putea calcula două valori

$$q_1 = -0{,}61\ (\alpha : \beta) - 0{,}3721 \text{ şi } q_2 = -0{,}62\ (\alpha : \beta) - 0{,}3824,$$

luând pentru q o valoare raţională oarecare $\alpha' : \beta'$, cuprinsă între q_1 şi q_2, ecuaţia (1) va fi

$$x^2 + (\alpha : \beta)\, x + (\alpha' : \beta') = 0,$$

gonind numitorii vom deduce pe a, b, c.

Exemple. I. Luând spre exemplu $p = \alpha : \beta = 3 : 5 = 0{,}6$, avem

$$q_1 = -0{,}61 \times 0{,}6 - 0{,}3721 = -0{,}7381\ ,$$

$$q_2 = -0{,}62 \times 0{,}6 - 0{,}3844 = -0{,}7564$$

luând spre exemplu $q = -0{,}75 = -3 : 4$ obținem ecuația

$$x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{3}{4} = 0 \text{ sau } 20x^2 + 12x - 15 = 0,$$

care au una din rădăcini

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{336}}{20} = 0{,}616\ldots$$

II. Să luăm

$$p = -5 : 2 = -2{,}5,$$

avem

$$q_1 = 0{,}61 \times 2{,}5 - 0{,}3721 = 1{,}1529\ ,$$

$$q_2 = 0{,}62 \times 2{,}5 - 0{,}3844 = 1{,}1656$$

luând

$q = 1{,}16$, avem ecuația $x^2 - 2{,}5x + 1{,}16 = 0$

sau

$100x^2 - 250x + 116 = 0$, care are una din rădăcini

$$x_1 = \frac{125 - \sqrt{4025}}{100} = 0{,}615\ldots$$

A. G. I.

Soluții date de D-nii: I. N. CONSTANTINESCU (București), PETRE CRISTEA (București), I. MĂTIEȘ (Cluj), I. MURĂROIU (Brașov).

PROBLEMA 1773. *Să se arate că în spațiul cu patru dimensiuni, două plane pot fi deodată paralele și perpendiculare unul pe altul.*

I. IONESCU.

Soluția acestei probleme se găsește în Nota *„Asupra problemei 1773"* publicată de D-l INGINER ȘEF I. I. CHIȚULESCU în numărul de față și prin aceasta problema se consideră rezolvată.

PROBLEMA 2709. *Pentru a transporta un bloc de piatră dispunem de 5 inşi. Să se aranjeze transportul aşa fel ca fiecare din ei să suporte absolut aceeaşi greutate.*

I. IONESCU.

Soluţia acestei probleme este dată de D-l ING. ŞEF I. I. CHIŢULESCU în articolul său: *„Rezolvarea problemelor practice de matematici"* publicat în numărul de faţă. Prin aceasta problema se consideră rezolvată.

PROBLEMA 2972. *Să se demonstreze identitatea:*

$$15 \sum_{x=1}^{x=n} x\,(x+1)\,(x^2+x+a) = n\,(n+1)\,(n+2)\,(3n^2+6n+5a+1).$$

GH. ZAPAN.

Soluţie dată de D-nii: M. I. ADAM, N. N. ALDEA, G. D. AMĂRĂSCU, I. S. ANTONIU, EUG. I. BĂLAN, M. P. BOGDAN, N. G. BOTEA, N. BRĂTESCU, C. I. CIORĂNESCU, I. CONSTANTINESCU, I. COŞEREANU, V. COŞNIŢĂ, DOBRESCU-BĂBICI, TR. A. DORDEA, I. N. DRAGOMIR, M. I. FOCŞENEANU, C. E. GEORGESCU, C. I. GEORGESCU, FL. E. GEORGESCU, V. GEORGESCU, GH. TH. GHEORGHIU, P. I. GHIŞOIU, V. GHIŢESCU, C. P. GOILAV, E. ILIESCU, BR. I. IONESCU, C. T. IONESCU, H. P. IONESCU-BISS, L. I. IONESCU, I. M. IONIŢĂ, I. N. IORDACHE, J. TH. LĂZĂRESCU, ŞT. FL. LĂZĂRESCU, ŞT. MARIN, G. MATEESCU, C. C. MEREUŢĂ, A. MICLESCU, C. D. MIHĂESCU, FL. I. NEGRETZU, I. M. NICOLAU, E. G. OPRIŞAN, A. PAMULA, A. G. PANAITESCU, M. I. PĂTROIANU, I. POPA, T. I. POPA, O. G. POPEA, I. CHR. POPOVICI, I. TH. POPOVICI, M. TH. POPOVICI, D. I. POPOVICI-PUIU, T. POPOVICIU, I. ŞERBĂNESCU, GH. D. SIMIONESCU, GH. STANCU, E. ŞTEFĂNESCU, I. STOENESCU, T. STOICESCU, I. ST. TEODORESCU, V. C. VASILESCU şi I. C. VASILIU.

Notând ca deobiceiu prin

$$S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k,$$

prima parte a identităţei se scrie

$$15 \sum_{x=1}^{x=n} x\,(x+1)\,(x^2+x+a) = 15 \sum_{x=1}^{x=n} [x^4 + 2x^3 + (a+1)\,x^2 + ax]$$

$$= 15\,[S_4 + 2S_3 + (a+1)\,S_2 + aS_1].$$

Ţinând seamă de valorile cunoscute ale primelor patru sume S_k putem scrie mai departe:

$$15\sum_{x=1}^{x=n} x\,(x+1)\,(x^2+x+a) = \frac{1}{2}n\,(n+1)\,(2n+1)\,(3n^2+3n-1)$$
$$+\frac{15}{2}n^2\,(n+1)^2+\frac{5}{2}(a+1)n\,(n+1)\,(2n+1)+\frac{15}{2}an\,(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}[(2n+1)\,(3n^2+3n-1)+15n\,(n+1)$$
$$+5\,(a+1)\,(2n+1)+15a].$$

Făcând calculele se găseşte că paranteza mare este egală cu $6n^3+24n^2+26n+4+10a\,(n+2)=2\,(n+2)\,(3n^2+6n+5a+1)$ valoarea care introdusă în formula precedentă ne dă tocmai identitatea din enunţ.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4255. ABC şi A'B'C' *fiind respectiv triunghiul de referinţă şi triunghiul său ortic, perpendicularele duse din centrele cercurilor lui* EULER *ale triunghiurilor* AB'C', BC'A', CA'B' *pe laturile corespunzătoare ale triunghiului de referinţă, sunt concurente.*

CONST. IONESCU-BUJOR.

1°. *Soluţie* dată de D-l LOCOT. A. D. STAN (Cluj).

Fie β' şi γ' proecţiile punctelor B' şi C' respectiv pe AB şi AC. Prin β' şi γ' trec: cercul lui EULER al triunghiului AB'C' şi cercul lui TAYLOR al triunghiului ABC.

Insă $\beta'\gamma'$ şi BC sunt paralele, ambele fiind antiparalelele cu B'C' în unghiul A, încât perpendiculara, dusă din centrul cercului lui EULER al triunghiului AB'C' pe BC, e perpendiculară şi pe $\beta'\gamma'$ şi trece astfel prin centrul cercului lui TAYLOR al triunghiului ABC.

Analog se arată şi pentru celelalte perpendiculare că trec prin centrul cercului lui TAYLOR al triunghiului de referinţă.

2°. *Soluţie* dată de D-l GEORGE SILAŞ, student (Cluj).

Insemnând cu H ortocentrul triunghiului de referinţă, AH e diametrul cercului AB'C'.

Perpendiculara dusă din centrul cercului lui EULER al triunghiului AB'C' pe BC, fiind paralelă cu diametrul AH al cercului

AB'C', trece prin A'', mijlocul laturii B'C'. Problema se reduce la dovedirea ortologiei dintre triunghiul de referinţă şi A''B''C'', complimentarul triunghiului ortic.

Cum perpedicularele, duse din vârfurile triunghiului ABC pe laturile respective ale triunghiului A''B''C'', sunt perpendiculare şi pe laturile triunghiului A'B'C', se întâlnesc în centrul cercului ABC; iar triunghiurile ABC şi A''B''C'' sunt ortologice.

3°. Au mai rezolvat problema D-nii: N. N. MIHĂILEANU, student (Bucureşti), IOAN CURCHI, student (Bucureşti), CEZAR IVĂNESCU (Bârlad) şi A. MIRCEA (Constanţa).

4°. *Note: a)* Concentrându-se rezultatele celor 2 soluţii, cum centrul cercului lui TAYLOR este şi centru al cercului înscris în complimentarul triunghiului ortic, se obţine soluţia problemei 212, pe care am propus-o în *Curierul Matematic*, Vol. III, pag. 32:

« Fie dat triunghiul ABC *şi* A'B'C' *triunghiul său ortic. Centrele cercurilor lui* EULER *ale triunghiurilor* AB'C', BC'A', CA'B' *se află pe bisectoarele corespunzătoare ale complimentarului triunghiului ortic ».*

b) In *Gazeta Matematică* Vol. XXXI, pag. 155, se află soluţionată problema 3294, propusă de D-l M. GRÜMBAUM:

« Fie I *centrul cercului înscris în triunghiul* ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *triunghiul său complimentar. Să se demonstreze că centrele cercurilor lui* EULER *ale triunghiurilor* BIC, CIA, AIB *sunt situate pe bisectoarele triunghiului complimentar* $A_1B_1C_1$ *».*

Aplicând triunghiului A'B'C' al problemei 4255 proprietatea problemei 3294 şi combinând rezultatul cu acel al problemei 212 din *Curierul Matematic*, se deduce proprietatea:

« A'B'C' şi H fiind triunghiul ortic şi ortocentrul triunghiului ABC, *cercurile lui* EULER *ale perechilor de triunghiuri* (AB'C', HB'C'), (BC'A', HC'A'), (CA'B', HA'B') *sunt tangente ».*

C. I. B.

PROBLEMA 4343. *Să se găsească o regulă pentru aflarea directă a restului împărţirii unui număr întreg oarecare prin 32.*

LT. COMANDOR GR. ZAPAN.

Soluţia acestei probleme este dată în articolul *„Divizibilitatea Numerelor"* publicat în acest număr.

Notă. Au rezolvat problema D-nii Sub.-lt. AUREL BĂDESCU, C. BOROŞ, VIRGIL I. COANDĂ, PAUL DOBRESCU, A. IVANCIU, D. LEBĂDĂ, GRIŞA MARGULIS, OCTAVIAN C. PETRESCU, GEORGE SILAŞ, TUDOR STOICESCU şi IOAN C. ŞOVA.

PROBLEMA 4354. *Fie* H_a, H_b, H_c *picioarele celor trei înălțimi în triunghiul* ABC *și* A_b, A_c *simetricele vârfurilor* B *și* C, *față de* H_a; *analog se obțin punctele* B_c, B_a *și* C_a, C_b. *Să se demonstreze că cercurile de diametru* $A_b A_c$, $B_c B_a$, $C_a C_b$, *au ca centru radical ortocentrul triunghiului* ABC.

GH. VASILIU.

Se știe că cercurile descrise pe laturile AB, BC, CA ca diametre, au ortocentrul H drept centru radical; cercurile (BC) și ($A_b A_c$) fiind, prin construcție, simetrice față de înălțimea AH; rezultă că H va fi pe axul radical al acestor două cercuri. Analog se demonstrează că H are aceeași putere și față de cercurile (AB) și ($C_a C_b$); (AC) și ($B_a B_c$). Cum însă H are aceeași putere față de cercurile (AB), (BC) și (CA) urmează că aceeași putere va avea și față de cercurile ($A_b A_c$), ($B_a B_c$), ($C_a C_b$).

c. c. t. d.

Soluții analoage au dat D-ra PREDUȚA BUNGEȚEANU și D-nii: MARIUS MARGULIUS și ILIE ION ȚIȚEICA.

Au rezolvat problema pe alte căi, arătând că cele trei cercuri au față de ortocentru aceeași putere egală cu

$$4R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

D-nii PROF. N. SAGER și NEGREA A. [illegible]-LEONTE.

D-nul S-LT. AUREL EM. BĂDESCU ([illegible]tainbleau) a trimes o elegantă soluție analitică.

Au mai rezolvat problema D-nii: ION GH. ȘABAC, RADU V. APOSTOL, PAUL D. DOBRESCU, NIC. D. ȘTEFĂNESCU (toți elevi ai liceului militar N. FILIPESCU), CEAUȘESCU F. VASILE și LEBĂDĂ I. DUMITRU (ambii elevi ai liceului militar Iași).

GH. V.

PROBLEMA 4361. *Să se demonstreze că pentru a obține direct restul diviziunii unui număr întreg oarecare prin 6, se adună cifra unităților cu de 4 ori suma celorlalte cifre, această operațiune repetându-se asupra tuturor numerelor astfel obținute, până se ajunge la un număr de o singură cifră.*

La fel se poate proceda scăzând din cifra unităților dublul sumei celorlate cifre.

LT. COMANDOR GR. ZAPAN.

Soluţia acestei probleme este dată în articolul «*Divizibilitatea Numerelor*» publicat în acest număr.

Notă. Au rezolvat problema D-ra GELA BĂLĂCEANU şi D-nii : VIRGIL I. COANDĂ, C. CHIRIAC, D. LEBĂDĂ, GRIŞA MARGULIS, GEORGE SILAŞ, TUDOR STOICESCU şi ILIE I. ŢIŢEICA.

PROBLEMA 4427. *Cu începere dela numărul 4 din Decemvrie 1927, Vol. XXXIII,* **Gazeta Matematică,** *propune în mod regulat câte 10 probleme în fiecare număr. Prima problemă propusă în numărul citat avea numărul 3601. Presupunând că sistemul de a se propune câte 10 probleme în fiecare număr s'ar fi perpetuat, se cere:*

1°. *Să se găsească volumele în care prima problemă propusă în numărul 1 ar avea numărul* $100\,N + 1$ *şi volumele în care prima problemă din numărul 1 ar fi avut numărul* $1000\,N + 1$.

2°. *In ce volum şi în ce număr s'ar fi propus în aceste condiţiuni problema cu numărul 1.000.001?*

In numărul 11 din Iulie 1934, Vol. XXXIX, în care prima problemă propusă are numărul 4391, s'au propus 12 probleme. Să se răspundă la aceleaşi întrebări presupunând că se va perpetua noul sistem de a propune câte 12 probleme în fiecare număr.

GENERAL GH. BUICLIU.

1°. In condiţiile enunţului volumul 34 începe cu problema 3691. Intr'un volum propunându-se 120 probleme, ecuaţia care dă răspunsul la prima întrebare este

$$3691 + 120\,m = 100\,N + 1 \qquad (1)$$

unde m este numărul volumelor, începând cu al 34-lea, în care se propun câte 10 probleme.

Din (1) se deduce ecuaţia

$$369 + 12\,m = 10\,N$$

care este imposibilă în numere întregi, având un membru pereche şi unul nepereche.

Deci: *nu va exista niciun volum, în condiţiunile problemei în care prima problemă propusă să aibă numărul* $100\,N + 1$.

Se ajunge la acelaşi rezultat pentru $1000\,N + 1$ şi în general pentru $10^n\,N + 1$ dacă $n > 1$.

2⁰. In primele 33 volume s'au propus 3690 probleme. Până la problema cu numărul 1.000.001 mai trebue să se propună 996.311 probleme. Cum

$$996.311 = 120 \times 8302 + 71$$

cele 996.311 probleme vor fi propuse în 8303 volume şi anume câte 120 în primele 8302 volume şi 71 în volumul al 8303-lea. Cum

$$71 = 10 \times 7 + 1$$

urmează că ultima problemă, cea cu numărul 100.000.1va fi prima problemă propusă în numărul 8 volumul

$$33 + 8303 = 8336.$$

Partea II a problemei se rezolvă la fel. Prima problemă propusă în volumul XL fiind 4415 ecuaţia problemei este

$$4415 + 144m = 10^n N + 1 \qquad n > 1.$$

$$\therefore \qquad 2207 + 72m = 5 \times 10^{n-1} N$$

care este imposibilă în numere întregi dacă $n > 1$.

Deci nici *în cazul II nu vor fi volume în care prima problemă propusă să aibă numărul* $10^n N + 1$, $n > 1$.

Până la problema 1.000.001 trebuie să se mai propună, începând cu volumul XL încă 995.587, Cum

$$995.587 = 144 \times 6913 + 115$$

şi

$$115 = 12 \times 9 + 7$$

urmează ca problema cu numărul 1.000.001 se va propune în numărul 10 volumul

$$39 + 6914 = 6953$$

adică la 15 Iunie 8848.

Dacă *Gazeta Matematică* ar fi să serbeze propunerea problemei 1.000.001, aşa cum serbează anul acesta 40 de ani de existenţă, atunci e probabil că în anul 8848 va avea membri şi abonaţi şi prin alte planete, ba se poate ca redacţia de atunci să dispună de mijloace de a chema la serbare şi sufletele fondatorilor *Gazetei Matematice*.

Notă. D-l C. I. CHIRIAC (Şcoala navală) a rezolvat foarte bine problema aşa cum a fost enunţată la pag. 94 Vol. XL.

GH. B.

EXERCIŢII

1. Să se stabilească egalitatea:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg} a & \operatorname{cotg} a \\ 1 & \operatorname{tg} a & \operatorname{cotg} a \\ \operatorname{cotg}^2 a & \operatorname{cotg} a & \operatorname{tg} a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg}^4 a & \operatorname{cotg}^6 a \\ 1 & \operatorname{cotg}^2 a & \operatorname{cotg}^4 a \\ \operatorname{cotg}^4 a & \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{tg}^4 a \end{vmatrix}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Se consideră funcţiunile:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 1 & x & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & x \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad f(x) \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & x & x^2 \end{vmatrix}$$

$$F(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 \quad , \quad f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2.$$

Urmează

$$F(x) = f(x^2).$$

Deci

$$F(\operatorname{tg} a) = f(\operatorname{tg}^2 a)$$

egalitatea cerută.

PROBLEME PROPUSE

4559. Se cere o proprietate caracteristică a numărului *40*. In enunţul acestei proprietăţi nu trebue să intervină, nici explicit, nici implicit, nici un număr.

ION IONESCU.

4560. Se dă triunghiul ABC, în care unghiul A este obtus Fie N proiecţia pe BC a unui punct oarecare M luat pe arcul BC al cercului circumscris triunghiului dat, arc pe care nu se găseşte vârful A.

Să se împartă arcul BC în trei arcuri parţiale, aşa ca proiecţiunile N ale punctelor M de pe ele să se găsească:

1°. între A şi B;

2°. pe prelungirea laturii AB dincolo de B;

3°. pe prelungirea laturii AB dincolo de A.

G. Ţ.

4561. O masă de greutate P, se sprijină pe patru picioare verticale proiectate în A, B, C şi D.

Știind că în piciorul A se transmite o presiune Q_a, care vor fi presiunile transmise în celelalte picioare? Discuție.

Caz particular: masa e dreptunghiulară și omogenă, iar picioarele sunt la colțurile mesei.

A. G. IOACHIMESCU.

4562. Să se găsească expresiunea generală a numerelor întregi pozitive X și Y, astfel ca $X^n + Y^n$ să fie divizibil cu $X^{n-1} + Y^{n-1}$, n fiind întreg pozitiv.

Aplicațiune pentru $n = 5$.

O. N. ȚINO.

4563. Fie O_b și O_c centrele cercurilor circumscrise pătratelor construite în exterior pe laturile AC și AB ale unui triunghiu ABC; $O_{b'}$ și $O_{c'}$ centrele cercurilor circumscrise pătratelor construite în interior pe aceleași laturi. Cercurile O_b și $O_{c'}$ se mai taie în M, iar O_c și $O_{b'}$ se mai taie în N.

Se cere:

1°. Să se demonstreze că M și N se găsesc pe latura BC și că triunghiul MCN este dreptunghic în C.

2°. Să se demonstreze că dreptele $O_b O_{c'}$ și $O_c O_{b'}$ se întâlnesc pe latura BC în piciorul înălțimii AA'.

3°. Să se calculeze în funcție de laturile triunghiului ABC, distanța între două din punctele O_b $O_{b'}$, O_c, $O_{c'}$ luate în toate modurile posibile.

GENERAL GH. BUICLIU.

4564. Se consideră o figură plană, deformabilă, care rămâne asemenea cu ea însăși.

Să se găsească locul geometric al unui punct al acestei figuri:

a) Când trei drepte ale figurii trec prin trei puncte fixe;

b) Când trei puncte ale figurii rămân pe trei drepte fixe.

D. V. STOICA.

4565. Se dau numerele:

$$A = 6!\ 10!\ 14!\ 15!\ 21!\ 35!\ 210!$$

și

$$B = 2!\ 3!\ 5!\ 7!\ 30!\ 42!\ 70!\ 105!\ 2^{48} \cdot 3^{24} \cdot 5^{12} \cdot 7^{8}.$$

Să se arate că A este divizibil cu B, fără să se facă împărțirea directă.

MAIOR I. LINTEȘ.

4566. Se dau patru puncte: **G. M. 4. O** ca vârfuri ale unui tetraedru regulat cu muchia de $40^m/_m$. Să se construiască tetraedrul, știind că muchia **4O** este o fronto-orizontală, iar muchia **G. M.** este perpendiculară pe planul vertical de proiecțiune și la înălțimea $40^m/_m$ deasupra planului orizontal. Punctul **G.** se găsește în planul vertical de proiecțiune, iar tetraedrul se găsește situat în diedrul I.

ING.-ȘEF I. I. CHIȚULESCU.

4567. Să se arate dacă inegalitatea

$$a_{p-1} < a_p + a_{p+1}$$

poate exista în cazul când a_{p-1}, a_p și a_{p+1} sunt respectiv laturile a trei poligoane regulate de $p-1$, p, $p+1$ laturi, înscrise toate în același cerc de rază R.

LOCOT. C-DOR GH. NICULESCU.

4568. Fie I centrul cercului înscris într'un triunghiu ABC. Bisectoarea AI taie cercul înscris în A (între A și I) și A_2 (pe prelungirea lui AI). Perpendicularele în A_1 și A_2 pe AI întâlnesc latura BC respectiv în A'_1 și A'_2. Analog se construiesc punctele B'_1, B'_2 și C'_1, C'_2. Să se arate:

1°. Că unghiurile $A'_1IA'_2$, $B'_1IB'_2$, $C'_1IC'_2$ sunt drepte:

2°. Dreptele AA'_2, BB'_2, CC'_2 sunt concurente.

AL. PANTAZI.

4569. Să se arate că expresiunea

$$G_n = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3} + \ldots + \sin\frac{\pi}{n} - \pi \log n$$

tinde către o limită bine determinată pentru $n = \infty$.

M. GHERMĂNESCU.

4570. Să se arate că în orice triunghiu între raza cercului înscris, razele cercurilor exînscrise și înălțimi există relațiile:

$$(1)\quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = 2\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right).$$

$$(2)\quad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = 4\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right).$$

LT.-COMANDOR GR. ZAPAN.

4571. Să se rezolve ecuația:

$$a \sec x + b \operatorname{cosec} x = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

GH. POPESCU-BOTOȘANI.

4572. Să se găsească pătratele de trei cifre $N^2 = abc$ astfel că

$$20a + b = 2kN,$$

k fiind unul din numerele 1, 2, 3.

ALEXANDRU NICULESCU.

4573. Să se stabilească relația:

$$1 + S_1 + S_2 \frac{C_n^1}{2} + S_3 \frac{C_n^2}{3} + \ldots + S_n \frac{C_n^{n-1}}{n} = (n+1)^n,$$

unde: $S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$.

PETRE MIRESCU.

4574. Fie I intersecția diagonalelor unui patrulater ortodiagonal, iar P, Q, R, S proiecțiile lui I sub același unghiu α și în același sens pe laturile patrulaterului. Se cere:

1°. Să se arate că patrulaterul PQRS este inscriptibil.

2°. Locurile geometrice ale intersecțiilor laturilor opuse din patrulaterul PQRS, când unghiul α variază.

G. D. SIMIONESCU.

4575. Cercul circumscris triunghiului format de două laturi ale triunghiului de referință, și de tangenta cercului lui EULER, ce trece prin mijlocul laturii a treia, taie această latură a triunghiului de referință în două puncte așa fel că unul e conjugatul armonic, în raport cu capetele laturii, al izotomicului celuilalt.

C. IONESCU-BUJOR.

4576. Pe fiecare latură a patrulaterului ABCD se construesc în exterior câte două triunghiuri așa fel în cât triunghiurile AA_1B, BB_1C, CC_1D, DD_1A să fie asemenea între ele și orientate în același sens, iar triunghiurile AA_2B, BB_2C, CC_2D, DD_2A să fie asemenea între ele și la fel orientate în același sens.

A', B', C', D' fiind mijloacele laturilor patrulaterului dat, să se demonstreze că dreptele lui GAUSS ale patrulaterelor $A_1 B_1 C_1 D_1$ şi $A_2 B_2 C_2 D_2$ formează între ele un unghiu egal cu fiecare din unghiurile $(A'A_1, A'A_2)$; $(B'B_1, B'B_2)$; $(C'C_1, C'C_2)$; $(D'D_1, (D'D_2)$.

AL. A. ROŞU.

4577. Să se arate că expresia:

$$X = \frac{1 + x^{a_i} + x^{2a_i} + \dots}{(1 + x + x^2 + \dots + x^{a_1 - 1})(1 + x + \dots + x^{a_2 - 1}) \dots}$$

$$\frac{\dots + x^{(k_i - 1)a_i}}{\dots (1 + x + \dots + x^{a_{i-1} - 1})(1 + x + \dots + x^{a_{i+1} - 1}) \dots (1 + x + \dots + x^{a_n - 1})}.$$

(unde $k_i = a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$) are aceeaşi valoare oricare ar fi i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

N. BOTEA.

4578. Dacă a, b, c sunt trei arce astfel încât

$$a + b + c = \frac{\pi}{4},$$

atunci avem relaţia:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma (\sin^3 a + \cos^3 a)$$

$$= \frac{1}{2} + 3 \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{b}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{c}{2}\right)$$

$$+ \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3a}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3b}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3c}{2}\right).$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Rectificare. Problema propusă cu Nr. 4486, vol. XL p. 288, în rândul al doilea se va citi: $\Phi_1(N)$, în loc de $\Phi_i(N)$; în rândul al şeaselea $\Phi_3(N) = \Phi_1(\Phi_2(N))$, în loc de $\Phi_3(N) = \Phi_2(\Phi_2(N))$.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu Marcel (4471, E); *Antonescu N. Filofteia* (4456, 519); *Beiu-Palade G. Ernest* (4433); *Belloiu N. Costică* (4519); *Cercelaru Gr. D.* (4519); *Cseke Wilhelm* (4436, 41, 95, 97, 519, 20, 24, 38, 39, 41, 43); *Cristea G. Emilian* (4519); *Cojocaru P. Petre* (4456, 519); *Cocea Gh. Theodor* (E); *Deceanu Gh.* (4519); *Enăşescu D. Victor* (4456); *Florescu L. Victor* (4519); *Gavrilescu N. Const.* (4307, 49, 78, 410, 56, 519, 49); *Grumăzescu M.* (4501); *Hornştein H. S.* (4545), 53); *Lenco Ion* (4519); *Mănac M.* (4419); *Mătieş V. I.* (A); *Musceleanu S. Dacia* (4418, 23); *Neagu V. Valentin* (4520); *Nicolescu St. I.* (N, P); *Negrea A. Mircea-Leonte* (2343, 4199, 425, 532, 38); *Popescu V. Florian* (4519); *Postelnicescu C. M.* (4545); *Petrescu I. Ion* (4456); *Rada Dimitrie* (4495, 519, 45); *Savin C. I.* (N); *Stoica D. Al.* (4456, 70); *Ştefănescu D. Nicolae* (4456, 71, 519, 38); *Stoicescu T.* (4376); *Tarasiuc Sergiu* (4472, 83, 95, 97, 507, 08, 32); *Thébault V.* (A, N, P); *Ţiţeica I.* (4470); *Vescan T.* (A).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia V* . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de mecanică şi geometrie analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de probleme de geometrie descriptivă şi cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de geometrie analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de probleme de geometrie.* . Lei 150

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică

Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN (Telefon 4-3929).**

C. 39.458

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 2. — OCTOMVRIE 1935

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Sur les brocardiens d'un point du plan d'un triangle . . . . . *V. Thébault.*
2. Curbura lui Bacaloglu . . . . . *A. Myller.*
3. O soluție geometrică și o generalizare a problemei 1386 . . . . . *G-ral Gh. I. Popescu.*
4. Asupra unor însumări . . . . . *Maior I. Linteș.*
5. Programa analitică hotărîtă pentru concursul „Gazetei Matematice" din anul 1936.
6. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „General Sc. Panaitescu" pe anul 1934 — 1935.
7. Note Matematice: 5 — 8.
8. Chestiuni de examen.
9. Bibliografie.
10. Cereri: 250.
11. Diverse.
12. Probleme rezolvate: 2356, 2390, 2446, 2502, 2795, 2980, 3109, 3313, 3948, 4187, 4266, 4269, 4448.
13. Exerciții: 2 — 4.
14. Probleme propuse: 4579 — 4590.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

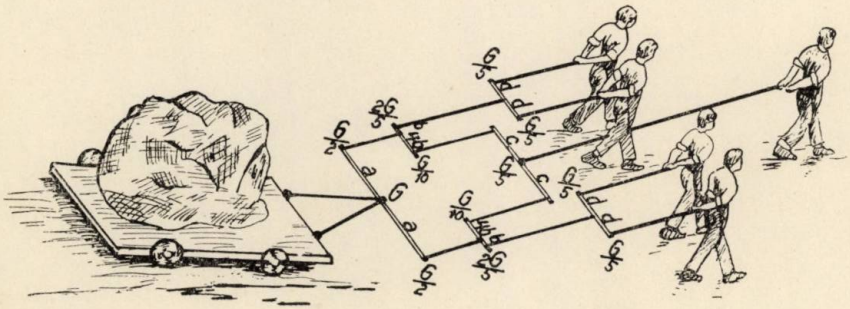
Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 15, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 18, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 32, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 91, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 42, 45, 49, 52, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 98, 500, 03, 04, 05, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 37, 42, 46, 47, 50, 51, 54, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.



Notă. Se va tăia şi lipi la pag. 44, figura 2-a din No. 1 al Gazetei.

SUR LES BROCARDIENS D'UN POINT DU PLAN D'UN TRIANGLE

1. Considérons un triangle ABC circonscrit à un cercle (I) puis les tangents à ce cercle, KL, NP, TQ respectivement parallèles et limitées aux côtés BA et AC, AC et CB, CB et BA. L'hexagone KLNPTQ, circonscrit au cercle (I), a ses côtés opposés égaux deux a deux,

$$KL = TP \ , \ NP = QK \ , \ TQ = LN,$$

et les diagonales KP, LT, NQ concourent au point I. [1]).

Les droites AD', BE', CF', qui unissent les sommets du triangle aux contacts D', E', F' du cercle (I) sur KL, NP, TQ, se coupent au point V de NAGEL du triangle ABC. Les parallèles KJ_1, NJ_1, TJ_1, et PJ_2, QJ_2, LJ_2 aux côtés AC, CB, BA concourent en deux points J_1, J_2 qui sont les *brocardiens* du réciproque de V, c'est-à-dire du point de GERGONNE Γ du triangle fondamental. Les parallélogrammes KLJ_2Q et PTJ_1N, par exemple, sont symétriques par rapport au point I. Dès lors, *les brocardiens* J_1, J_2 *du point de* GERGONNE *du triangle fondamental sont symétriques par rapport au centre du cercle inscrit* [2]).

2. Si l'on projette la figure sur un plan (π) non parallèle au sien, on obtient un hexagone $K_1 L_1 N_1 P_1 T_1 Q_1$, inscrit à un triangle $A_1 B_1 C_1$, dont les côtés sont tangents à une conique (Σ) de centre I_1, projection du cercle (I) sur le plan (π). Les points J_1, J_2 se projettent en des points J'_1, J'_2 qui sont les brocardiens de la projection Γ_1 du point Γ de GERGONNE du triangle ABC sur le plan (π). Les points J'_1, J'_2 sont les intersections des parallèles aux côtés A_1C_1, C_1B_1, B_1A_1 issues des points K_1, N_1, T_1 et P_1, Q_1, L_1.

N. B. D_a, E_b, F_c étants les contacts des côtés BC, CA, AB avec les cercles exinscrits (I_a), (I_b), (I_c), au triangle ABC, on sait que

$$VD_a = AD' \ , \ VE_b = BE' \ , \ VF_c = CF'.$$

---

1) E. LEMOINE, *Journal de* G. DE LONGCHAMPS, 1887 — 189.

2) V. THÉBAULT, *The Tohoku Mathematical Journal*, 1919 — 121.

On a donc aussi

$$V_1 D'_a = A_1 D'_1 \ , \ V_1 E'_b = B_1 E'_1 \ , \ V_1 F'_c = C_1 F'_1 \ ,$$

V_1, D'_a, E'_b, F'_c étant les projections des points V, D_a, E_b, F_c sur le plan (π).

3. Inversement, étant donnée la figure constituée par le triangle $A_1B_1C_1$ et la conique (Σ), une projection convenable la fait correspondre à la figure primitive [ABC, (I)].

Dès lors, étant donnés un triangle ABC et un point P de son plan, soient P_1 le réciproque de P et les céviennes AD, BE, CF du point P_1. Si l'on marque sur ces droites les points D', E', F' tels que

$$P_1 D = AD' \ , \ P_1 E = BE' \ , \ P_1 F = CF' ,$$

et que l'on trace les parallèles KL, NP, TQ á BC, AB, AC, limitées à ces côtés, l'hexagone KLNPTQ est circonscrit à une conique (Σ) dont le centre I_1 est le complémentaire du réciproque P_1 de P. Les parallèles aux côtés BC, CA, AB tracées par les points N, K, T et Q, P, L, concourent aux brocardiens J_1, J_2 du point P. On peut donc énoncer cette proposition générale :

Les brocardiens J_1, J_2 *d'un point quelconque* P *du plan d'un triangle sont symétriques par rapport au complémentaire du réciproque du point* P.

N. B. Lorsque $P \equiv I$, J_1 et J_2 sont les points de JERABEK du triangle fondamental. *Les points de* JERABEK *d'un triangle sont donc symétriques par rapport au complémentaire du réciproque du centre du cercle inscrit* [1]).

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

1) R. GOORMAGHTIGH, *Mathesis*, 1912 — 148.

CURBURA LUI BACALOGLU

(Exposé historique des essais faits pour remplacer la courbure totale de GAUSS par une autre meilleure. Le rôle de EM. BACALOGLU dans ce problème. Développement et complétement de son résultat).

Când GAUSS, în *Disquisitiones generales circa superficies curvas (1828),* a dat formula acum celebră a măsurei curburei totale a unei suprafețe într'un punct, rezultatul acesta reprezenta un succes deosebit pentru autor. Predecesorii lui, în special EULER, căutaseră în zadar o formulă unică, care să fixeze prin o dată numerică întregul complex de forme ale suprafeței, formulă care să rezume ansamblul total al curburilor diferitelor secțiuni plane prin acel punct.

GAUSS a reușit, dând pentru suprafață un analogon perfect al curburei la o curbă plană. El consideră pe suprafață o curbă care închide o calotă mică în jurul punctului considerat. La o sferă de rază unu și prin centrul ei duce raze paralele normalelor la suprafață în diferitele puncte ale curbei considerate. Aceste raze determină pe sferă o curbă, ce închide o arie, imaginea calotei considerate întâi. Strânge apoi curba de pe suprafață în jurul punctului și consideră limita raportului

$$\frac{\text{aria imaginei}}{\text{aria calotei}}$$

când curba se reduce la un punct. Această limită a numit-o curbura totală a suprafeței în acel punct și a dovedit-o egală cu

$$\frac{1}{R_1 R_2},$$

unde R_1, R_2 sunt razele principale de curbură.

GAUSS a mai arătat că

a) rezultatul e independent de felul curbei considerate în jurul punctului și că

b) rezultatul nu se schimbă dacă încovoiem suprafața fără să o dilatăm sau să o contractăm.

Cu toată frumusețea ei, formula curburei totale n'a plăcut și cauza a fost tocmai minunata proprietate *b),* aceea care astăzi constitue *Theorema egregium* a Geometriei diferențiale. Contimporanii

lui GAUSS deprinşi să considere suprafaţa ca rigidă, ca limita unui corp solid, nu se puteau învoi cu teoremul care spune că două suprafeţe de formă variabilă ar putea avea aceeaşi curbură. In special nu admiteau ca o suprafaţă desfăşurabilă, un cilindru sau un con, să aibă curbura nulă ca şi planul.

Semnalul nemulţumirilor îl dă SOPHIE GERMAIN care propune [1]) curbura medie

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

ca măsură a curburei. Aceasta în adevăr nu se anulează la suprafeţele desfăşurabile. SOPHIE GERMAIN dă şi o interpretare geometrică a acestei curburi dar, care fiind mult mai greoaie ca aceea a lui GAUSS, cu toată perfecţionarea adusă de RENARD [2]), nu a prins. O interpretare geometrică simplă şi elegantă a curburei medii apare mult mai târziu la R. STURM [3]), care o obţine la limită ca şi câtul

$$\frac{\text{perimetrul imaginarei}}{\text{perimetrul calotei}},$$

imaginea fiind cea sferică a lui GAUSS.

E de observat că aceste interpretări nu se bucură de proprietatea *a)*; se presupune că curba trasă în jurul punctului este un cerc geodezic. Dacă e înlocuit prin o altă curbă, rezultatul e altul.

Au fost matematiciani, cari au propus şi alte expresii pentru curbură, cum a fost CASORATI [4]), care credea că

$$\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}$$

s'ar potrivi mai bine.

La aceste dispute cu tema *„Care curbură e mai bună?“* a participat şi primul nostru matematician, care a gândit original, EMANUEL BACALOGLU. In *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (1859) îşi propune să modifice puţin procedeul lui GAUSS, aşa ca să obţină o expresie a curburei, care să nu se mai anuleze pentru

1) Journ. f. math. Bd. 7 (1831).
2) Thèse. Paris. (1856).
3) Mathem. Annalen Bd. 21 (1883).
4) Acta mathematica v. 14. (1890 — 91).

suprafețele desfășurabile. El consideră secțiunile normale prin punctul dat și face reprezentarea sferică a calotei de pe suprafață, dar nu cu ajutorul normalelor la suprafață, ci pe acestea le înlocuește cu normalele la secțiunile normale. Restul e la fel.

Fie $d\sigma$ arcul infinitezimal de curbă al unei secțiuni normale, măsurat din punctul dat și $d\theta$ unghiul normalelor (secțiunei normale) la extremitatea lui. Fie ω unghiul planului secțiunei cu un plan de secțiune fix și R raza de curbură a acestei secțiuni. O curbă infinitezimală în jurul punctului e fixată când se dă $d\sigma$ în funcție de ω. Putem pune

$$d\sigma = \varepsilon f(\omega),$$

ε fiind o cantitate infinit mică. Ținând cont de formula lui EULER

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{1}{R} = \frac{\sin^2\omega}{R_1} + \frac{\cos^2\omega}{R_2},$$

avem

$$\text{curbura} = \frac{\text{aria imaginei}}{\text{aria calotei}} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta^2 d\omega}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\sigma^2 d\omega}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} f^2(\omega)\left(\frac{\sin^2\omega}{R_1} + \frac{\cos^2\omega}{R_2}\right) d\omega}{\int_0^{2\pi} f^2(\omega)\, d\omega}$$

$$= \frac{A}{R_1^2} + 2\frac{B}{R_1 R_2} + \frac{C}{R_2^2}$$

care e expresia curburei. Constantele A, B, C sunt pozitive și au valorile

$$A = \frac{\int_0^{2\pi} f^2(\omega) \sin^4\omega\, d\omega}{\int_0^{2\pi} f^2(\omega)\, d\omega}, \quad B = \frac{\int_0^{2\pi} f^2(\omega) \sin^2\omega \cos^2\omega\, d\omega}{\int_0^{2\pi} f^2(\omega)\, d\omega},$$

$$C = \frac{\int_0^{2\pi} f^2(\omega) \cos^4\omega\, d\omega}{\int_0^{2\pi} f^2(\omega)\, d\omega}.$$

Valorile lor depind de forma curbei ce înconjoară punctul. BACALOGLU a presupus că această curbă este un cerc geodezic; atunci $f(\omega) = 1$ şi expresia curburei ia forma

$$\frac{3}{8}\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{3}{8}\frac{1}{R_2^2}.$$

Se poate obţine o altă expresie a curburei dacă ne dăm, nu forma curbei înconjurătoare de pe suprafaţă, ci forma imaginei ei pe sferă. In acest caz punem

$$d\theta = 2g(\omega)$$

şi obţinem

$$\text{curbura} = \frac{\text{aria imaginei}}{\text{aria calotei}} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta^2\, d\omega}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\sigma^2\, d\omega} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta^2\, d\omega}{\int_0^{2\pi} R^2 d\theta^2\, d\omega}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} g^2(\omega)\, d\omega}{\int_0^{2\pi} \frac{g^2(\omega)\, d\omega}{\left(\frac{\sin^2\omega}{R_1} + \frac{\cos^2\omega}{R_2}\right)^2}}.$$

Această formulă pentru curbură e integrabilă în cazul simplu considerat de BACALOGLU $g(\omega) = 1$. E cazul când imaginea sferică e un cerc mic. Se obţine

$$\frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{2}\sqrt{R_1 R_2}}.$$

După cum se vede EMANUEL BACALOGLU joacă un rol frumos în istoricul[1]) încercărilor de a găsi şi alte expresii pentru curbură în afară de aceea a lui GAUSS.

A. MYLLER.

---

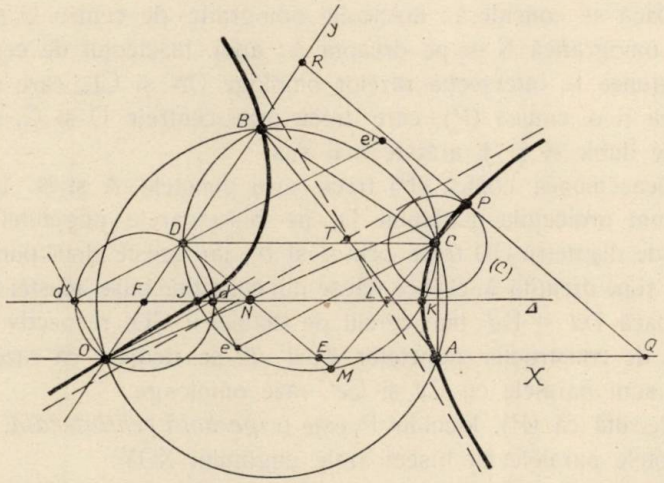
1) Vezi: A. TERRACINI. Le origini dei primi concetti della Geometria differenziale. Periodico di matematica. Serie IV, v. XV.

O SOLUȚIE GEOMETRICĂ ȘI O GENERALIZARE A PROBLEMEI 1386 *)

In *Gazeta Matematică*, din Martie 1935, s'a publicat o soluție analitică a problemei 2889 propusă de D-l N. ABRAMESCU, care este o consecință a problemei 1386, propusă de D-l I. S. TEODORESCU.

Soluția geometrică de mai jos, rezolvă ambele probleme propuse.

Poblema 1386: *Se dă un cerc, în interiorul unui unghiu* XOY. *Să se ducă o tangentă, așa ca punctul ei de contact să fie mijlocul segmentului din tangentă, limitat de laturile unghiului dat.*



1. Fie C, centrul cercului (C) în planul unghiului XOY și fie A și B, respectiv, proiecțiile lui C pe OX și OY, iar D, intersecția dreptei OY, cu o dreaptă, dusă prin C, paralelă la OX.

Fie P, punctul de contact al tangentei, la cercul (C) și care taie dreptele OX și OY, respectiv, în Q și R, cu condiția ca PQ = PR.

Fie E, intersecția dreptei OX, cu o paralelă dusă din D, la tangenta QR; N mijlocul segmentului DE, iar M proiecția lui C pe DE. Dreapta CM trece prin P, fiindcă CP este perpendiculară pe QR, ca rază în cercul (C).

*) Se găsește o nouă soluție a problemei 1386 rezolvând problema 3760, propusă la pag. 280, Vol. XXXIV.

G-L GH. B.

Se deduce că locul punctului M este cercul de diametru CD, iar al punctului N, este dreapta Δ, paralelă cu OX şi care trece prin F, mijlocul segmentului OD; iar punctele O, N şi P sunt în linie dreaptă, fiindcă N şi P sunt mijloacele a două segmente paralele.

2. *Locul geometric al punctului* P, *intersecţia dreptelor* CM *şi* ON.

Punctul M descriind cercul de diametru CD, dreptele MC şi MD, determină pe dreapta Δ, două diviziuni omografice, reprezentate, respectiv, prin punctele N şi L, intersecţia dreptei Δ cu razele MD şi MC. Punctele duble ale acestor două diviziuni omografice sunt punctele K şi J unde dreapta Δ taie cercul de diametru CD.

Dacă se consideră: fascicolul omografic de centru O şi diviziunea omografică N de pe dreapta Δ; apoi, fascicolul de centru C şi diviziunea L, intersecţia razelor omologe ON şi CL, care se taie în P, va fi o conică (P), care trece prin centrele O şi C, şi prin punctele duble K şi J, arătate mai sus.

Deasemenea conica (P) trece prin punctele A şi B. Dacă *d* şi *d'* sunt proiecţiile punctului D, pe bisectoarele unghiului XOY, cercul de diametru OD trece prin *d* şi *d'*, iar aceste două puncte, se găsesc şi pe dreapta Δ, ceeace reiese din condiţiile puse acestei drepte.

Dacă D*d* şi D*d'* taie cercul de diametru CD, respectiv în *e* şi *e'*, faţă de construcţia punctelor *d* şi *d'*, se deduce că razele O*d* şi O*d'* sunt paralele cu C*e* şi C*e'*, raze omoloage.

Rezultă că (P), locul lui P, este o *iperbolă echilaterală*, având asimptotele paralele cu bisectoarele unghiului XOY.

Centrul acestei iperbole echilatere este punctul T, mijlocul segmentului AB; fiindcă centrul iperbolei se găseşte pe cercurile EULER ale triunghiurilor formate de patrulaterul OACB, înscris în iperbola echilateră (P) şi toate aceste cercuri EULER trec prin T, de oarece triunghiurile OAC şi OBC sunt dreptunghice în A şi B.

3. *Posibilităţile problemei.*

Cercul (C) taie iperbola echilateră (P) în patru puncte, dintre care două sunt totdeauna reale, fiindcă centrul său C se găseşte pe iperbolă.

Prin urmare, se vor găsi pe cercul C patru, trei sau două puncte P, care să îndeplinească condiţia pusă de problema 1386, după cum cercul (C) taie iperbola (P) în patru puncte, este tangent la această conică sau o taie numai în două puncte reale.

Cazuri particulare.

a) Cercul (C) este tangent la OX (sau OY). Tangenta QR se confundă cu OX (OY), iar punctul R cu O.

b) Centrul cercului (C) se găseşte pe o bisectoare a unghiului XOY. Iperbola echilateră (P) se reduce la două drepte perpendiculare, dintre care una confundată cu bisectoarea respectivă.

4. *Generalizarea problemei 1386.*

Se consideră aceleaşi date ale problemei, însă raportul $\frac{RP}{RQ} = m$ (în cazul problemei propuse $m = \frac{1}{2}$). Dreapta Δ va trece prin punctul F, cu condiţia ca $\frac{DF}{DO} = m$.

Făcând aceleaşi demonstraţiuni, locul punctului P este o conică (P), care trece prin O, A, C şi B şi având asimptotele paralele cu direcţiile Od şi Od'.

După cum dreapta Δ taie cercul de diametru OD în două puncte, este tangentă sau nu taie acest cerc, conicele (P) vor fi respectiv iperbole, parabole sau elipse.

Cazuri particulare.

Când dreapta Δ trece prin centrul cercului OD, se obţine iperbola echilateră dela punctul 2); dacă dreapta Δ este tangentă la cercul OD, sunt două parabole, având diametrele perpendiculare; cercul de diametru OC face parte dintre elipse; şi cum toate conicele (P) trec prin punctele conciclice O, A, C şi B, axele tuturor acestor conice sunt paralele.

5. *Soluţia problemei 2889.*

In general, se pot construi patru iperbole, tangente la cercul (C) şi având ca asimptote pe OX şi OY. După cum punctele P, de intersecţie ale cercului (C) şi conicei (P) se găsesc în unghiul XOY sau suplimentarul său, tot astfel se vor găsi şi iperbolele căutate.

Observaţiune. In cazul problemei 1386, conica (P) este funcţie numai de poziţia dreptelor OX, OY şi de a punctului C, faţă de aceste drepte şi nu are legătură cu raza cercului (C).

Fiind date dreptele OX şi OY, prin variaţia poziţiei centrului cercului (C), a razei sale şi a raportului $\frac{RP}{RQ} = m$, se obţine întreaga generalizare a celor două probleme propuse.

GENERAL GH. I. POPESCU.

ASUPRA UNOR ÎNSUMĂRI

I. Fie $a, b, c, \ldots k, l$ un număr de n termeni în progresie aritmetică de raţie r, îmi propun să calculez sumele :

$$S_1 = 2a + 3b + \ldots + (n+1)\,l$$

$$S_2 = 3ab + 4bc + \ldots + (n+2)\,kl$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_{m-1} = m \cdot \underbrace{ab \ldots g}_{m-1} + (m+1)\underbrace{bc \ldots h}_{m-1} + \ldots$$

$$+ (n+m-1)\underbrace{i \ldots kl.}_{m-1}$$

Pentru aceasta, notând cu $\alpha = a - r$ şi $\lambda = l + r$, observăm că

$$ab - \alpha a = 2ra$$

$$bc - \alpha b = 3rb$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma_2 - \alpha\Sigma_1 = r \cdot S_1$$

unde (vezi «Théorie des Nombres» par LUCAS, pag. 56) avem :

$$\Sigma_1 = \frac{l\lambda - \alpha a}{2r}$$

$$\Sigma_2 = \frac{kl\lambda - \alpha ab}{3r}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

In mod analog mai observăm că :

$$abc - \alpha ab = 3rab$$

$$bcd - \alpha bc = 4rbc$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma_3 - \alpha\Sigma_2 = r \cdot S_2$$

Deci în general vom avea:

$$\Sigma_m - \alpha\Sigma_{m-1} = r \cdot S_{m-1}.$$

Exemplu: Fie suma:

$$S_2 = 3x(x+1) + 4(x+1)(x+2) + \ldots + (n+2)(x+n-2)(x+n-1).$$

Observând că avem:

$$4\Sigma_3 = (x+n)(x+n-1)(x+n-2)(x+n-3) - (x-1)x(x+1)(x+2)$$

şi

$$3\Sigma_2 = (x+n)(x+n-1)(x+n-2) - (x-1)x(x+1).$$

Apoi cum:

$$S_2 = \Sigma_3 - (x-1)\Sigma_2$$

urmează că:

$$S_2 = \frac{1}{12}[(x+n)(x+n-1)(x+n-2)(-x+3n-5) - (x-1)(x+1)(-x+10)].$$

Pentru cazul când $x = 1$ avem:

$$S_2 = \frac{1}{4}[(n-2)(n-1)n(n+1)].$$

II. In aceleaşi condiţiuni îmi propun a găsi sumele:

$$S'_2 = \frac{1}{ab} + \frac{2}{bc} + \ldots + \frac{n-1}{kl}$$

$$S'_3 = \frac{1}{abc} + \frac{2}{bca} + \ldots + \frac{n-2}{jkl}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$S'_{m-1} = \frac{1}{\underbrace{ab\ldots g}_{m-1}} + \ldots + \frac{n-m+2}{\underbrace{i\ldots kl}_{m-1}}.$$

Pentru aceasta observăm că:

$$\frac{r}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

$$\frac{2r}{bc} = \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{S'_2}{r} = H_1.$$

Apoi:

$$\frac{2r}{abc} = \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc}$$

$$\frac{4r}{bcd} = \frac{2}{bc} - \frac{2}{cd}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{2S'_3}{r} = H_2.$$

Sau în general avem:

$$(m-1) \cdot S'_m = r \cdot H_{m-1}$$

unde (vezi «Théorie des Nombres» par LUCAS, pag. 152):

$$r \cdot H_2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{l}$$

$$2r \cdot H_3 = \frac{1}{ab} - \frac{1}{kl}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$(m-1)\, r\, H_m = \frac{1}{\underbrace{ab \ldots g}_{m-1}} - \frac{1}{\underbrace{j \ldots kl}_{m-1}}.$$

Iar:

$$H_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{l}.$$

Aşa dar S'_2 nu se poate însuma, pentru celelalte avem însă :

$$2 \cdot S'_3 = r \cdot H_2$$

. . . . . .

. . . . . .

$$(m-1) \cdot S'_m = r \cdot H_{m-1} .$$

Exemplu : Fie

$$S'_3 = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots + \frac{n-2}{(x+n-3)(x+n-2)(x+n-1)} .$$

Deci :

$$S'_3 = \frac{(n-1)}{2x(x+n-1)} .$$

Pentru $x = 1$ avem :

$$S'_3 = \frac{n-1}{2n} .$$

MAIOR I. LINTEŞ.

PROGRAMA ANALITICĂ

HOTĂRITĂ PENTRU CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“ DIN ANUL 1936

Clasa IV-a. Toată materia prevăzută de programa analitică.

Clasa V-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus :

1. La împărţirea cu $(x + a)$ se va face rezolvarea ecuaţiilor cu rădăcini întregi şi fracţionare.

2. La radicale se va face raţionalizarea numitorilor cari conţin radicale patrate şi de indici superiori.

3. La sistemele de ecuaţii de gradul I se vor cere metode particulare de rezolvare şi sisteme reductibile la gradul I.

4. La discuţia semnului trinomului se va face generalizare în legătură cu punctul 1.

5. Transformarea expresiunilor de forma: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

6. Progresiuni aritmetice şi geometrice.

Grupa II-a. **Geometria plană.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Fascicole de drepte paralele şi de drepte concurente (teoreme directe şi reciproce).

2. Omotetia (La cercuri: centre de asemănare directe şi inverse).

3. Teorema lui MENELAUS şi CEVA şi reciprocele lor.

4. Teoremele lui PTOLOMEU pentru patrulaterele inscriptibile. Teorema lui MIQUEL. Patrulater circumscris unui cerc. Cercuri ortogonale. Cercul celor nouă puncte.

5. Puterea unui punct faţă de un cerc. Ax şi centru radical.

6. Raportul ariilor a două poligoane asemenea.

7. Reciproca teoremei lui PITAGORA. Relaţia metrică a lui STEWART. Aplicaţie la mediane, etc.

8. Poligoane regulate circumscrise.

Clasa VI-a. Grupa I. **Geometria în spaţiu.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Unghiuri diedre. Măsura lor. Unghiuri triedre şi poliedre, proprietăţile lor.

2. Aria şi volumul trunchiului de piramidă. Extindere la con.

3. Volumul produs de un sector poligonal plan care se roteşte în jurul unei axe. Volumul zonei, calotei, sferei.

Grupa II. **Trigonometria.** Toată materia prevăzută în programa analitică până la «Aplicaţiile trigonometriei la agrimensură şi statică». In plus:

1. Aria unui triunghiu în raport cu elemente date.

2. Raza cercului circumscris în funcţiune de laturile triunghiului. Razele cercurilor înscrise şi exînscrise triunghiului. Relaţiuni.

3. Identităţi trigonometrice.

4. Cazuri particulare de rezolvare la triunghiuri dreptunghice şi oarecare.

5. Determinarea distanţelor între puncte inaccesibile.

6. Problema hărţii.

Clasa VII-a. Grupa I. **Algebra.** Toată materia prevăzută de programa analitică, fără «Aplicaţii la cinematică».

Grupa II. **Geometria descriptivă.** Toată materia prevăzută de programa analitică. In plus:

1. Diviziuni armonice, fascicole armonice. Pol şi polară în raport cu un unghiu şi în raport cu un cerc.

Teoremele lui PASCAL şi BRIANCHON. Patrulatere complete.

2. Transformări: inversiune, polare reciproce.

Clasa VIII-a. Grupa I. **Algebra** } Materia prevăzută de
Grupa II. **Geometria analitică** } programa analitică.

Grupa III. **Mecanica.** Materia prevăzută de programa analitică. In plus: Cinematica.

* * *

Orice candidat trebue să cunoască materia respectivă a claselor precedente cu adăogirile prevăzute în prezenta programă.

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU
ACORDAREA PREMIULUI „GENERAL SC. PANAITESCU"
PE ANUL 1934—1935

Subsemnaţii membri ai Comisiunei pentru decernarea premiului pentru lucrări de matematici, aplicate la ştiinţele militare, am constatat următoarele:

— La redacţia «Gazetei Matematice» nu s'a primit nici un manuscris sau broşură, care să trateze un astfel de subiect.

— Lucrările apărute sau articolele publicate în revistele militare în intervalul 1.IX.1934—1.VIII.1935, nu satisfac condiţiunile acordării acestui premiu.

— Dintre revistele militare, aceea care a avut articole mai apropiate de condiţiunile acestui premiu a fost anul acesta *Revista Aeronautică* şi, în consecinţă, propunem ca premiul să fie acordat acestei reviste.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „GENERAL SC. PANAITESCU"
IOAN BUŞILĂ, MAIOR I. LINTEŞ,
LT. COMANDOR-INGINER GR. ZAPAN.

Acest raport s'a citit şi aprobat în Adunarea Generală din 22 August 1935.

NOTE MATEMATICE

5. *Observaţiuni relative la problema 4415.* Prin această problemă, rezolvată la pag. 565 Vol. XL, se cere *fracţiile ordinare astfel încât micşorându-le ambii termeni cu acelaşi întreg, să găsim patratele acelor fracţii.*

In soluţia dată s'au găsit fracţiile a/b şi întregul k pentru care

$$(1)\quad a = m\alpha\,(\alpha+\beta)\ ;\ b = m\beta\,(\alpha+\beta)\ ;\ k = m\alpha\beta$$

căci, în aceste condiţiuni

$$\frac{a-k}{b-k} = \frac{m\alpha^2}{m\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Iată câteva observaţiuni sugerate de această problemă.

1°. Scăzând întregul k din a şi b daţi de (1) nu se obţine nici odată direct a^2/b^2 ci o fracţie echivalentă cu aceasta.

2°. Din (1) se vede că a şi b au totdeauna divizorul $\alpha+\beta$, care e diferit de 1. Deci *fracţiile ireductibile nu satisfac condiţiile probleme 4415.*

3°. De oare ce orice număr întreg se poate pune sub forma $m\alpha\,(\alpha+\beta)$, căci pentru numerele prime nu avem decât să luăm $m = \alpha = 1$, rezultă că dacă se dă un număr a, se va găsi totdeauna cel puţin o fracţie a/b şi un întreg k în condiţiile problemei.

4°. Dacă nu se cere ca numărul k să fie întreg, atunci *dacă din termenii unei fracţii* **oare care** a/b *se scade* $ab/(a+b)$, *se obţine* $(a/b)^2$, ceeace este uşor de verificat.

In acest caz se obţine direct a^2/b^2.

5°. Problema se poate generaliza în senzul

$$\frac{a-k}{b-k} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Procedând ca la soluţia dată problemei 4415 în Vol. XL., se găseşte

$$a = m\alpha\,[\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}]$$

$$b = m\beta\,[\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}]$$

$$k = m\alpha\beta\,[\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}].$$

Când nu se cere k întreg atunci orice fracţie a/b este astfel încât scăzând din termenii ei pe

$$k = \frac{ab\,[a^{n-2} + a^{n-3}\,b + \ldots + ab^{n-3} + b^{n-2}]}{a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \ldots\, ab^{n-2} + b^{n-1}}$$

se obţine a^2/b^2.

6⁰. Problema 4415 are şi următoarele variante, care se rezolvă la fel

$$\frac{a \pm k}{b \pm k} = \frac{a^n}{b^n},$$

$$\frac{a \pm k}{b \pm k} = \frac{b^n}{a^n},$$

semnele luându-se în toate felurile posibile.

GENERAL GH. BUICLIU.

6. *Formules relatives au triangle.*

1. Dans un triangle ABC, l'identité

$$\sum \frac{bc}{(a+b)(a+c)} \equiv \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr}, \tag{1}$$

(**G. M. XL.** p. 522), entre les éléments habituels, équivaut à la suivante :

$$\sum \frac{1}{a\,(a+b)\,(a+c)} \equiv \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \cdot \frac{1}{4RS}. \tag{2}$$

2. L'identité connue

$$\sum \frac{1}{a\,(a-b)\,(a-c)} \equiv \frac{1}{abc}, \tag{3}$$

conduit à celle-ci :

$$\sum \frac{bc}{(a-b)\,(a-c)} \equiv 1. \tag{4}$$

3. Sur les côtés BA et AC, AB et CB, AC et BC, portons des vecteurs $BM_a = CN_a = BC = BM'_a = CN'_a$, $AM_b = CN_b = AC = AM'_b = CN'_b$, $AM_c = BN_c = BA = AM'_c = BN'_c$, et désignons par S_a, S_b, S_c et S'_a, S'_b, S'_c, les aires algébriques des triangles $M_a A N_a$, $M_b B N_b$, $M_c C N_c$ et $M'_a A N'_a$, $M'_b B N_b$, $M'_c C N'_c$. On a les relations

$$S_a = \tfrac{1}{2} AN_a \cdot AM_a \sin A = \frac{1}{4R} \cdot a(a-b)(a-c), \ldots,$$

$$S'_a = \tfrac{1}{2} AN'_a \cdot AM'_a \sin A = \frac{1}{4R} \cdot a(a+b)(a+c), \ldots,$$

qui, combinées aux formules (3) et (2), donnent

$$\frac{1}{S_a}+\frac{1}{S_b}+\frac{1}{S_c}=\frac{1}{S}, \quad \frac{1}{S'_a}+\frac{1}{S'_b}+\frac{1}{S'_c}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{p^2+r^2+2Rr} \cdot \frac{1}{S}.$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

7. *Asupra unei proprietăţi cunoscute.*

O proprietate de geometrie cunoscută este adeseori punct de plecare pentru cercetări noui.

In articolele ce mi-au fost publicate altădată în G. M. se vede cu prisosinţă acest lucru. De data aceasta, tot ca exemplificare a afirmaţiunii de mai sus, şi în spaţiul ce ni s'a pus principial la dispoziţie, voiu trata o chestiune în legătură cu o proprietate elementară de geometrie, ce se reduce la *proprietatea înălţimii într'un triunghiu dreptunghiu.*

Fie un arc de cerc BPC, determinat de coarda BC în cercul O de rază R. Tangenta în punctul P la arcul de cerc BPC taie tangentele în B şi C la acelaşi arc în punctele M şi N respectiv. Să însemnăm cu α şi 2φ respectiv măsurile unghiurilor

$$\sphericalangle BOM = \sphericalangle MOP \text{ şi } \sphericalangle BOC$$

corespunzător arcului BPC şi să studiem variaţiunea funcţiunii:

$$y = \overline{MP} \cdot \overline{NP} = R^2 \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \alpha),$$

când punctul P descrie arcul BPC, adică când α variază crescând dela O până la φ.

In toate cazurile pentru care $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, y este o funcţiune continuă de α şi admite derivată în tot intervalul de existenţă, având

$$y'_\alpha = \frac{R^2}{2} \frac{\sin 2(\varphi - \alpha) - \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 (\varphi - \alpha)}.$$

Se observă că y'_α se poate anula, în cazul nostru, numai dacă : $2(\varphi - \alpha) = 2\alpha \left(\varphi \neq \frac{\pi}{2}\right)$, ceea ce dă $\alpha = \frac{\varphi}{2}$; având pentru $\alpha < \frac{\varphi}{2}$ că $y'_\alpha > 0$, iar pentru $\alpha > \frac{\varphi}{2}$ că $y'_\alpha < 0$; deci funcţiunea y în intervalul $(0, \varphi)$ trece printr'un *maximum* pentru $\alpha = \frac{\varphi}{2}$, adică când P este mijlocul arcului BPC.

Funcţiunea y este o constantă în cazul când $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *adică coarda* BC *este un diametru* al cercului; de aci rezultă proprietatea de geometrie elementară cunoscută : *O tangentă, variabilă la un cerc, determină, pe tangentele fixe la extremităţile unui diametru, segmente al căror produs este constant* (şi egal cu pătratul razei cercului).

Să cercetăm acum, dacă cercul este singura curbă plană, care se bucură de această proprietate.

Să considerăm un arc de curbă BPC admiţând două tangente în B şi C, perpendiculare pe coarda BC. Fie M şi N punctele unde tangenta în P taie respectiv tangentele în B şi C. Să considerăm figura raportată la sistemul ortogonal BC, BM (în care BC este axa absciselor). Având $P(x, y)$; $C(2a, 0)$, găsim:

$$BM = y - xy' \quad \text{şi} \quad CN = y - xy' + 2ay',$$

deci curbele căutate satisfac ecuaţiunii diferenţiale :

$$(y - xy')(y - xy' + 2ay') = k$$

şi au ca ecuaţiune carteziană :

$$(C) \qquad a^2 y^2 + kx^2 - 2akx = 0,$$

adică conice cu centrul la distanță finită, coarda BC fiind o axă de simetrie. Se vede din aceasta că soluțiunea *ce se putea prevede proiectând cercul* O *pe un plan trecând prin diametrul* BC, *este unică pentru generalizarea propusă.*

Dacă presupunem acum că avem o curbă cu tangente paralele BM și CN, la care direcția comună nu mai este perpendiculară pe BC, luând ca axă a ordonatelor pe BM și perpendiculara BX ca axă a absciselor și însemnând cu α unghiul lui BC cu BX, avem, scriind că produsul segmentelor (determinate de tangenta mobilă MPN pe tangentele fixe BM, CN) este constant, ecuațiunea diferențială:

$$(C) \quad (y - xy')\,[y + (2a - x)\,y' - 2a \sin \alpha] = k.$$

Curbele, care se obțin integrând această ecuațiune, nu prezintă însă interes pentru geometria elementară [1]).

O. N. ȚINO.

8. *Diviziunea polinoamelor prin* $(x^n - a)$. Un polinom oarecare $F(x)$ poate fi pus sub forma:

$$F(x) = (A_1 + A_2 x + \ldots + A_n x^{n-1}) + x^n (B_1 + B_2 x + \ldots + B_n x^{n-1}) + (x^n)^2 \cdot (C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1}) + \ldots + (x^n)^{k-1} \cdot (L_1 + L_2 x + \ldots + L_n x^{n-1}).$$

Dacă notăm polinoamele din paranteze respectiv cu

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots, \varphi_k(x)$$

și punem $z = x^n$, avem:

$$F(x) = \varphi_1(x) + z\varphi_2(x) + z^2 \varphi_3(x) + \ldots + z^{k-1} \varphi_k(x) = f(z).$$

Dar restul diviziunii polinomului $F(x) = f(z)$ prin $(z - a)$ este:

$$R = f(a),$$

adică:

$$(1) \quad R = \varphi_1(x) + a\varphi_2(x) + a^2 \varphi_3(x) + \ldots + a^{k-1} \varphi_k(x).$$

---

[1]) Exemplul constitue un exercițiu interesant pentru calculul integral.

Dacă însă grupăm termenii polinomului nostru astfel:

$$F(x) = [A_1 + B_1 x^n + C_1 (x^n)^2 + \ldots + L_1 (x^n)^{k-1}]$$
$$+ x [A_2 + B_2 x^n + C_2 (x^n)^2 + \ldots + L_2 (x^n)^{k-1}]$$
$$+ x^2 [A_3 + B_3 x^n + C_3 (x^n)^2 + \ldots + L_3 (x^n)^{k-1}] + \ldots$$
$$+ x^{n-1} [A_n + B_n x^n + C_n (x^n)^2 + \ldots + L_n (x^n)^{k-1}]$$

şi dacă notăm polinoamele din paranteze respectiv cu:

$$f_1(z) \ , \ f_2(z) \ , \ f_3(z) \ , \ \ldots \ , \ f_n(z) \ ,$$

unde $z = x^n$, avem:

$$F(x) = f_1(z) + x f_2(z) + x^2 f_3(z) + \ldots + x^{n-1} f_n(z).$$

Cum restul diviziunii fiecărui polinom $f_i(z)$ prin $(z-a)$ este $f_i(a)$, rezultă că:

$$(2) \qquad R = f_1(a) + x f_2(a) + x^2 f_3(a) + \ldots + x^{n-1} f_n(a),$$

iar *condiţia de divizibilitate* este dată de ecuaţiile:

$$f_1(a) = 0 \ , \ f_2(a) = 0 \ , \ f_3(a) = 0 \ , \ \ldots \ , \ f_n(a) = 0.$$

Am stabilit aşa dar *două expresiuni* (1) şi (2), *pentru restul diviziunii unui polinom oarecare* $F(x)$ *prin* $(x^n - a)$, expresiuni pe care încă nu le-am găsit publicate în niciun tratat de algebră.

LT.-COMANDOR GR. ZAPAN.

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ REGELE CAROL II BUCUREŞTI

Concurs de Admitere în Ciclul I

(15 Septemvrie — 5 Octomvrie 1935)

I. ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

1. Să se studieze variaţia funcţiunei:

$$y = \frac{4x+9}{x-4} e^{-x}$$

şi să se reprezinte apoi grafic funcţiunea.

2. Să se determine unghiurile θ pentru cari expresia:

$$E = (\cos\theta - 5i\ \sin\theta)\ (\cos 5\theta + i\ \sin 5\theta)$$

are o valoare reală.

3. Să se determine cu o eroare $< {}^{1}/_{1000}$ valorile reale ale lui x pentru cari determinantul:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 7 & 7 \\ 1 & -2 & x & 3 \\ 1 & 5 & 1 & x \end{vmatrix}$$

se anulează.

II. GEOMETRIE ANALITICĂ

Axele fiind rectangulare, se consideră curba:

$$y^2 - 2xy - 3x^2 + y + x + 5 = 0.$$

Se cere:

1. Să se arate că această curbă este o iperbolă;

2. Să se determine asimptotele şi să se indice poziţia curbei faţă de asimptote;

3. Să se calculeze aria triunghiului format de cele două asimptote cu axa Ox;

4. Să se scrie ecuaţia curbei schimbând axele şi anume: luând ca axă OX asimptota care trece prin originea O, iar ca axă OY o perpendiculară la acea asimptotă dusă prin O.

III. GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ ŞI COMPLEMENTE DE GEOMETRIE

Se dă:

1. Un con circular drept S cu baza un cerc O situat în planul orizontal de proiecţie.

Centrul cercului este O (230, 65, 0) şi raza R = 40.

Vârful conului are cota 120.

2. Un al doilea con T, are vârful T (180, 65, 90) şi ca bază un cerc O_1, situat în planul orizontal de proiecţie.

Centrul acestui cerc este O_1 (325, 65, 0) şi raza $R_1 = 55$.

Se cere:

1. Să se determine, în planul frontal, care trece prin punctul T, un punct M care să îndeplinească condiţiunile:

$$(1) \qquad \sphericalangle TMS = 60^0 \qquad \text{şi} \qquad (2) \qquad \frac{MT}{MS} = \frac{3}{5}.$$

Se vor determina proiecţiunile (m, m') ale punctului M.

2. Să se deseneze intersecţia celor două conuri S şi T reprezentându-se ansamblul celor două solide presupuse opace.

(Se vor trasa cu linii pline părţile văzute şi punctat părţile nevăzute).

3. Se vor determina punctele remarcabile ale intersecţiunii şi anume: punctele depe conturele aparente, punctele de cotă maximă şi minimă, etc.

4. Se va construi tangenta la curba de intersecţie a celor două corpuri, într'un punct de cotă 35.

Datele numerice sunt în milimetri.

Epura se va trasa în tuş, potrivit normelor afişate.

Se va anexa o legendă explicativă. Linia pământului paralelă cu laturile mari ale cadrului şi la egală distanţă de ele.

Geometrie

Intr'un plan orientat se dau trei semidrepte OA, OB, OC, care fac cu o semidreaptă OX aleasă ca *origină*, respectiv unghiurile α, β, γ.

Se cere să se determine o semidreaptă OM, prin unghiul ei μ cu semidreapta OX, astfel ca:

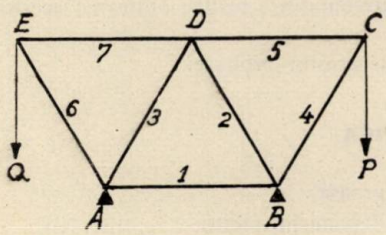
$$m \,.\, MOA + n \,.\, MOB + p.\widehat{MOC} = 0,$$

m, n, p, fiind trei numere oarecari.

Discuţie. Se va examina în particular cazul $m = n = p$ şi se va arăta cum se poate construi geometriceşte dreapta OM.

IV. MECANICA

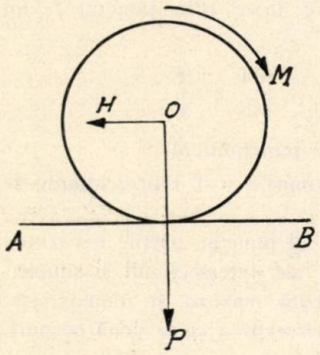
1. Şapte bare egale, de greutăţi neglijabile, formează un sistem articulat ABCDE, compus din 3 triunghiuri echilaterale; sistemul e simplu rezemat în punctele A şi B situate la acelaş nivel, în C şi E sunt aplicate forţele verticale P şi Q.



Se cer:

a) reacţiunile din A şi B; *b)* condiţiunile ca sistemul să nu se răstoarne; *c)* tensiunile în bare. Caz particular P = Q.

2. O roată omogenă O de greutate P şi rază r se reazemă pe o şină orizontală AB, în centrul roţii este aplicată o forţă orizontală H; deosebit de aceasta, roata e supusă şi la un cuplu M a cărui axă se proiectează în centrul roţei şi care tinde a mişca roata în sens contrariu cu H. Se cer:



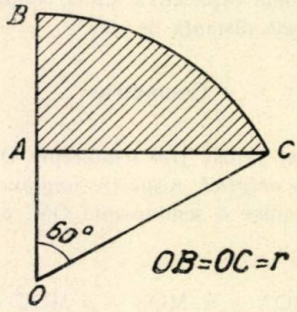
a) condiţiile de echilibru; *b)* condiţiile ca roata să se rostogolească pe şină fără să alunece. Se va nota cu f şi s coeficienţii de frecare la alunecare şi rostogolire.

Aplicaţie:

$P = 1.000kg$; $H = 180kg$; $r = 0{,}80m$;

$f = 0{,}25$; $s = 0{,}5cm$.

3. O placă omogenă ABC, de greutate P are forma unei jumătăţi de segment circular, de rază r şi unghiu la centru 60°.



Placa fiind orizontală, se reazemă pe 3 picioare verticale, proiectate în A, B şi C.

Se cer presiunile transmise în picioare.

V. CHIMIE GENERALĂ

1. Se dă minereul numit blendă şi se cere să se arate:
   a) Care este compoziţia acestui minereu.
   b) Care sunt produsele industriale ce se pot obţine din acest minereu.
   c) Care sunt metodele ce se întrebuinţează pentru obţinerea acestor produse.
   d) Proprietăţile şi întrebuinţările acestor produse.
2. Despre hidrocarburile etilenice.

VI. FIZICA

1. Lupa (lentila subţire şi lentila groasă).
2. Metode calorimetrice bazate pe fenomenul răcirii.

3. Tuburi capilare.

4. Două cilindre de lungimi l_1 şi l_2 sunt lipite aşa ca să formeze un singur cilindru. Densităţile respective sunt d_1 şi d_2. Cilindrul rezultant este afundat într'un lichid de densitate d. Ce relaţiune trebue să existe între datele de mai sus pentru ca cilindrul să plutească ?

VII. GEOLOGIE, MINERALOGIE ŞI PETROGRAFIE

1. Rocele sedimentare în constituţia cărora intră, ca element predominant, carbonatul de calciu.

2. Explicaţi dispoziţia după paralele geografice a catenelor muntoase din Eurasia, în ipoteza lui WEGENER !

3. Elementele mineralogice ce cristalizează în sistemul monoclinic.

4. In care din clasele holoedrice ale celor 6 sisteme cristalografice intervine axul A^4 ?

5. Tipurile de erupţiuni.

(Toate chestiunile obligatorii. Timp acordat : 4 ore).

ANUL I

(Sesiunea Septemvrie 1935)

GEOMETRIE ANALITICĂ

Construcţii

1. O curbă : $y = f(x)$ trece prin origine şi este tangentă la axa Ox ; curba satisface ecuaţia diferenţială :

$$y'' = 6x + 2.$$

După ce se va obţine explicit ecuaţia curbei, se va calcula raza de curbură în origine.

2. Să se arate că într'o parabolă diametrele sunt paralele cu axa parabolei.

ELECTROMECANICĂ

1. Să se construiască curba :

$$x^2 (x + y) = a^2 (x - y).$$

2. Axele fiind rectangulare se consideră în spaţiu curba C intersecţia sferei :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

cu cilindrul circular :

$$x^2 + z^2 - ax = 0.$$

Să se determine proiecţia curbei C pe planul xOy.

MINE

1. Să se construiască curba definită de ecuaţia:

$$y = x^4 - 2x^2 - 3.$$

2. Să se arate că într'o iperbolă echilateră segmentul care uneşte centrul O cu un punct oarecare M de pe curbă, este medie proporţională între cele 2 raze vectorii $\overline{FM}$ şi $\overline{F'M}$ care unesc focarele cu punctul M, adică:

$$\overline{OM}^2 = \overline{FM} \cdot \overline{F'M} .$$

BIBLIOGRAFIE

Mathesis. Tomul XLIX. No. 7. Iulie 1935. Gembloux. Suprafeţele raţionale riglate de ordinul al patrulea, considerate ca proiecţiuni ale unei suprafeţe de ordinul al patrulea situate într'un spaţiu cu cinci dimensiuni, de D-ra LILA GUSSENHOVEN. Asupra ortopolului în tetraedru, de R. GOORMAGHTIGH. Calculul apropiat al $\int_0^x \frac{\cos v}{\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx$, de R. GODEAU. Asupra ortopolului, de V. THÉBAULT. Asupra metodei lui CAUCHY-LIPSCHITZ şi derivarea integralei unei ecuaţii diferenţiale normale considerată ca funcţiune de valorile iniţiale x_0 şi v_0, de R. H. J. GERMAY.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol XLI. No. 8. August 1935. New-York. Câteva propoziţiuni noui complete asupra identităţilor spaţiilor afine şi metrice, de JACK LEVINE. Asupra limitei unei serii de grupe de puncte de HSÜ PAO-LU. Sistemul numărului după Dedekind, de W. F. OSGOOD. Alte transformări ne-involuturiale ale spaţiilor Cremona conţinute într'un complex linear special, de AMOS BLACK. Transformările involuturiale ale spaţiilor de tipurile Geiser şi Bertini, de L. A. DYE. Câteva teoreme asupra limitelor duble, de J. D. HILL. Conectivitatea relativă a produselor simetrice, de MOSES RICHARDSON. Constanta $\mathfrak{A}$ a lui Bloch pentru o funcţiune *Schlicht*, de R. M. ROBINSON. Asupra însumării unei anumite clase de serii polinomiale ale lui *Jacobi*, de A. P. COWGILL. Triangulaţia pluralităţii clasei I, de S. S. CAIRNS. Diferenţierea secanţelor, de ORRIN FRINK, JR. Asupra singularităţilor unei funcţiuni analitice, de E. W. MILLER. Asupra coeficienţilor unei funcţiuni reale tipice, de M. S. ROBERTSON. Derivate de ordin înalt ca limite simple, de PHILIP FRANKLIN. Teorema factorului de convergenţă în teoria însumării seriilor, de H. L. GARABEDIAN.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XV. No. 7. Septemvrie 1935. Timişoara. Despre funcţiile alternate de mai multe variabile independente, de TIBERIU POPOVICIU.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 6. August 1935. Buenos Aires. Asupra ecuaţiilor diferenţiale de tipul EULER, de G. G. CONSTANTINESCU. Origina studiului matematicilor în şcolile argentiniene, de J. M. DOVIDIO.

C. C. TEODORESCU. *Allocution au Congrès interbalcanique des mathématiciens.* Athènes 2 — 9 Septembre 1934. (Extras din *Actes du Congrès*). Atena 1935.

C. C. TEODORESCU. *(Nouvel emploi des moments d'inertie aux questions statistiques.* (Extras din *Actes du Congrès interbalcanique de mathématiciens*, Athènes, 2 — 9 Septembre 1934. (I)). Atena 1935.

MIRON NICOLESCO. *Extension du théorème de Liouville aux fonctions harmoniques d'ordre* p. (Extras din *«Mathematica»*). Cluj 1932.

MIRON NICOLESCO. *Séries de puissances harmoniques dans un domaine borné.* (Extras din *Mathematica*). Cluj 1932.

MIRON NICULESCU & ALEXANDRU NICULESCU. *Curs elementar de Geometrie analitică* pentru elevii Clasei a VIII-a (Secţiunea ştiinţifică). Ediţia I. Cultura Românească. Preţul 70 lei. Bucureşti 1935.

NUMERUS. Vol. I, Caietul 3. Septemvrie 1935. Bucureşti. Géométrie du triangle, de TR. LALESCO. Bucureşti 1935.

AL. MANICATIDE & N. ABRAMESCU. *Algebra pentru Clasa IV-a secundară.* Ediţia XIII-a. Editura „Cartea Românească", Bucureşti 1935.

AL. MANICATIDE & N. ABRAMESCU. *Algebra pentru Clasa V-a secundară.* Editura „Cartea Românească". Bucureşti 1935.

N. ABRAMESCU. *Algebra financiară pentru Clasa VI-a.* Editura „Cartea Românească". Bucureşti 1935.

N. ABRAMESCU. *Algebra superioară Clasa VII-a. Secţia Ştiinţifică.* Editura „Cartea Românească". Bucureşti 1935.

N. ABRAMESCU. *Lecţiuni elementare de Algebră superioară.* Funcţiuni primitive. Calculul ariilor. Numere complexe. Teoria ecuaţiilor. Pentru clasa VIII-a. Secţiunea Ştiinţifică. Ediţia V-a. Tipărită în „Biblioteca Gazeta Matematică". Bucureşti 1935.

N. ABRAMESCU. *Trigonometrie.* Clasa VI-a. Cu aplicaţiuni la agrimensură şi statică. Editura „Cartea Românească". Bucureşti 1935.

N. ABRAMESCU. *Geometria analitică pentru clasa VIII-a.* Secţia Ştiinţifică. Editura „Cartea Românească". Bucureşti 1935.

N. ABRAMESCU. *Astronomie pentru clasa VIII-a.* Ediţia X-a. Editura „Cartea Românească". Bucureşti 1935.

CERERI

250. Se cunoaşte autorul cărţii:
Table de Aritmetică spre întrebuinţarea Şcoalelor primare. Bucureşti. In tipografia Colegiului Sf. Sava. 1843? Pagini 114.

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

LAGRANGE. *Oeuvres.* 8 Volume. Gauthier-Villars, Paris 1882.
Donate de D-l Inginer G. POPESCU-BOTOŞANI, cu ocaziunea Jubileului de 40 ani al *Gazetei Matematice.*

F. RUDIO. *Leonhard Euler.* Zürich 1909.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

J. EVRARD. *Théorie des acceptions.* Paris. Baudry, 1891.
Donată de D-l I. IONESCU Inginer.

* * *

Cărţile ce urmează au fost donate de *Institutul Naţional Român pentru studiul amenajării şi folosirii izvoarelor de energie. (I. N. R.)* prin D-l C. BUŞILĂ:

1. PL. ANDRONESCU. Répresentation sous une forme unifié du fonctionnement des machines électriques. Bucureşti 1932.

2. PL. ANDRONESCU. Le résultat de l'éncadrement du phénomène électrostatique dans la structure mathématique. Bucureşti 1934.

3. I. ARAPU & ST. MANTEA. Combustibilii României în 1930. Bucureşti 1930.

4. T. ATANASESCU. Programul desvoltării reţelei de căi ferate din România, mijloace de tracţiune de adoptat pe diferitele linii mari ce se vor construi. Bucureşti 1933.

5. I. L. BLUM. Clasificarea combustibililor solizi. Bucureşti 1934.

6. E. BODEA. Sisteme de unităţi de măsură cu coherenţă dimensională. Bucureşti 1932.

7. C. BOERESCU. Energia. Bucureşti 1930.

8. E. BRYLINSCHI. Sur le 5-ème Congrès de l'Union internationalle des producteurs et distributeurs d'énergie électrique. Bucureşti 1934.

9. V. BUCHNER. Generatorul sincron mergând singur. Bucureşti 1930.

10. V. BUCHNER. Calculul mersului în paralel al generatorului sincron. Bucureşti 1930.

11. I. E. BUJOIU. Consideraţiuni asupra utilizării cărbunilor în România. Bucureşti 1933.

12. I. E. BUJOIU. Quelques considérations générales sur l'utilisation rationelle des lignites de Roumanie. Bucureşti 1928.

13. M. CIORTEA. Contribuţiuni la studiul valorizării gazului metan. Bucureşti 1931.

14. E. COLEŞ. Brichetarea cărbunilor româneşti. Bucureşti 1934.

15. I. CONSTANTINESCU. Problema perturbaţiilor produse de liniile de tracţiune electrică asupra liniilor telegrafice şi telefonice. Bucureşti 1933.

16. G. DAMASCHIN. Contribuţiuni la studiul combustibililor minerali în cadrul problemei energiei. Principiile unei politice de Stat în materie de combustibil mineral. Bucureşti 1933.

17. A. A. DERIGAUT. Factorul de putere la transmisiuni electrice. Bucureşti 1930.

18. P. DIMO & M. BERCOVICI. Notă în legătură cu denumirea şi reprezentarea vectorială a puterii reactive. Bucureşti 1934.

19. I. DINULESCU. Uzina termoelectrică Floreşti. Bucureşti 1930.

20. I. DINULESCU. Instalaţiile electrice din Sibiu. Bucureşti 1929.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2356. *Să se simplifice expresiunea:*

$$E = \frac{[(\alpha^2+\beta^2)^4+(\alpha^2-\beta^2)^4+(2\alpha\beta)^4]^2}{(\alpha^2+\beta^2)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8+(2\alpha\beta)^8}.$$

I. BANCIU.

Soluţie dată de D-l M. L. NEGREA (Brăila).

Desvoltând pătratul dela numărător, expresia dată se mai poate scrie sub forma

$$E = 1+2\times\frac{(2\alpha\beta)^4[(\alpha^2+\beta^2)^4+(\alpha^2-\beta^2)^4]+(\alpha^4-\beta^4)^4}{(\alpha^2+\beta^2)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8+(2\alpha\beta)^8}.$$

Dar se găseşte uşor că

$$(\alpha^2+\beta^2)^4+(\alpha^2-\beta^2)^4 = 2(\alpha^8+6\alpha^4\beta^4+\beta^8)$$

$$(\alpha^2+\beta^2)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8 = 2(\alpha^{16}+28\alpha^{12}\beta^4+70\alpha^8\beta^8+28\alpha^4\beta^{12}+\beta^{16})$$

pe care înlocuindu-le în E, desvoltând pe $(\alpha^4-\beta^4)^4$ şi făcând toate calculele se ajunge la

$$E = 1+2\times\frac{\alpha^{16}+28\alpha^{12}\beta^4+198\alpha^8\beta^8+28\alpha^4\beta^{12}+\beta^{16}}{2(\alpha^{16}+28\alpha^{12}\beta^4+198\alpha^8\beta^8+28\alpha^4\beta^{12}+\beta^{16}}$$

$$\therefore\ E = 2$$

care este valoarea simplificată a expresiei date.

Notă. Dacă se ţine seamă de rezultatul la care s'a ajuns, se desvoltă numărătorul lui E, se egalează cu dublul numitorului şi se fac reducerile, se găseşte identitatea interesantă

$$2(\alpha^4-\beta^4)^4+2(2\alpha\beta)^4(\alpha^2+\beta^2)^4+2(2\alpha\beta)^4(\alpha^2-\beta^2)^4$$
$$=(\alpha^2+\beta^2)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8+(2\alpha\beta)^8.$$

GH. B.

PROBLEMA 2390. *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{k=1}^{6}\left(\operatorname{tg}^4\frac{k\pi}{28}+\operatorname{cotg}^4\frac{k\pi}{28}\right)=6668.$$

V. ALACI.

Observăm întâi că avem :

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{6}\left(\operatorname{tg}^4\frac{k\pi}{28}+\operatorname{cotg}^4\frac{k\pi}{28}\right)$$
$$=-12+\sum_{k=1}^{6}\left(\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{28}+\operatorname{cotg}^2\frac{k}{28}\right)^2.$$

Apoi, în *„Gazeta Matematică"*, Vol. XIX, pag. 110, e stabilit că ecuaţia care are rădăcinele :

$$x=\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{4m}+\operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{4m},\quad (k=1,\,2,\ldots,\,m-1),$$

este :

$$(x-6+4i\sqrt{x-2})^m-(x-6-4i\sqrt{x-2})^m=0,\quad (i=\sqrt{-1}).$$

Rezultă pentru $m=7$, că ecuaţia :

$$(2)\qquad (x-6+4i\sqrt{x-2})^7-(x-6-4i\sqrt{x-2})^7=0,$$
$$(i=\sqrt{-1}).$$

are rădăcinele :

$$(3)\qquad x=\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{28}+\operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{28},\quad (k=1,\,2,\ldots,\,6).$$

Desvoltând ecuaţia (2), reducând termenii asemenea şi lăsând

la o parte factorul $8i\sqrt{x-2}$ care n'are rădăcini de forma (3), obţinem:

$$C_7^1(x-6)^6 - C_7^3(x-6)^4 \cdot 4^2 \cdot (x-2) + C_7^5(x-6)^2 \cdot 4^4 \cdot (x-2)^2 - C_7^7 \cdot 4^6 (x-2)^3 = 0.$$

Efectuând binoamele şi ordonând după puterile lui x, avem:

$$7x^6 - (7 \times 6^2 + 35 \times 4^2)x^5 + (7 \times 15 \times 6^2 + 35 \times 4^3 \times 6 + 35 \times 4^2 \times 2 + 21 \times 4^4)x^4 + 7ax^3 + 7bx^2 + 7cx + 7d + 0,$$

sau simplificând prin 7 şi calculând coeficienţii, obţinem:

$$(4) \qquad x^6 - 116x^5 + 3388x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

unde se vede că am calculat numai primii trei coeficienţi, de care vom avea nevoie, cum o să vedem imediat, ultimii însemnându-i cu a, b, c, d.

Privind ecuaţia (4) şi rădăcinile sale date de (3), putem exprima suma patratelor acestor rădăcini, în funcţie de coeficienţii ecuaţiei (4) corespunzătoare, cum ştim din teoria ecuaţiilor şi avem:

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{6}\left(\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{28} + \operatorname{cotg}^2\frac{k\pi}{28}\right)^2 = 116^2 - 2 \times 3388 = 13456 - 6776 = 6680.$$

Privind acum relaţiunea (1) şi folosind identitatea (5), obţinem:

$$\sum_{k=1}^{6}\left(\operatorname{tg}^4\frac{k\pi}{28} + \operatorname{cotg}^4\frac{k\pi}{28}\right) = -12 + 6680 = 6668,$$

şi astfel identitatea dată este stabilită.

Soluţie dată de D-l POPESCU D. GHEORGHE (liceul Internat, Iaşi).

V. A.

PROBLEMA 2446 [1]). *Cercurile* O *şi* O_1 *sunt tangente interior în* T. *Coardele* AB, AC *ale cercului* O *sunt tangente cercului* O_1. *Dreptele* TB, TC *taie cercul* O_1 *în* B' *şi* C'. *Să se demonstreze că* B'C' *este paralelă cu* BC.

C. H. NICOLAU.

---

1) A se vedea nota din josul paginei 573, Vol. XL.

I. *Soluţie* dată de D-l D. I. LEBĂDĂ (Lic. militar, Iaşi).

Ducând tangenta TM comună celor două cercuri avem următoarele egalităţi de unghiuri

$$\sphericalangle TB'C' = \sphericalangle MTC' \; ; \; \sphericalangle TBC = \sphericalangle MTC \; ; \; \sphericalangle MTC = \sphericalangle MTC'$$
$$\sphericalangle TB'C' = \sphericalangle TBC$$

care rezolvă problema.

II. *Soluţie* dată de D-nii: M. L. A. NEGREA (Brăila), D. GR. CERCELARU.

Triunghiurile isoscele TO_1B', TOB având unghiul din T comun au şi unghiurile din O_1 şi O egale, deci $O_1B' \parallel OB$. La fel $O_1C' \parallel OC$. Din acest paralelism se scoate

$$\frac{TB'}{TB} = \frac{TC'}{TC} = \frac{O_1B'}{OB}$$

care arată că B'C' este paralelă cu BC.

Notă. 1°. A mai rezolvat problema prin relaţiuni de unghiuri D-l E. GH. BEIU-PALADI (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti).

2°. De oarece în soluţii nu s'a făcut uz de ipoteza că AB, AC sunt tangente la O_1, rezultă că proprietatea e adevărată oricum ar fi cele două coarde care se întâlnesc în A pe O.

3°. S-au mai primit soluţiuni foarte bune de la D-nii: P. DOBRESCU, VICTOR FLORESCU, C. N. GAVRILESCU, I. ST. NICOLESCU şi N. D. ŞTEFĂNESCU.

GH. B.

PROBLEMA 2502. *Să se arate că:*

$$2^{3n}\,(744307^{2n+1}.2^{3n+3} + 3^{n+5^n}) - 2^{\alpha}.417^n + 3^{2n+1} = \mathcal{M}.1917.$$

I. LINTEŞ.

Membrul I este prim cu 3 căci toate părţile sumei se divid prin 3 afară de $744307^{.2n+1}\,2^{3n+3}$. Cum membrul II este multiplu de 3 rezultă că egalitatea enunţată nu este adevărată.

Problema 2502 a fost propusă în numărul de pe Februarie 1917 în plin războiu şi s'a imprimat cu erori care nu au mai putut fi corectate, pierzând în învălmăşeala războiului notiţele care au dus la compunerea problemei.

Numeroşii corespondenţi care au încercat această problemă au arătat că enunţul nu este adevărat.

De oarece numărul 1917 nu mai este legat actual de evenimentele care au provocat propunerea problemei, nu mai caut să dau vre-o rectificare enunţului pentru a forma o expresie divizibilă prin 1917.

I. L,

PROBLEMA 2795. *Si* $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$, $\operatorname{tg}\delta$, *sont les racines de l'écuation*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

trouver l'équation du troisième degré, qui a pour racines

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\gamma+\delta)\ ,\ \operatorname{tg}(\alpha+\gamma)\operatorname{tg}(\beta+\delta)\ ,\ \operatorname{tg}(\alpha+\delta)\operatorname{tg}(\beta+\gamma)$$

J. N.

Soluţie dată de D-l I. B. FLORESCU. Să notăm cu

$$x_1 = \operatorname{tg}\alpha\ ,\ x_2 = \operatorname{tg}\beta\ ,\ x_3 = \operatorname{tg}\gamma\ ,\ x_4 = \operatorname{tg}\delta$$

şi să formăm mai întâi ecuaţia de gr. III care are drept rădăcini pe

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4\ ,\ y_2 = x_1x_3 + x_2x_4\ ,\ y_3 = x_1x_4 + x_2x_3\ ,$$

ecuaţie care ne va folosi în cele ce urmează. Ţinând seamă de relaţiile ce există între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei date, avem succesiv

$$\Sigma y_1 = (x_1x_2 + x_3x_4) + (x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_4 + x_2x_3) = b,$$

$$\Sigma y_1y_2 = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4) + (x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$$

$$+ (x_1x_4 + x_2x_3)(x_1x_2 + x_3x_4) = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$+ x_1x_2x_4(x_1 + x_2 + x_4) + x_1x_3x_4(x_1 + x_3 + x_4) + x_2x_3x_4(x_2 + x_3 + x_4)$$

$$= -a(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) - 4d = ac - 4d,$$

$$y_1y_2y_3 = (x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3) =$$

$$x_1x_2x_3x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2$$

$$+ x_2^2x_3^2x_4^2) = d[(\Sigma x_1)^2 - 2\Sigma x_1x_2] + (\Sigma x_1x_2x_3)^2 - 2\Sigma x_1^2x_2^2x_3x_4$$

$$= d(a^2 - 2b) + c^2 - 2bd = a^2d + c^2 - 4bd.$$

Ecuaţia căutată este deci

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0.$$

Revenind acum la problema propusă şi observând că

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\gamma+\delta)=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta)}{(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta)}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)(x_3+x_4)}{(1-x_1x_2)(1-x_3x_4)}=\frac{x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_3x_4}{1-x_1x_2-x_3x_4+x_1x_2x_3x_4}$$

$$=\frac{b-(x_1x_2+x_3x_4)}{1+d-(x_1x_2+x_3x_4)}=\frac{b-y_1}{1+d-y_1}$$

deducem că ecuaţia cerută de problemă se va găsi din ecuaţia în y, găsită mai sus, prin transformarea

$$z=\frac{b-y}{1+d-y} \qquad \therefore \quad y=\frac{(d+1)z-b}{z-1}.$$

Făcând toate calculele se găseşte

$$[(d+1)^2(d-b+1)+(ac-4d)(d+1)+4bd-a^2d-c^2]z^3$$
$$-[2b(d+1)(d-b+1)+(2d+b+2)(ac-4d)+3(4bd-a^2d-c^2)]z^2$$
$$+[b^2(d-b+1)+(d+2b+1)(ac-4d)+3(4bd-a^2d-c^2)]z$$
$$-(abc-a^2d-c^2)=0.$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 2980. *Să se calculeze suma următoare:*

$$S=\frac{n}{3!}+\frac{n(n-1)}{4!}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 3}{n!},$$

n *fiind un număr întreg şi pozitiv mai mare ca 2.*

GH. ZAPAN.

Soluţie dată de D-nii: M. I. ADAM, N. N. ALDEA, G. O. AMĂRĂSCU, M. BOGDAN, N. G. BOTEA, I. N. DRAGOMIRESCU, I. B. FLORESCU, C. E. GEORGESCU, † FL. ER. GEORGESCU, † O. G. POPEA, T. POPOVICIU, I. M. ŞERBĂNESCU, M. ŞTEFAN, E. ŞTEFĂNESCU şi

I. STOENESCU. Inmulţind ambii membri ai sumei din enunţ cu produsul $(n+2)(n+1)$ avem

$$(n+2)(n+1)S = \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!} +$$

$$\ldots + \frac{(n+2)(n+1)\ldots 3}{n!} = C_{n+2}^{3} + C_{n+2}^{4} + \ldots + C_{n+2}^{n},$$

unde am notat ca deobiceiu prin C_j^i simbolul combinărilor de j obiecte luate câte i. Pe de altă parte se cunoaşte identitatea

$$2^{n+2} = 1 + C_{n+2}^{1} + C_{n+2}^{2} + \ldots + C_{n+2}^{n+2}$$

cu ajutorul căreia avem imediat

$$(n+2)(n+1)S = 2^{n+2} - 1 - C_{n+2}^{1} - C_{n+2}^{2} - C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2},$$

$$= 2^{n+2} - 1 - (n+2) - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (n+2) - 1$$

$$= 2^{n+2} - \frac{n^2 + 7n + 14}{2}$$

$$\therefore \quad S = \frac{2^{n+3} - (n^2 + 7n + 14)}{2(n+1)(n+2)}.$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3109. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$u_{2x} + u_{x+2}^2 = 2u_{2(x+1)}^2 + (x+1)^2,$$

u_r însemnând al r-lea termen din şirul lui FIBONACCI.

GH. ZAPAN.

Soluţie dată de D-nii: M. ADAM, N. P. ARCADIAN, N. G. BOTEA şi V. COŞNIŢĂ. Bazându-ne pe relaţia cunoscută

$$u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2$$

şi cu ajutorul relaţiei de recurenţă ce există între trei termeni consecutivi ai şirului lui FIBONACCI, putem scrie succesiv

$$u_{2n} - 2u_{2(n+1)} = u_{n-1}^2 - u_n^2 - 2u_{n+1}^2 = (u_{n-1} + u_n)(u_{n-1} - u_n) - 2u_{n+1}^2$$

$$= u_{n+1}[(u_{n+1} - u_n) - u_n] - 2u_{n+1}^2 = -u_{n+1}^2 - 2u_n u_{n+1}$$

$$= -u_{n+1}(u_{n+1} + 2u_n) = (u_n - u_{n+2})(u_{n+2} + u_n)$$

$$= u_n^2 - u_{n+2}^2 ,$$

adică

$$u_{2n} - 2u_{2(n+1)} + u_{n+2}^2 = u_n^2 .$$

In baza acestei relaţii ecuaţia din enunţ devine

$$(a) \qquad u_x^2 = (x+1)^2 ,$$

şi cum termenii şirului lui FIBONACCI sunt pozitivi,

$$u_x = x + 1.$$

Dar cum u_n creşte mult mai repede decât n din examinarea primilor termeni ai şirului rezultă că ecuaţia are drept soluţii

$$x = 0 \quad \text{şi} \quad x = 4 ,$$

deoarece

$$u_0 = 1 \quad \text{şi} \quad u_4 = 5 .$$

Observaţii. 1°. D-nii: MARIN ŞTEFAN, E. ŞTEFĂNESCU şi I. C. VASILIU au dat numai soluţia $x = 4$.

2°. D-nul M. ADAM consideră şi ecuaţia

$$u_x = -(x+1)$$

care se deduce din (a) şi considerând termeni de indice negativ ai şirului lui FIBONACCI mai găseşte soluţiile

$$x = -1 \ , \quad x = -2.$$

Tot D-sa arată cum se poate generaliza problema pentru un şir definit prin relaţia de recurenţă

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} .$$

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3313. *Intr'o progresie aritmetică de* n *termeni consecutivi, a cărei raţie este* 10, *sunt* 42 *de termeni primi cu* n. *Se cere numărul termenilor progresiei.*

CĂPITAN I. LINTEŞ.

In *„Théorie des Nombres"* par LUCAS pag. 396 este teorema : *„Intr'un şir de* n *termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, a cărei raţie este un număr prim cu* n, *numărul de termeni primi cu* n *este* $\varphi(n)$".

In cazul problemei 3313, dacă n este prim cu *10,* atunci avem :

$$\varphi(n) = 42.$$

Prin urmare :

$$n = 43,\ 49,\ 86,\ 98.$$

Dar nu satisfac decât soluţiunile :

43 şi 49

care sunt prime cu *10.*

MAIOR I. LINTEŞ.

PROBLEMA 3948. *Să se simplifice expresiunea :*

$$E = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2\sqrt{3}+3} + \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2\sqrt{3}-3}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

şi să i se calculeze valoarea cu patru zecimale exacte.

ION S. ANTONIU.

1. *Soluţie* dată de D-nii : MARIUS MARGULIUS şi GEORGE ST. ROŞCA.

Fie E_1, E_2 şi E_3 cei trei termeni ai expresiunii date.

Dacă înmulţim, sub radical, numărătorii şi numitori termenilor E_1 şi E_3, cu conjugata numitorului respectiv, obţinem imediat :

$$E_1 = 2 - \sqrt{3} \quad \text{şi} \quad E_3 = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore \quad E_1 + E_3 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Pentru a simplifica termenul al doilea, vom înmulți numărătorul și numitorul acestui termen cu conjugata numitorului. Vom avea;

$$E_2 = \frac{(\sqrt{2\sqrt{3}+3}+\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2\sqrt{3}-3})}{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2\sqrt{3}-3})(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2\sqrt{3}-3})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+4\sqrt[4]{3}}{5-\sqrt{3}}.$$

Inmulțind încă odată cu conjugata numitorului, pentru a face numitorul rațional, obținem după ce am făcut toate culculele :

$$E_2 = \frac{4+3\sqrt{3}+2\sqrt[4]{3}(5+\sqrt{3})}{11}.$$

Astfel că, expresiunea simplificată este:

$$E = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{4-3\sqrt{3}+2\sqrt[4]{3}(5+\sqrt{3})}{11}$$

$$= \frac{15-8\sqrt{3}+2\sqrt[4]{3}(5+\sqrt{3})}{11}+\sqrt{2}.$$

Pentru calculul valorii ne vom folosi de tabelele XXI și XXII din tabelele de logaritmi ale lui DUPUIS.

Făcând toate calculele, găsim :

$$E = 3{,}1290$$

2. *Soluție* dată de D-nul ȘTEFAN E. OLTEANU.

Este ușor de văzut că :

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3} = \operatorname{tg} 15^0 = 0.267949$$

și

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2}-1 = \operatorname{tg} 22^0\,30' = 0.414213.$$

Termenul al doilea îl putem scrie succesiv:

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+3}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt[4]{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{3}+\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}}{1-\sqrt[4]{3}\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}}=\frac{\sqrt[4]{3}+\operatorname{tg}15^0}{1-\sqrt[4]{3}\operatorname{tg}15^0}=\operatorname{tg}(\alpha+15^0)$$

în care am notat $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt[4]{3}$.

Calculând $\operatorname{tg}\alpha$ cu ajutorul logaritmilor, găsim:

$$\alpha=52^0 46'16'',15$$

deci:

$$E_2=\operatorname{tg}(52^0 46'16'',15+15^0)=\operatorname{tg}67^0 46'16'',15=2{,}446882.$$

Astfel că, expresia simplificată a expresiunii date este:

$$E=\operatorname{tg}15^0+\operatorname{tg}22^0 30'+\operatorname{tg}67^0 46'16'',15$$

şi a cărei valoare este

$$E=3{,}1290.$$

3. *Observaţiuni.* 1°. Au rezolvat problema prin aceeaşi metodă ca şi în prima soluţie, punând însă rezultatul sub o formă mai complicată, dar găsind exact valoarea expresiunii D-nii: IOAN A. EPURAN, MIRCEA IONESCU şi ŞERBAN C. IOV (Liceul Militar Tg.-Mureş).

2°. Au mai rezolvat problema, dând diverse forme expresiunii şi valorile indicate în paranteze, D-nii: AUREL EM. BĂDESCU (4,4142), PETRE I. GHIŞOIU (4,6643), NICOLAE GLUŞCO (4,7598), ION LEUCO (27,5968), N. N. MIHĂILEANU (3,1017), C. D. RUSU (6,3114) şi TITU G. VELICESCU (4,2985).

I. S. A.

PROBLEMA 4187. *Să se rezolve sistemul:*

$$\frac{xy}{xz+yz}=\frac{c}{b};\quad \frac{yz}{xy+xz}=\frac{a}{c};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a+b+c.$$

I. DUMITRIU-DÀDO.

Soluţie dată de D-nii: S-LT. C. N. AVRAM, N. N. ALDEA, S-LT. A. EM. BĂDESCU, I. CURCHI, V. V. GHIOCEL, E. BEIU-PALADI, CR. GHEORGHEVICI, V. IG. GODEANU, V. A. GRIGORESCU, H. P. IONESCU-BISS, C. D. IONESCU-ŢIU, C. IVĂNESCU, I. LEUCĂ, E. I. MAREŞ, M. MARGULIUS, D. D. MAVRODIN, P. C. MAZILU, E. MEREUŢĂ, M. L. A. NEGREA, I. I. PETRESCU, R. I. RĂŞCANU, I. G. ŞABAC, I. N. SAGER, C. GH. ŞTEFĂNESCU, P. M. VARLAM, C. VASILESCU-POPESCU şi M. S. ZIFF. Din modul cum a fost propusă problema rezultă că b şi c sunt diferiţi de zero. Mai mult şi $a \neq 0$. Intr'adevăr, dacă am avea $a = 0$ ecuaţia a doua ne spune că una din necunoscutele y sau z trebue să fie zero ceeace este în contradicţie cu ecuaţia a treia.

Răsturnând primele două ecuaţii, avem

$$z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{b}{c}\ ,\quad x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{c}{a}\ ,$$

care în baza celei de a treia se scriu

$$z\left(a+b+c-\frac{1}{z}\right)=\frac{b}{c}\ ,\quad x\left(a+b+c-\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{a};$$

$$(a+b+c)\,z-1=\frac{b}{c}\ ,\quad (a+b+c)\,x-1=\frac{c}{a},$$

de unde scoatem

$$z=\frac{b+c}{c\,(a+b+c)}\ ,\quad x=\frac{a+c}{a\,(a+b+c)}\ .$$

Aceste valori introduse în a treia ecuaţie ne dau

$$\frac{1}{y}=(a+b+c)\left(1-\frac{a}{a+c}-\frac{c}{b+c}\right)$$

unde făcând calculele găsim

$$y=\frac{(a+c)\,(b+c)}{c\,(b-a)\,(a+b+c)}\ .$$

Notă. Pe lângă soluţiile menţionate s'au primit încă douăsprezece conţinând greşeli de calcul, şi două identice.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4266. *Să se arate că ecuaţia*

$$3x^2 + [3\lambda - 2(a+1)]x - (a+1)\lambda + a + \lambda^2 = 0$$

are, dacă a *şi* λ *satisfac la condiţiile:*

$$-1 \geqslant a \geqslant 1 \; ; \; 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

o rădăcină cuprinsă între zero şi unu.

N. C.

Se obţine imediat, punând

$$f(x) \equiv 3x^2 + [3\lambda - 2(a+1)]x - (a+1)\lambda + a + \lambda^2$$

$$f(0) = (\lambda - 1)(\lambda - a)$$

$$f(1) = (\lambda + 1)(\lambda - a + 1),$$

de unde

$$f(0) \cdot f(1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - a)(\lambda - a + 1).$$

Se deosebesc mai multe cazuri.

1^0. $0 < \lambda < 1$, $a < 0$.

Se observă imediat că în cazul acesta avem $f(0) \cdot f(1) < 0$, de unde rezultă că $f(x)$ se anulează între zero şi unu.

2^0. $0 < \lambda < 1$; $a > 1$.

In privinţa valorilor pe care le ia a distingem două sub — cazuri:

α) $a \leqslant \lambda + 1$. Se vede că avem $f(0) \cdot f(1) \geqslant 0$. Cum însă $f(0) > 0$; $f(1) \geqslant 0$ şi $f(a - \lambda) \equiv (a - \lambda)(a - \lambda - 1) \leqslant 0$, rezultă că $f(x)$ se anulează de două ori în intervalul 0 , 1.

β) $a > \lambda + 1$. Se vede că $f(0)\, f(1) < 0$ şi prin urmare avem şi în cazul acesta o rădăcină între zero şi unu.

3^0. *Cazurile limită.*

α) $\lambda = 1$. In cazul acesta ecuaţia se scrie:

$$x[3x - (2a - 1)] = 0$$

şi admite totdeauna rădăcina zero, cea de-a doua putând fi exterioară sau interioară intervalului 0 , 1, după valorile pe care le ia a.

β) $\lambda = 0$. Ecuaţia propusă se scrie:

$$3x^2 - 2(a+1)x + a = 0.$$

Se vede imediat că $f(0) \cdot f(1) \leqslant 0$, egalitatea corespunzând cazurilor limită $a = 0$, $a = 1$, când ecuaţia admite respectiv rădăcinile: $0, \frac{2}{3}$; $1, \frac{1}{3}$.

S'au primit soluţiuni în genul celei de mai sus dela D-nii: S-LT. AUREL BĂDESCU, DIMITRIE MAVRODIN, PANAIT MAZILU.

D-nii: VASILE CEAUŞESCU şi VINTILĂ A. GRIGORESCU au trimes soluţiuni incomplete.

Observaţie: Dacă se notează

$$F(x) = \frac{x}{\lambda}(x-1)(x-a)$$

se observă că

$$F(x+\lambda) - F(x) \equiv 3x^2 + [3\lambda - 2(a+1)]x - (a+1)\lambda + a + \lambda^2.$$

Pusă sub forma aceasta, ecuaţia precedentă intră într'o clasă de ecuaţii cu care s'a ocupat D-l Prof. N. CIORĂNESCU într'un articol din Buletinul Societăţii Române de Matematici T. XXXV. Din rezultatele obţinute cu această ocazie se pot deduce cele de mai sus. Mai mult chiar, se poate afirma că în cazurile $a < 0$, $a > \lambda + 1$, rădăcina care nu este cuprinsă între zero şi unu se află respectiv în intervalele: $-a$, 0 şi 1 , a.

R. WOINAROSKY.

PROBLEMA 4269. *Să se arate că normalele duse prin vârfurile respective la cele trei ovale ale lui* CASSINI, *având ca focare două din vârfurile unui triunghiu şi trecând prin al treilea, sunt concurente.*

TIBERIU POPOVICIU.

Soluţia I. Vom folosi proprietatea, menţionată de STEINER, a tangentei în A la ovala de focare B, C: dacă notăm cu B', C' intersecţiile tangentei cu perpendicularele în B, C pe AB, AC avem AB' = AC' (vezi: MANNHEIM «Principes et développements de géométrie cinématique» 1894 p. 317).

Această proprietate caracterizează perpendiculara în A pe simediana interioară. Dacă D este intersecţia simedianei cu cercul circumscris, patrulaterul ABCD este armonic. In particular A′ fiind diametral opus lui A, fascicolul A′ (DABC) este armonic şi tăindu-l cu paralela în A la A′D, care este perpendiculară pe simediană şi notând cu B′, C′ intersecţiile ei cu A′B, A′C avem, după o proprietate cunoscută a raportului armonic, AB′ = AC′.

Rezultă că normala în A la ovala de focare B, C este simediana, deci concură cu analoagele ei în punctul lui LEMOINE a triunghiului.

N. N. MIHĂILEANU
Student-Bucureşti.

Soluţia II. Să notăm cu a, b, c laturile triunghiului ABC. Fie d_2, d_3 distanţele unui punct variabil la punctele B, C. Ecuaţia, în coordonate bipolare, a ovalei lui CASSINI care are ca focare B şi C treçând prin A este

$$F(d_2, d_3) \equiv d_2 d_3 = b \cdot c.$$

După o regulă a lui POINSOT (vezi: G. JULIA «Cours de Cinématique» p. 62) normala în A se obţine făcând suma geometrică a doi vectori îndreptaţi după AB, AC şi având ca lungime

$$\frac{\partial F(b, c)}{\partial b} = c, \quad \frac{\partial F(b, c)}{\partial c} = b.$$

Se vede uşor că normala este tocmai simediana vârfului A. Cele trei normale sunt deci concurente în punctul lui LEMOINE al triunghiului.

O altă soluţie geometrică foarte bună a fost dată de D-l Ing. ALEXANDRU ŞCODRANU. Au mai rezolvat problema pe cale analitică D-nii: CEZAR IVĂNESCU (student, Bucureşti) şi MARIUS MARGULIUS (Bucureşti).

T. P.

PROBLEMA 4448. *Să se demonstreze că determinantul*

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\gamma\cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\gamma\cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2} - \sin\alpha\cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} - \cos\alpha\cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{2\alpha-\beta-\gamma}{2} \\ \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} - \sin\beta\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} - \cos\beta\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{2\beta-\gamma-\alpha}{2} \end{vmatrix}$$

este nul, oricare ar fi α, β, γ.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l M. L. A. NEGREA (Brăila).

Fie M_1, M_2, M_3 puncte pe o elipsă oarecare. Tangentele în M_1, M_2, M_3 formează un triunghiu $P_1P_2P_3$ şi se ştie, după o teoremă a lui BRIANCHON că dreptele P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 sunt concurente. Dacă se consideră elipsa în reprezentarea parametrică ($a\cos\alpha$, $b\sin\alpha$) şi se iau punctele M_1, M_2, M_3 pentru α egal respectiv cu α, β, γ se găseşte uşor că ecuaţia dreptei M_3P_3 este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} & b\sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ a\cos\gamma & b\sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prin permutări circulare se găsesc ecuaţii analoage pentru M_1P_1 şi M_2P_2. Scriind condiţia că cele 3 drepte sunt concurente, se găseşte tocmai determinantul din enunţ.

Problema se poate rezolva direct algebric prin desvoltarea determinantului aşa cum s'a demonstrat partea a doua a problemei 2392, rezolvată la pag. 380, Vol. XXXVIII.

GH. B.

EXERCIŢII

2. Un copil întrebat în 1933 ce vârstă are, răspunde: „adună 2 la anul naşterei şi divide suma cu 2, vei da peste un patrat perfect a cărui rădăcină este răsturnatul vârstii mele".

EM. MEREUŢĂ.

Dacă ab este vârsta copilului, anul naşterei va fi $1933 - ab$ şi după enunţ urmează că

$$1935 - 10a - b = 2(10b + a,^2$$

$$\therefore \quad a = \frac{-5(4b+1) + \sqrt{198b + 3895}}{2}$$

ca a să fie întreg trebuie ca

$$198b + 3895 = k^2.$$

De unde pentru $b = 3$ se găseşte $a = 1$. Deci vârsta cerută era $ab = 13$ şi copilul s'a născut la 1920.

3. Dacă P_n^k este suma produselor primelor n numere luate câte k, atunci

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_n^k \sum_{\alpha=0}^{n-k-1} p^\alpha = 0$$

unde p este un număr oarecare mai mic ca n şi $\neq 1$.

CONST. BUDEANU.

Dacă în identitatea

$$(x+1)(n+2)\ldots(x+n) = x^n + P_n^1 x^{n-1} + \ldots + P_n^k x^{n-k} + \ldots + P_n^n$$

facem succesiv $x = -1$, $x = -p$ se obţine

$$(1) \qquad 1 - P_n^1 + P_n^2 + \ldots + (-1)^k P_n^k \pm \ldots + P_n^n = 0.$$

$$(2) \qquad p^n - P_n^1 p^{n-1} + \ldots + (-1)^k P_n^k p^{n-k} \pm \ldots + P_n^n = 0.$$

Scădem (1) din (2) şi împărţim cu $(p-1)$ găsim

$$P_n^0 \sum_0^{n-1} p^{\alpha_1} - P_n^1 \sum_0^{n-2} p^{\alpha_2} + \ldots + (-1)^k P_n^k \sum_0^{n-k-1} p^{\alpha k} \ldots = 0$$

sau condensat, formula enunţată.

4. Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)}{[\sin(A-B)+\sin C][\sin(B-C)+\sin A][\sin(C-A)+\sin B]} = \frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}.$$

MARCEL AMĂRĂŞTEANU.

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{\sin(A-B)\sin(A+B)}{\sin^2(A+B)} = \frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

De unde

$$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A-B)+\sin C} = \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2+c^2} \text{ etc.}$$

PROBLEME PROPUSE

4579. Cu cifrele 1, 2, 3, . . . , 9 luate câte odată, să se formeze numere de trei cifre în progresie aritmetică.

V. THÉBAULT.

4580. Numărul 111 este scris în un anume sistem de numeraţie. Se cere cea mai mică bază de numeraţiune care dă un astfel de număr produs a două numere de aceeaşi formă scris în alte două sisteme de numeraţie.

I. IONESCU.

4581. Să se construiască un pătrat, având vârfurile pe două cercuri concentrice date.

Să se determine raportul razelor acestor cercuri, astfel ca problema să admită o singură soluţiune şi, în acest caz, să se calculeze suprafaţa pătratului în funcţiune de raza unuia din cercurile date.

PETRE TROFIMOV.

4582. Dacă în triunghiul ABC sunt date trei drepte AA′, BB′, CC′ concurente în punctul O, avem relaţia:

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CO}}{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}-\frac{\overline{CO}}{\overline{OC'}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}\cdot$$

I. I. Ţiţeica.

4583. Dacă vârful V al tetraedrului VABC se proiectează pe planul ABC în primul punct al lui Brocard al triunghiului ABC, există relaţiunea:

$$\overline{VA}^2\cdot\overline{BC}^2\cdot(\overline{BC}^2\cdot\overline{CA}^2-\overline{AB}^4)+\overline{VB}^2\cdot\overline{CA}^2(\overline{CA}^2\cdot\overline{AB}^2-\overline{BC}^4)$$

$$+\overline{VC}^2\cdot\overline{AB}^2\cdot(\overline{AB}^2\cdot\overline{BC}^2-\overline{CA}^4)=0.$$

C. Ionescu-Bujor.

4584. *a, b, c* fiind numere reale date, să se arate că, dacă $b^2-4ac>0$, ecuaţiunea

$$acx^5+(ab+ac+bc)x^4+(a^2+b^2+c^2+ab+bc)x^3$$

$$+(a^2+b^2+c^2+ab+bc)x^2+(ab+ac+bc)x+ac+0,$$

are toate rădăcinile sale reale.

Cum sunt rădăcinile acestei ecuaţiuni dacă $b^2-4ac=0$?

O. N. Ţino.

4585. Să se verifice identităţile:

$$(xy+yz+zx)^2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)-xyz(x+y+z)^3$$

$$\equiv(x+y+z)^2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+xyz^2+yzx^2+zxy^2)$$

$$-(xy+yz+zx)^3$$

$$\equiv(x^2+y^2+xy)(y^2+z^2+yz)(z^2+x^2+xz).$$

N. Botea.

4586. In triunghiul ABC, notăm O_9, I, I_a centrele cercurilor medial, înscris şi exînscris relativ la vârful A. Să se stabilească relaţia:

$$(R + 2r_a)\cos\widehat{AI_a O_9} - (R - 2r)\cos\widehat{AIO_9} = 8R \sin\tfrac{1}{2}A,$$

R, r, r_a fiind notaţiile cunoscute.

N. N. MIHĂILEANU.

4587. Să se rezolve ecuaţia

$$x^3 + x^2 \sin\alpha + x \operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha = 0,$$

determinându-se unghiul α, ştiind că rădăcinile sunt:

$$\cos\alpha \ , \ \operatorname{cotg}\alpha \ , \ \operatorname{cosec}\alpha.$$

GH. VASILIU.

4588. Să se rezolve ecuaţiunea

$$Ax^2 + Bx + (x - 1)\,L\,(x - 1) = 0,$$

L fiind simbolul logaritmilor neperieni.

Discuţie.

ION S. ANTONIU.

4589. Să se arate că expresiunea:

$$G_n = \sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} + \ldots + \sin\frac{1}{n} + \log \sin\frac{1}{n}$$

tinde către o limită bine determinată pentru $n = \infty$.

M. GHERMĂNESCU.

4590. Se dă un cerc cu centrul în O şi două puncte fixe A şi B situate pe un diametru şi egal depărtate de centru.

Fie M un punct de pe cerc. Dreptele MA şi MB taie cercul în două puncte P şi Q şi fie R mijlocul lui $\overline{PQ}$.

Să se demonstreze că perpendiculara în R pe OR rămâne tangentă la o elipsă sau la o iperbolă, după cum A şi B sunt interioare cercului sau nu, când M se mişcă pe cerc.

GH. TH. GHEORGHIU.

ERATĂ. 1. La pag. 9 în dreptul numărului 61 se va înlocui GHEORGHE A. MIRCEA prin GHEORGHIU A. MIRCEA.

2. La pag. 11 în dreptul numărului 95 se va înlocui MIHAILOPOL prin MIHALOPOL.

3. La problema 4560 proiecţia lui M se ia pe AB, nu pe BC.

Rectificare. La pag. 5 la Personalul Redacţiunii s'a omis a se trece şi D-nul DAN VASILIU printre membrii delegaţi pentru corecturi şi imprimarea revistei.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Beiu-Paladi Gh. E. (4536); *Cardara Gh.* (4381, 459); *Cercelaru Gr. D.* (2446, 4535, 36); *Constantinescu G. G.* (1576, 3493, 99, 808); *Cseke V.* (4469, 525); *Dobrescu Paul* (4407, 30, 518, 27, 36, 44, 45, 55, 56); *Enache I.* (4375); *Florescu Victor* (4536, 44); *Gavrilescu N. Const.* (4518, 45); *Lebădă I. D.* (2446, 4383, 409, 18, 59, 60, 69, 71, 85, 93, 523, 25, 26, 49, E); *Mănac V.* (4444); *Millea I. N.* (4375); *Năstase M.* (4545); *Negrea A. Mircea Leonte* (2446, 4227, 370, 459, 512, 25, 40, 48, 52, 56); *Nicolescu St. I.* (4552); *Petrescu I. Ion* (4444); *Postelnicescu C. M.* (4375, 544, 56); *Ştefănescu D. N.* (4536, 49); *Stoica Al.* (4409, 525, 27); *Vissarion V.* (4553).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia V* . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică

Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor GR. ZAPAN (Telefon 4-3929).

C. 39.642

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 3. — NOEMVRIE 1935

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Nomenclatura geometrică română . . . . *I. Ionescu.*
2. Sphères du tétraèdre . . . . . *V. Thébault.*
3. Din generalizările constantei lui Euler . . *G. Călugăreanu. M. Ghermănescu.*
4. Raport asupra lucrărilor propuse pentru premiul V. Conta, în 1935.
5. Note Matematice: 9 — 12.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 251.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2402, 3900, 4271, 4318, 4367, 4430, 4440, 4456, 4459.
10. Exerciţii: 5.
11. Probleme propuse: 4591 — 4602.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 42, 45, 49, 52, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 98, 500, 03, 05, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 28, 30, 31, 33, 34, 46, 47, 50, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 600, 01, 02.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 7 Noemvrie a. c., mai fac parte din Societatea noastră D-nii: LOCOT. I. BUCURESCU, licenţiat în Matematici; ING. E. CARAFOLI, licenţiat şi doctor în Ştiinţe dela Sorbona; N. N. MIHĂILEANU, licenţiat în Matematici şi V. VÂLCOVICI, profesor universitar.

NOMENCLATURA GEOMETRICĂ ROMÂNĂ [1])

Intr'o Conferință pe care am ținut-o la 10 Iunie trecut, la această Societate, și pe care am publicat-o în No. 11 și 12, Anul XL al *Gazetei Matematice,* am arătat că, prin trei geometrii românești publicate în 1837 de P. POENARU, în 1838 de G. ASACHI și în 1839 de ALEXE MARIN, s'a fixat în bună parte nomenclatura geometrică română. Urmărind însă istoricul dezvoltării nomenclaturii tecnice în limba noastră, am dat peste o carte de altă natură, apărută puțin înaintea celor trei geometrii, — în 1836, — și în care găsim termeni geometrici, aproape la fel cu cei găsiți în acele geometrii. Și ceeace este mai curios, e că acea carte nu e scoasă de un român, ci de un străin, care însă s'a informat dela profesorii noștri de matematici asupra termenilor românești de geometrie.

Și pentru ca să ajungă aci, nu i-a fost lucru ușor, căci, după cum am arătat, pe atunci limbagiul matematic nu era fixat. Iată ce spune autorul în această privință:

„Zicerile tecnice într'această tălmăcire s'au întrebuințat cât s'a putut mai potrivit cu duhul limbii românești și cu natura obiectului. Dacă însă în alegerea acestor ziceri și în deslușirea lor, se vor fi făcut nescarva greșeli, nădăjduiesc că-mi va fi iertat a reclama indulgența pentru multele neînlesniri ce am întâmpinat într'această îndeletnicire cu totul nouă în limba română. Pe lângă aceasta socotesc că binele obștesc atunci înaintează când fiecare face spre acest sfârșit ceeace poate".

E foarte interesant de a vedea asemenea idei la străinii veniți la noi în țară acum un secol față de schimonositorii limbei române de mai târziu!

Tot în prefață, autorul ne mai spune ce l'a îndemnat să scoată acea carte:

„După o pauză de mai mulți ani ce am făcut ca zugrav în țara Rumânescă am avut în destul prilej d'a mă încredința că națiia Rumânească are deosebită râvnă pentru artele grafice.

„Toate silințele unui învățător în felul acesta sunt nefolositoare dacă ucenicii săi nu vor avea și ei silință, aplecare și

---

1) Comunicare făcută la Societatea Română de Științe, Secția matematică, în seara zilei de 21 Octomvrie 1935.

gust, dar înaintările cele mai însemnătoare ce s'au făcut în clasurile de desemniu într'o vreme scurtă de când s'au aşezat această învăţătură în Colegiul naţional din Bucureşti, sunt dovada îndestulătoare că părerea mea de mai sus este dreaptă.

„Spre a forma dar nu numai copiatori ci şi artişti, care să fie în stare d'a produce un lucru după regulele hotărîte, m'am îndemnat a mă lupta cu toate greutăţile şi neînlesnirile, şi a alcătui această carte coprinzătoare de oarecare regule şi modeliuri de desemniu, care s'a socotit mai neapărat trebuincioase".

De şi nu am spus nimic despre ce carte e vorba, se vede numai din cele spuse că e chestiunea de un curs de desemn. El a apărut în tipografia lui I. ELIAD la 1836, cu titlul:

„Elemente | de Desenu | şi | de | Architecturâ".

Pe pagina următoare este scris:

„Elemente | de | Deseniu | şi de | Architectură | de K. VALŞTAIN, *Profesor de deseniu | în Kolegiul Sf. Sava. | "*

Pe această pagină este un desemn alegoric cu un bătrân, care priveşte la o piatră ţinută de un copil pe care stă scrise cuvintele:

„Din veacuri întăetoare | în urmă-mi am ast nume | de soartă'ncoronat; Ş'al Românei soare, | de arte, de ştiinţe | s'iveşte luminat".

Cartea e dedicată Domnitorului:

„Meriei Sale | Prea înălţatului Prinţ stăpânitor | a toată ţara rumânească | ALEXANDRU D. GHICA II *| Cu adâncă supunere se închină | de către autor".*

Cartea începe cu *„Pregătiri trebuincioase pentru învăţătura desemniului"*, după care vine *Partea I* pentru desemn şi *Partea II* pentru Architectură. În expunere şi în descrierea figurilor, construcţiilor, şi desemnului geometric mai ales, întâlnim o mulţime de termeni de geometrie.

Ca numiri de elemente geometrice găsim *punt, punt de intersecţie; linie, linie dreaptă, arcuită, compusă* (din părţi drepte şi curbe), *melcuită* (în spirală), *şerpuită* (sinuoasă), *paralelă, orizontală, verticală; unghiu, unghiu drept, ascuţit,* de 45°, *teşit arcuit, compus.*

Printre *figuri geometrice* găsim *patrat, paralelogram, trapez, triunghiu ; triunghiu ecuilater, dreptunghiu, sferic* (cel format în plan de trei arce de cerc, ceeace dovedeşte că autorul nu erea geometru !), *compus* (unele laturi drepte, altele arce) ; apoi *romb, pentagon, ecsagon, eptagon, octagon, decagon, dodecagon, diagonală.*

La *cerc* găsim *arc, arcuri, rază, diametru* sau *osie, cerc întreg, jumătate de cerc, cvadrat* (cuadran), *segment* şi *sector.* Cu aceste două din urmă face uneori confuzie. Din *două cercuri alăturate* face o *elipsă* cu *osia cea mai lungă.*

La construcţiile geometrice *trage* drepte, *ridică perpendiculare, descrie* cercuri, *înseamnă* punte, *taie* linii. La desemnare întrebuinţează *rigole, compas, cvadraturi,* (pătrăţele), *scară de măsură zecimală, scară de modul şi partes.*

Ca *trupuri geometrice* vorbeşte de *cub, paralelipipedul, prisma triunghiulară, pentagonală, ecsagonală,* de *base* şi de *feţe împotrivitoare* ale lor, de *tetraedru, dodecaedru, cilindru* cu *căpătâiele* lui, de *piramidă,* de *con,* de *surfaţă plană,* sau *rătundă, sferă.* Aci găsim cuvinte de geometrie plană ca *ipotenusă, circonferinţă, poligon,* care nu erau în partea I.

Ca termeni de *topografie* găsim *deliniaţia geometrică, contur, înconjurarea figurii, închipire, proiectare, proporţie* şi *plan pă hârtie, desen linial, ardicarea* planului, *secţia,* etc.

Las la o parte termenii tecnici de construcţii şi de architectură.

Toate numirile sunt explicate pe figuri grupate în planşe. Pe una din planşe reproduce *Podul lui Traian* de la Turnu Severin, după *Coloana lui Traian* din Roma.

Din această expunere scurtă se vede ce bine s'a informat CAROL VALŞTAIN despre numirile geometrice ce ereau în uz pe atuncia la diferitele cursuri de matematici, pe care le-a adoptat în cartea sa de desemn şi de architectură. El are meritul de a fi fixat multe numiri prin tipar înainte de a fi apărut cărţi speciale de geometrie. De aceea am crezut necesar de a semnala aici sforţările făcute de acest zugrav pentru fixarea unor denumiri matematice, în opera lui de care ne ocuparăm.

I. IONESCU.

SPHÈRES DU TÉTRAÈDRE[1])

1. Etant donné un tétraèdre ABCD, (BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$, DA $= a'$, DB $= b'$, DC $= c'$), soient O, G, Ω, le centre de la sphère circonscrite, de rayon R, le centre de gravité et le point de MONGE.

Considérons deux sphères, de rayons x et X, y et Y, z et Z, t et T, ayant pour centres chacun des sommets A, B, C, D. Soient P, Q les centres radicaux des sphères (A, x), (B, y) (C, z), (D, t), puis (A, X), (B, Y), (C, Z), (D, T); ω le milieu du segment rectiligne PQ. On a successivement

$$(1)\qquad \begin{aligned} &A\overline{P}^2 - x^2 = B\overline{P}^2 - y^2 = C\overline{P}^2 - z^2 = D\overline{P}^2 - t^2 \\ &A\overline{Q}^2 - X^2 = B\overline{Q}^2 - Y^2 = C\overline{Q}^2 - Z^2 = D\overline{Q}^2 - T^2, \end{aligned}$$

d'où

$$(2)\qquad \begin{aligned} &A\overline{P}^2 + A\overline{Q}^2 - (x^2 + X^2) = B\overline{P}^2 + B\overline{Q}^2 - (y^2 + Y^2) \\ &= C\overline{P}^2 + C\overline{Q}^2 - (z^2 + Z^2) = D\overline{P}^2 + D\overline{Q}^2 - (t^2 + T^2), \end{aligned}$$

et enfin les relations

$$(3)\qquad \begin{aligned} &x^2 + X^2 - 2A\overline{\omega}^2 = y^2 + Y^2 - 2B\overline{\omega}^2 = z^2 + Z^2 - 2C\overline{\omega}^2 \\ &= t^2 + T^2 - 2D\overline{\omega}^2, \end{aligned}$$

qui s'appliquent aux cas particuliers suivants:

1°. $\omega \equiv 0$:

$$(4)\qquad x^2 + X^2 = y^2 + Y^2 = z^2 + Z^2 = t^2 + T^2.$$

2°. $\omega \equiv \Omega$.

En vertu de la formule

$$2A\overline{\Omega}^2 = 2R^2 + \tfrac{1}{2}(a'^2 + b^2 + c^2 - a^2 - b'^2 - c'^2)$$

et de ses analogues pour $B\overline{\Omega}^2$, $C\overline{\Omega}^2$, $D\overline{\Omega}^2$, obtenues par permutations circulaires convenables des lettres a, b, c, a', b', c'[2]), on obtient, en ajoutant

$$\tfrac{1}{2}(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2)$$

à chacun des membres des égalités (3), où $\omega \equiv \Omega$,

$$(5)\qquad \begin{aligned} &x^2 + X^2 + a^2 + b'^2 + c'^2 = y^2 + Y^2 + a'^2 + b^2 + c'^2 \\ &= z^2 + Z^2 + a'^2 + b'^2 + c^2 = t^2 + T^2 + a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

1) A se vedea Nota 3° de la pag. 562, Vol. XL, la finele soluției problemei 2536.

2) V. THÉBAULT, **G. M.** XXXIX — 86.

Autrement dit, *la somme des carrés des rayons des deux sphères correspondant à l'un des sommets, augmentée de la somme des arêtes de la face opposée, est constante pour les quatre sommets du tétraèdre.*

A cette propriété correspond, dans le plan, les relations faisant objet de la question **2536, (G. M. XL — 478),** pour laquelle le point ω est le centre O_9 du cercle d'EULER d'un triangle ABC, les points P et Q étant les centres radicaux de cercles (A, x), (B, y), (C, z) et (A, X), (B, Y), (C, Z).

3^0. $\omega \equiv G$.

On a

$$2A\overline{G}^2 = \tfrac{1}{8}\,[3\,(a'^2 + b^2 + c^2) - a^2 - b'^2 - c'^2]$$

et des expressions analogues pour $2B\overline{G}^2$, $2C\overline{G}^2$, $2D\overline{G}^2$.

En ajoutant

$$\tfrac{3}{8}\,(a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2)$$

à chacun des membres des égalités (3), où $\omega \equiv G$,

$$x^2 + X^2 + \tfrac{1}{2}\,(a^2 + b'^2 + c'^2) = y^2 + Y^2 + \tfrac{1}{2}\,(a'^2 + b^2 + c^2)$$

(6)

$$= z^2 + Z^2 + \tfrac{1}{2}\,(a'^2 + b'^2 + c^2) = t^2 + T^2 + \tfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

4^0. Si ω se confond avec l'un des points Ω', G', symétriques de Ω, G, par rapport à 0,

$$x^2 + X^2 - (a^2 + b'^2 + c'^2) = y^2 + Y^2 - (a'^2 + b^2 + c'^2)$$

(7)

$$= z^2 + Z^2 - (a'^2 + b'^2 + c^2) = t^2 + T^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\,;$$

$$x^2 + X^2 - \tfrac{1}{2}\,(a^2 + b'^2 + c'^2) = y^2 + Y^2 - \tfrac{1}{2}\,(a'^2 + b^2 + c'^2)$$

(8)

$$= z^2 + Z^2 - \tfrac{1}{2}\,(a'^2 + b'^2 + c^2) = t^2 + T^2 - \tfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

N. B. Les relations (5), (6), (7), (8), équivalent aux suivantes :

(9) $x^2 + X^2 - (a'^2 + b^2 + c'^2) = \ldots = t^2 + T^2 - (a'^2 + b'^2 + c'^2)$

(10) $x^2 + X^2 - \tfrac{1}{2}\,(a'^2 + b^2 + c^2) = \ldots = t^2 + T_2 - \tfrac{1}{2}\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)$

(11) $x^2 + X^2 + a'^2 + b^2 + c^2 = \ldots = t^2 + T^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2)$

(12) $x^2 + X^2 + \tfrac{1}{2}(a'^2 + b^2 + c^2) = \ldots = t^2 + T^2 + \tfrac{1}{2}(a'^2 + b'^2 + c'^2)$.

2. Considérons les groupes de quatre spères, de centres A, B, C, D, ayant respectivement pour carrés de leurs rayons

$$x^2 = k_1 l^2 \ , \ y^2 = k_1 m^2 \ , \ z^2 = k_1 n^2 \ , \ t^2 = k_1 p^2$$

$$X^2 = k_2 l^2 \ , \ Y^2 = k_2 m^2 \ , \ Z^2 = k_2 n^2 \ , \ T^2 = k_2 p^2$$

$$x'^2 = kl^2 \ , \ y'^2 = km^2 \ , \ z'^2 = kn^2 \ , \ t'^2 = kp^2,$$

l^2, m^2, n^2, p^2 ayant des valeurs données et k_1, k_2, k étant des coefficients arbitraires. Soient P, Q, ω les centres radicaux de chacun de ces quadruples de sphères.

Nous avons montré que *les points* P, Q, ω *sont situés sur la droite* Δ *menée du centre* O *de la sphère circonscrite perpendiculairement au plan de coordonnées barycentriques* l^2, m^2, n^2, p^2, *par rapport au tétraèdre* ABCD, et de plus, que *l'on a, en grandeur et en signe,*

$$(13) \qquad OP : k_1 = OQ : k_2 = O\omega : k \ ^1).$$

Pour que les points P, Q soient symétriques, par rapport au point ω, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$O\omega = \tfrac{1}{2}(OP + OQ),$$

c'est-à-dire, en vertu de (13), que

$$(14) \qquad 2k = k_1 + k_2 \, .$$

Dès lors, on a les relations

$$(15) \qquad \begin{aligned} O = (k_1 + k_2 - 2k)\, l^2 &= x^2 + X^2 - 2kl^2 = y^2 + Y^2 - 2km^2 \\ &= z^2 + Z^2 - 2kn^2 = t^2 + T^2 - 2kp^2, \end{aligned}$$

qui ne diffèrent pas des relations (3) dans le cas particulier qui nous occupe, où les points P, Q sont situés sur un diamètre de la sphère circonscrite au tétraèdre fondamental.

N. B. 1°. Si $\omega \equiv 0$, $k = 0$, $k_1 = -k_2$, et on a

$$(16) \quad x^2 + X^2 = y^2 + Y^2 = z^2 + Z^2 = t^2 + T^2 = 0.$$

---

1) *Mathésis,* 1932. (Supplément).

2°. Lorsque

$l^2=a^2+b'^2+c'^2, m^2=a'^2+b^2+c'^2, n^2=a'^2+b'^2+c^2, p^2=a^2+b^2+c^2,$

les points P, Q sont sur le diamètre OG de la sphère circonscrite au tétraèdre.

Si $\omega \equiv \Omega$, $k=-\frac{1}{2}$, $k_1+k_2=-1$, et

(17) $x^2+X^2+a^2+b'^2+c'^2=\ldots=t^2+T^2+a^2+b^2+c^2=0.$

Si $\omega \equiv G$, $k=-\frac{1}{4}$, $k_1+k_2=-\frac{1}{2}$, et

(18) $x^2+X^2+\frac{1}{2}(a^2+b'^2+c'^2)=\ldots=t^2+T^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=0.$

Ω' étant le symétrique du point Ω de MONGE, par rapport au centre O de la sphère circonscrite, on sait que

$$A\overline{\Omega'}^2=9R^2-\tfrac{1}{4}(a^2+b'^2+c'^2)-\tfrac{3}{4}(a'^2+b^2+c^2)\ ^{1})$$

et on a des expressions analogues pour $B\overline{\Omega'}^2$, $C\overline{\Omega'}^2$, $D\overline{\Omega'}^2$.

Dès lors, si $\omega \equiv \Omega'$, $k=\frac{1}{2}$, $k_1+k_2=1$, et

(19) $x^2+X^2-(a^2+b'^2+c'^2)=\ldots=t^2+T^2-(a^2+b^2+c^2)=0.$

Enfin, lorsque $\omega \equiv G'$, $k=\frac{1}{4}$, $k_1+k_2=\frac{1}{2}$, et

(20) $x^2+X^2-\frac{1}{2}(a^2+b'^2+c'^2)=\ldots=t^2+T^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=0.$

3°. Le paragraphe **2** est applicable à un triangle ABC, d'orthocentre H, inscrit dans un cercle (O), où les sphères sont remplacées par des cercles de centres A, B, C. Lorsque les points P, Q sont situés sur la droite d'EULER OH, les trois premières relations (15) subsistent. En particulier :

Si $\omega \equiv 0$,

(21) $\qquad x^2+X^2=y^2+Y^2=z^2+Z^2=0,$

si $\omega \equiv O_9$,

(22) $x^2+X^2+a^2=y^2+Y^2+b^2=z^2+Z^2+c^2=0.$

Ces dernières égalités complétent celles faisant l'objet de la question **2536, (G. M.** loc. cit.).

V. THÉBAULT.

---

1) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1932 — 225.

DIN GENERALIZĂRILE CONSTANTEI LUI EULER[1])

Se ştie că expresia

$$C_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

tinde către o limită finită $C = 0{,}577...$, numită constanta lui EULER, când n tinde către infinit. Acest fapt analitic se regăseşte însă ca un caz particular atunci când se consideră expresii mai generale de o formă analoagă; de aceea i s'au dat numeroase generalizări, în sensuri diferite, în decursul timpului.

Una din aceste generalizări ne este sugerată de faptul că termenul $\log n$ care se scade din suma primilor n termeni ai seriei armonice, în C_n, este chiar funcţia primitivă a termenului general al acestei serii, care e $\frac{1}{n}$. Să considerăm deci o funcţie $f(x)$, având o valoare pozitivă finită pentru $x \geqslant a$, unde a e un întreg oarecare; să mai presupunem că $f(x)$ e descrescătoare între a şi $+\infty$ şi $f(+\infty) = 0$.

Seria

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(a+n) + \ldots$$

care poate fi convergentă sau divergentă va înlocui seria armonică ce se utilizează în definiţia constantei lui EULER. Să formăm expresia

$$C'_n = f(a) + f(a+1) + \ldots + f(a+n) - \int_a^{a+n+1} f(x)\,dx$$

care se reduce la $C_{n+1} + \log \frac{n+1}{n+2}$ când luăm $f(n) = \frac{1}{n}$ şi $a = 1$, deci ne conduce în acest caz la constanta lui EULER pentru $n = \infty$.

---

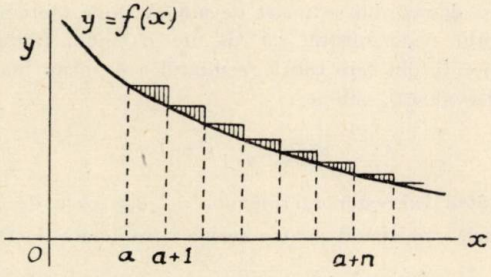
1) A se vedea observaţiunile dela finele articolului.

Să observăm pe figura alăturată care e semnificaţia geometrică a expresiei noastre C'_n. Figura indică îndeajuns care e construcţia dreptunghiurilor de bază egală cu 1 şi de înălţimi respectiv $f(a)$, $f(a+1)$, etc. Expresia C'_n reprezintă deci chiar aria haşurată pe această figură şi vrem să arătăm că în cazuri foarte generale, pentru $n = \infty$ expresia C'_n are o limită finită, reprezentând deci aria totală a «treptelor» ce coboară pe curba noastră până la $+\infty$. Să observăm că putem scrie

$$C'_n = \sum_{k=a}^{n+a} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\, dx \right]$$

apoi, aplicând formula mediei

$$\int_k^{k+1} f(x)\, dx = f(k+\theta_k) \qquad (0 < \theta_k < 1).$$



Putem scrie deci

$$C'_n = f(a) - f(a+\theta_a) + f(a+1) - f(a+1+\theta_{a+1}) + \ldots + f(n) - f(n+\theta_n).$$

Se observă că pentru $n = \infty$ această expresie devine o serie alternată cu termenii descrescători până la zero, ceeace arată că C'_n are o limită pentru $n = \infty$. Rezultă că *expresia*

$$C'_n = f(a) + f(a+1) + \ldots + f(a+n) - \int_a^{a+n+1} f(x)\, dx$$

are întotdeauna o limită finită dacă între a *şi* $+\infty$ *funcţia* f (x) *este continuă şi descrescătoare până la zero, păstrând un semn constant.*

Să considerăm cazul $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ şi $a = 2$. Găsim atunci

$$C'_{n-2} = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \ldots + \frac{1}{n \log n} - \log \log n + \log \log 2,$$

care conform rezultatului de mai sus, va tinde către o limită finită când $n = \infty$.

Apropiind această expresie de una analoagă considerată de D-nul M. GHERMĂNESCU într'un număr anterior al acestei reviste (XLI, pag. 53), constatăm un desacord întru cât în expresia dată de D-sa mai figurează termenul $-\log n$ care împiedică acea expresie de a tinde către o limită finită. Acest desacord ne-a condus atenţia asupra demonstraţiei celor 2 teoreme enunţate în articolul D-sale. Se poate observa astfel că demonstraţia primei teoreme este bazată pe un cerc vicios ce se ascunde în primul aliniat al paginei 51: din faptul că e^{G_n} este descrescător şi limitat inferior nu rezultă că G_n are o limită finită, căci G_n poate lua valori negative şi poate tinde către $-\infty$, cum se şi întâmplă în cazul particular considerat la sfârşitul articolului citat; aceasta explică şi desacordul semnalat de noi. A doua teoremă de asemeni se bazează pe faptul nedemonstrat că G_n are o limită finită, căci se scrie $\lim (G_m - G_n) = 0$, din care cauză rezultatul e iluzoriu. Însă ipoteza făcută de D-nul GHERMĂNESCU, anume

$$u_n > u_{n+1} e^{u_{n+1}},$$

restrânge întrucâtva descreşterea termenilor u_n, aşa că e de aşteptat ca din ea să rezulte unele proprietăţi pentru seriile considerate de D-sa.

Cazul mai general al seriilor lui BERTRAND divergente se obţine pentru a destul de mare şi

$$f(x) = \frac{1}{x \log x \log_2 x \ldots \log_p x}$$

unde s'a notat

$$\log_2 x = \log \log x \quad , \quad \log_p x = \log (\log_{p-1} x).$$

Se obţine astfel expresia

$$\frac{1}{a \log a \log_2 a \ldots \log_p a} + \frac{1}{(a+1) \log (a+1) \ldots \log_p (a+1)} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{(a+n) \log (a+n) \ldots \log_p (a+n)} - \log_{p+1} (a + n + 1)$$

care tinde către o limită finită pentru $n = \infty$, oricare ar fi întregul p. Se ia aci întregul a destul de mare ca să avem $\log_p a > 0$. Alte alegeri convenabile ale funcției $f(x)$ oferă de asemeni generalizări interesante ale constantei lui EULER.

G. CĂLUGĂREANU.

1°. D-l G. CĂLUGĂREANU are dreptate în ceeace privește observațiunea pe care o face în articolul publicat în numărul de față, referitor la un precedent articol al meu *„Asupra unor constante remarcabile"* (*Gazeta Matematică* XLI, No. 1).

Numai că de fapt condițiunea (A) sub care stabilesc cele două teoreme este

$$(A) \qquad e^{u_n} > \frac{u_n}{u_{n+1}} > e^{u_{n+1}} .$$

In momentul când am redactat articolul în chestiune, pierzând din vedere faptul că e^{G_n} ar putea tinde către zero, am crezut că pot simplifica ipoteza, suprimând prima parte a inegalității de mai sus, datorită demonstrațiunii ce am imaginat și care a apărut în acel articol.

Demonstrația aceasta rămâne valabilă și cu condiția (A) de mai sus, numai că trebue încă arătat că $G_n > 0$, ceeace se face cu ușurință. In adevăr, putem scrie

$$G_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \log u_n$$

$$= \left(u_1 - \log \frac{u_1}{u_2}\right) + \left(u_2 - \log \frac{u_2}{u_3}\right) + \ldots + \left(u_n - \log \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) + \log \frac{u_1 u_n}{u_{n+1}}$$

unde parantezele sunt pozitive, în virtutea primei părți a inegalităților (A), iar ultima parte este de asemenea pozitivă căci, $u_n \geqslant u_{n+1}$, iar $u_1 \geqslant 1$, ceeace se poate realiza oricând.

Se poate încă demonstra direct convergența șirului G_n. Putem scrie în adevăr

$$G_n = u_1 - \log \frac{u_1}{u_2} + u_2 - \log \frac{u_2}{u_3} + \ldots + u_n - \log \frac{u_n}{u_{n+1}} + \log \frac{u_1 u_n}{u_{n+1}} .$$

Când n tinde către infinit, G_n devine o serie alternată descrescătoare în baza neegalităților (A), în care termenul general tinde către

zero. Seria este convergentă, iar G_n are astfel o limită finită cuprinsă între $u_1 + \log \frac{u_2}{u_1}$ şi u_1.

2°. In ceeace priveşte generalizarea pe care D-sa o dă constantei lui EULER, aceasta se găseşte cuprinsă implicit în demonstraţia pe care CAUCHY o dă unei teoreme a sa asupra convergenţei seriilor. In adevăr, CAUCHY arată că în condiţiunile puse de D-l G. CĂLUGĂREANU, avem inegalităţile

$$(B) \qquad 0 < \varphi(a) + \varphi(a+1) + \ldots + \varphi(a+n) - \int_a^{a+n} \varphi(x)\,dx < \varphi(a),$$

ceeace demonstrează convergenţa expresiunii de mai sus, pentru $n = \infty$, care este descrescătoare.

De aci CAUCHY deduce că seria

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \ldots + \varphi(a+n) + \ldots$$

este convergentă când integrala de mai sus are un sens, pentru $n = \infty$.

O altă aplicaţiune cunoscută în legătură cu problema de limită, constă în calculul limitei sumelor de forma

$$\varphi(n) + \varphi(n+1) + \ldots + \varphi(n+p)$$

când n şi p tind în acelaş timp către infinit. Neegalităţile (B) de mai sus arată că această limită este egală cu aceea a integrale

$$\int_n^{n+p} \varphi(x)\,dx.$$

3°. Să presupunem că $\varphi(n) = u_n$ satisface condiţiunile (A). Rezultatul de mai sus, comparat cu cel din teorema a doua a articolului meu precedent, conduce la următoarea egalitate

$$\lim_{m,\, n=\infty} \left[\int_n^m \varphi(x)\,dx - \log \frac{\varphi(n)}{\varphi(m)} \right] = 0$$

din care se poate deduce o expresiune asimptotică a integralei care figurează în această inegalitate, chestiune de care mă voiu ocupa cu altă ocaziune.

M. GHERMĂNESCU.

RAPORT ASUPRA LUCRĂRILOR PROPUSE PENTRU PREMIUL V. CONTA, ÎN 1935

Anul acesta ni s'au prezentat pentru premiul V. CONTA două lucrări foarte bune, una de către D-l N. O. ZAHARIA, licențiat în matematici, cealaltă de către D-l AL. STOENESCU, inginer.

Lucrarea D-lui N. O. ZAHARIA are titlul *Filosofia pozitivistă a matematicilor* și conține 72 pagini. Ar fi fost de preferat titlul *Matematicile în filosofia pozitivă a lui* A. COMTE.

Lucrarea e împărțită în 6 capitole. Primul lămurește scopul general al cursului de Filosofie Pozitivă al lui COMTE: de a coordona științele într'un sistem unitar. Cap. II, cu caracter *pur descriptiv,* ne prezintă materialul matematic al lui COMTE, diviziunea matematicii în abstractă (analiza matematică) și concretă (Geometria și Mecanica). Cap. III se ocupă de *definiția matematicii.* D-l ZAHARIA face critica definiției lui COMTE: matematica e știința care-și propune să determine mărimile unele prin altele, după relațiile precise care există între ele. Definiția nu e *suficientă,* căci trebue să conțină și indicarea funcțiunii matematicii de a «stabili relațiile între mărimi». Dar defectul definiției e mai ales acela că nu e *caracteristică* numai matematicii. Din acest punct de vedere, problema rămâne deschisă.

Ultimele trei capitole sunt consacrate studiului *critic* al structurii, după COMTE, a celor trei ramuri componente ale matematicii. Cap. IV tratează despre Analiza matematică și «corelația» ei cu matematica concretă. Această corelație e o dublă funcțiune de subordonare a calculului analitic la fenomenele matematicii concrete și a fenomenelor geometrice concrete la calculul analitic. Unitatea matematicii abstracte e dată prin unitatea de metodă. COMTE admite din punct de vedere filosofic orice elelement nou matematic dacă el a fost acceptat de fapt de știință și de calcul.

Cap. V e consacrat Geometriei. COMTE căutând *Universalul,* găsește că geometrla se justifică ca știința prin crearea geometriei analitice. El pretindea chiar că geometria analitică e ultima expresie a geometriei pozitiviste. «O înglobare a geometriei în corpul analizei matematice constitue o reîntoarcere către starea metafizică» a științei și deci un regres. Aceasta însemnează condamnarea în bloc a geometrii neeuclidiene, a axiomaticei, a topologiei și a întregii geometriei

din ultimele trei sferturi de veac. Concepția lui COMTE, care socotea știința definitiv închegată în haina de acum o sută de ani, e în esențială contradicție cu concepția actuală, dinamică, a științei.

D-l N. O. ZAHARIA analizează spațiul lui COMTE. Ar fi fost bine de comparat cu concepțiile despre spațiu ale lui KANT, H. POINCARÉ și ale contimporanilor noștri, pentru a ne da o imagine completă a acestei probleme fundamentale a Teoriei cunoașterii. E păcat că D-l ZAHARIA s'a mărginit la *Cursul de Filosofie Pozitivă* al lui COMTE, fără să ne arate și modul în care COMTE a pus în aplicare ideile sale despre geometrie în cursul său de *Geometrie Analitică.*

In Cap. VI, D-l N. ZAHARIA trece în revistă ideile lui A. COMTE cu privire la mecanică. Principiile ei (inerția, egalitatea acțiunii și reacțiunii, coexistența și independența mișcărilor) trebuesc privite ca empirice. Pentru asigurarea unității mecanicii, COMTE atribue rolul esențial *mecanicii analitice* și teoremei lui LAGRANGE.

D-l ZAHARIA a studiat bine subiectul și a reușit să ne dea o icoană interesantă a gândirii matematice a lui A. COMTE. O eventuală tipărire a lucrării D-lui ZAHARIA cere însă oarecare remanieri. Stilul său e cam greoi și plin de neologisme nefolositoare (abandoneze, avansată, manieră, travaliu, intelectual, etc.). Sunt unele mici scăpări din vedere, datorite probabil iuțelei de transcriere (de pildă, la geometria analitică plană anunță trei părți, din care a treia, problemele care depind de calculul integral, nu e înscrisă la locul ei). Poate că întreaga lucrare ar câștiga dac'ar fi *concentrată* în două părți. In partea I, ca introducere foarte scurtă, ar fi câteva din faptele expuse în cap. II. Ar urma discuția definiției matematicii (cap. III) și expunerea metematicii abstracte (cap. IV). Partea II s'ar ocupa de matematica concretă și ar concentra ideile lui COMTE despre Geometrie (cap. V), cu desmințirile formale ale evoluției ulterioare a științei și despre Mecanică (cap. VI).

D-l Inginer AL. STOENESCU prezintă o lucrare cu titlul *„Simbolul și formula matematică în fața apriorismului lui* KANT".

Autorul are meritul de a fi simțit tendința caracteristică a cercetării matematice contimporane: de a înlocui principiile intuitive prin elemente logice, riguros constructibile din punct de vedere logic.

Această tendință e și la baza studiului fizicei moderne. D-l STOENESCU numește «Simbol și formulă matematică» ceeace ar fi mai bine zis: axiome logice, uneori în contrazicere cu intuiția.

Analiza acestui proces se poate face și mai adânc decât în lucrarea D-lui STOENESCU. De pildă, teoria quantelor cu aducerea noțiunei de discontinuitate în materie. Sunt manifestări ale predominării *logicului* asupra *intuitivului* în fizica contimporană.

Din alt punct de vedere, D-l STOENESCU conchide la neexistența apriorismului Kantian în ceeace privește spațiul și timpul și la topirea spațiului și timpului în noțiunea de univers al lui MINKOWSKI. Chestiunea ni se pare mai delicată. Evident apriorismul Kantian nu se poate aplică nemodificat, în lumina cercetărilor științifice contimporane. Dar, cu oarecari modificări, se pot găsi totuși unele elemente apriorice în gândirea noastră. Insuși H. POINCARÉ a postulat apriorismul unei idei de *grup*, care dă naștere noțiunei de spațiu. Această idee a lui POINCARÉ, anterioară relativității, ar merita să fie discutată într'o lucrare în care e vorba de elementele logice și cele apriorice din judecata noastră științifică.

Lucrarea D-lui Inginer AL. STOENESCU e o manifestare îmbucurătoare de preocupări științifice idealiste, în vălmășagul materialist care începe să ne sufoce.

Propunem împărțirea premiului V. CONTA între D-nii: N. O. ZAHARIA și Ing. AL. STOENESCU.

COMISIUNEA PENTRU PREMIU:
I. IONESCU, P. SERGESCU,
AL. BUNESCU.

Acest rapot s'a citit și aprobat în Adunarea Generală Extraordinară din 7 Noemvrie 1935.

NOTE MATEMATICE

9. *Primii elevi-ingineri români.*

In Școala de inginerie, întemeiată de GHEORGHE ASACHI la Iași, în anul 1813, au urmat 33 de elevi, dintre care foarte mulți fii de boeri mari și chiar fiul Domnitorului CALIMACH, de pe atunci. In „*Uricarul*“ Vol. VIII, pag. 412, sunt date numele a 31 din acești elevi, și se pare că numai șapte au rămas în cariera inginerească.

lată care au fost acești primi elevi-ingineri români: ASAKI PETRU, BALȘ ALEXANDRU, fost logofăt și Ministru; BALȘ THEODOR, fost Caimacan al Moldovei; BELDIMAN VASILE, fost Vornic; BRAN DIMITRIE, fost Vornic; BUHUȘ MATEI, fost Vornic; BOIAN GHEORGHE, fost Postelnic; VÂRGOLICI GHEORGHE, GHEȚU FOTACHI, IAMANDI GHEORGHE, GECEANU IOAN, GRECEANU NICOLAI, DRĂGHICI VASILE, fost Postelnic, CALIMACH ALEXANDRU, Principe, fost Ambasador otoman la Viena; CARP DIMITRIE, CANTACUZIN IORDACHI, CANTACUZIN SCĂRLAT, CRUPENSCHI ALEXANDRU, CHIRANGHELEU THEODOR, MAVRODI MIHAIL, PANU CONSTANTIN, PASTI DIMITRIE, RAZO CONSTANTIN, SCHELET ALEXANDRU, SCHELET ANTONI, STURZA ALEXANDRU, fost Logofăt; STURZA CONSTANTIN, fost Logofăt; STURZA ALEXANDRU, fost Vornic; SCAVINSCHI DANIIL, HRISTEA IOAN, OSVALD SCARLAT.

I. I.

10. *Généralisation de théorèmes de* NEUBERG *et de* GOB.

1. Soient P_a, P_b, P_c et Q_a, Q_b, Q_c, les projections orthogonales de deux points quelconques P et Q du plan sur les côtés BC, CA, AB d'un triangle. Si l'on porte sur BA et CA les segments rectilignes AM_a, AN_a, égaux respectivement à $k\,P_b\,Q_b$, $k\,P_c\,Q_c$ sur les côtés CB et AB les segments BM_b, BN_b égaux à $k.\,P_c\,Q_c$, $k.\,P_a\,Q_a$, sur AC et BC les segments CM_c, CN_c [1]) égaux à $k.\,P_a\,Q_a$, $k.\,P_b\,Q_b$, k étant un coefficient arbitraire, les droites $M_a\,N_a$, $M_b\,N_b$, $M_c\,N_c$ sont perpendiculaires à la direction $\Delta \equiv PQ$, et les cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c), circonscrits aux triangles $AM_a\,N_a$, $BM_b\,N_b$, $CM_c\,N_c$, ont même diamètre égal à $k.\,PQ$ [2]).

2. Soient A′ et A″, B′ et B″, C′ et C″ les milieux des arcs du cercle (O) circonscrit au triangle ABC sous-tendus par les cordes BA, CA, AB. Dans le triangle $AM_a\,N_a$, par exemple, la direction de la hauteur issue du sommet A, qui est parallèle à Δ, est symétrique de la direction du rayon $A\omega_a$ du cercle circonscrit (ω_a), par rapport à la bissectrice AA′ (ou AA″). Par analogie, les droites $B\omega_b$, $C\omega_c$

1) Pour préciser le sens d'un quelconque des segments considérés AM_a, par exemple, il suffit de noter que, si l'on porte sur CA le segment AM'_a égal à $k.\,P_b\,Q_b$, M_a est le symétrique de M'_a par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle correspondant A du triangle.

2) V. THÉBAULT, **G. M. XXXVI** — 363.

ont des directions symétriques des hauteurs des triangles $BM_b N_b$, $CM_c N_c$, issues des sommets B, C, parallèles à Δ, par rapport à l'une des bissectrices des angles B, C.

Dès lors, *les droites* $A\omega_a$, $B\omega_b$, $C\omega_c$, *concourent au conjugue isogonal* K *du point à l'infini dans la direction* Δ. *Le point* K *est donc situé sur le cercle circonscrit au triangle fondamental.*

Lorsque les points P, Q varient sur la droite Δ étant supposée fixe, ou bien se déplaçant dans le plan parallèlement à elle-même, K reste fixe et les points ω_a, ω_b, ω_c décrivent les droites fixes AK, BK, CK.

3. Les tangentes en A, B, C aux cercles (ω_a), (ω_b), (ω_c), concourent au symétrique K' du point K sur le cercle (O). Ce point K' est comme l'on sait, l'anticomplémentaire de l'orthopôle du diamètre δ du cercle (O) parallèle à la droite Δ, pour le triangle fondamental [1]).

V. THÉBAULT.

11. *Asupra problemei 4258.* Acestei probleme, în care se cer numerele u_n care satisfac relaţiunea

$$(x-2)\,u_n = n\,(u_{n-1} - a)\ ,\ u_0 = 0$$

i se poate da o altă soluţiune, transportând-o în domeniul funcţional.

In adevăr, să punem $u_n = f(n)$, relaţiunea dată devine

$$(1) \qquad (n-2)\,f(n) = n\,f(n-1) - na$$

iar dacă înlocuim n prin $n-1$

$$(n-3)\,f(n-1) = (n-1)\,f(n-2) - (n-1)\,a.$$

Aceste două relaţiuni, scăzute membru cu membru, dau

$$(n-2)\,f(n) - (2n-3)\,f(n-1) + (n-1)\,f(n-2) + a = 0$$

şi înlocuind n prin $n-1$

$$(n-3)\,f(n-1) - (2n-5)\,f(n-2) + (n-2)\,f(n-3) + a = 0.$$

---

1) R. GOORMAGHTIGH, *Mathesis*, 1928 — 23.

Ultimele două relaţiuni, scăzute membru cu membru, dau

$$(n-2)\,[f(n)-3f(n-1)+3f(n-2)-f(n-3)]=0$$

şi cum $n \neq 2$, rezultă

$$(2)\quad f(n)-3f(n-1)+3f(n-2)-f(n-3)=0,$$

care este o ecuaţie funcţională lineară, omogenă şi cu coeficienţi constanţi. Observăm că primul membru reprezintă tocmai *diferenţa de ordinul al treilea* a funcţiunii $f(n)$. Ori, funcţiunea continuă, cea mai generală, având diferenţa de ordinul al treilea nulă, este un polinom arbitrar de gradul al doilea în n, adică

$$f(n)=An^2+Bn+C.$$

Cum $f(o)=0$, urmează $C=0$, deci

$$(3)\qquad f(n)=An^2+Bn.$$

Soluţiile ecuaţiei funcţionale (1) aflându-se printre acelea ale ecuaţiei (2), funcţiunea $f(n)$, dată de (3), satisface ecuaţia (1), dacă $A+B=a$, deci soluţia continuă cea mai generală a ecuaţiei funcţionale (1) este dată de

$$(4)\qquad u_n=f(n)=n\,(An+a-A),$$

A fiind o constantă arbitrară.

M. G.

12. *Asupra întrebuinţării cantităţilor omogene în rezolvarea sistemelor de ecuaţii. Aplicaţie la problema 4267,* (rezolvată G. M., XXXIX, 473). Utilitatea întrebuinţării cantităţilor omogene nu este îndeobşte destul de bine apreciată. Deşi avantajiile lor, şi anume preciziunea şi generalitatea pe care le introduc, au fost puse în evidenţă de mulţi (bunăoară GASTON DARBOUX: «Principes de Géométrie analytique»), totuşi întrebuinţarea lor, cu deosebire în Algebră, este destul de rară [1]).

In rezolvarea sistemelor de ecuaţii, utilitatea lor este de netăgăduit. Astfel două ecuaţii (bine înţeles algebrice) de gradele m şi p, admit în general mp sisteme de soluţii. Acest număr se poate

1) Cel puţin în problemele propuse la G. M. (M. G.).

însă micşora, sau chiar reduce la zero. Aceste cazuri le putem privi ca limite ale cazului general şi deci spune că mai multe sisteme de soluţii au fost aruncate la infinit. De pierderea soluţiilor prin confundarea mai multora într'una singură n'avem a ne teme, căci Algebra ne dă caracterele distinctive ale sistemelor multiple precum şi ordinul de multiplicitate.

Dificultatea semnalată, în privinţa reducerii numărului sistemelor de soluţii, se înlătură imediat prin întrebuinţarea cantităţilor omogene, după cum se poate vedea foarte uşor, şi prin urmare teorema lui BÉZOUT se poate enunţa astfel: *Numărul sistemelor de soluţii a două ecuaţii omogene de gradele* m *şi* p *este totdeauna egal cu produsul* mp, *afară de cazul când este infinit.*

Să exemplificăm cele spuse prin rezolvarea cu ajutorul cantităţilor omogene a problemei *4267*, căreia nu i s'au putut găsi prin metodele obişnuite decât *54* soluţii din *81*, câte ar fi trebuit să aibă.

Pentru organizarea sistemului de ecuaţii, care face obiectul problemei *4267*, să punem

$$x = \frac{X}{Z}; \quad y = \frac{Y}{Z};$$

sistemul devine

$$(1) \qquad \begin{aligned} X^9 + Y^9 &= 513Z^9 \\ X^6Y^3 + X^3Y^6 &= 72Z^9. \end{aligned}$$

Eliminând pe Z avem

$$(2) \qquad 72(X^9 + Y^9) - 513(X^6Y^3 + X^3Y^6) = 0$$

sau, folosind omogenitatea ecuaţiei (2)

$$(X^3 + Y^3)(X^3 - 8Y^3)(8X^3 - Y^3) = 0.$$

Această din urmă ecuaţie se descompune în următoarele trei

$$X^3 + Y^3 = 0; \quad X^3 - 8Y^3 = 0; \quad 8X^3 - Y^3 = 0;$$

iar acestea, tot din cauza omogenităţii, se descompun la rândul lor în câte alte trei ecuaţii de gradul I

$$(3) \qquad \begin{aligned} &X + Y = 0; \quad X - 2Y = 0; \quad 2X - Y = 0; \\ &X + \alpha_3 Y = 0; \quad X - 2\alpha_3 Y = 0; \quad 2X - \alpha_3 Y = 0; \\ &X + \alpha_3^2 Y = 0; \quad X - 2\alpha_3^2 Y = 0; \quad 2X - \alpha_3^2 Y = 0; \end{aligned}$$

unde α_p înseamnă rădăcina de ordin p a unităţii.

Fiecare din aceste 9 ecuaţii de gradul I din (3), asociată uneia din ecuaţiile sistemului (1), ne furnizează 9 sisteme de soluţii, deci avem în total $9 \times 9 = 81$ sisteme de soluţii. Aceste sisteme, ce se obţin imediat în modul expus, sunt

$$\frac{X}{-1} = \frac{Y}{1}, \; Z^9 = 0; \qquad \frac{X}{2} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{\alpha_9^i}; \qquad \frac{X}{1} = \frac{Y}{2} = \frac{Z}{\alpha_9^i};$$

$$\frac{X}{-\alpha_3} = \frac{Y}{1}, \; Z^9 = 0; \qquad \frac{X}{2\alpha_3} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{\alpha_9^i}; \qquad \frac{X}{\alpha_3} = \frac{Y}{2} = \frac{Z}{\alpha_9^i};$$

$$\frac{X}{-\alpha_3^2} = \frac{Y}{1}, \; Z^9 = 0; \qquad \frac{X}{2\alpha_3^2} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{\alpha_9^i}; \qquad \frac{X}{\alpha_3^2} = \frac{Y}{2} = \frac{Z}{\alpha_9^i};$$

unde $i = 0, 1, 2, \ldots 8$.

Prima grupă de sisteme de soluţii reprezintă 3 puncte multiple la infinit. Primul punct este real şi se află în direcţia de coeficient unghiular -1; celelalte două sunt imaginare şi se găsesc respectiv în direcţiile de coeficienţi unghiulari $-\alpha_3^2$ şi $-\alpha_3$. Ordinul de multiplicitate, acelaşi la toate trei punctele, este egal cu 9.

Ultimele două grupe de sisteme de soluţii reprezintă *54* puncte la distanţă finită, dintre care numai *2* puncte sunt reale

$$\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}; \qquad \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}.$$

Metoda de rezolvare întrebuinţată are şi o interpretare geometrică simplă. Ecuaţiile (1) reprezintă două curbe de gradul 9.

Eliminând pe Z am format în (2) o combinaţie a celor două ecuaţii (1), omogenă în X şi Y; această ultimă ecuaţie (2), reprezintă deci drepte trecând prin origine. Pe de altă parte ea este satisfăcută de valorile lui X şi Y care satisfac ecuaţiilor date (1), adică de coordonatele punctelor comune celor două curbe. Prin urmare (2) reprezintă ansamblul dreptelor unind originea cu punctele comune ale celor două curbe (1). Nu ne mai rămâne decât să intersectăm aceste drepte cu una din curbe, pentru a găsi toate soluţiunile sistemului dat.

M. MĂNESCU.

BIBLIOGRAFIE

MAIOR I. LINTEŞ. *Discuţiuni asupra stabilităţii unui material de artilerie.* (Extras din *Revista Artileriei*). Timişoara 1935.

MAIOR I. LINTEŞ. *Eforturile suportate de un avion pe timpul resursei.* (Extras din *Revista Aeronautică*).

Numerus. Vol. I. Caietul 4. Octomvrie 1935. Bucureşti.

N. ABRAMESCU. *Mecanica*, pentru clasa VIII-a ştiinţifică. Ediţia I-a. Bucureşti. Editura *«Cartea Românească»*.

Journal de Mathematiques Elementaires. Anul 60. Nr. 1. Ooctomvrie 1935.

Idem. No. 2. Paris 1935.

R. ESTEVE & MITAULT. *Cours de Géométrie.* Tome II. Géométrie dans l'espace. (Classe de première). Paris 1936.

Autorii aceştia sunt cunoscuţi cititorilor *Gazetei Matematice* prin alte cărţi de care s'a vorbit în această revistă. In acelaşi spirit este făcută şi această nouă geometrie.

Capitolele tratate sunt: Cap. I. Dreapta, planul şi paralelismul. Cap. II. Transformări lineare ale spaţiului: translaţie, proiecţiuni, simetrie, omotetie. Cap. III. Poliedre, cilindri, conuri. Cap. IV. Volume. Cap. V. Dreapta şi plan. Perpendicularitate. Cap. VI. Proiecţiuni ortogonale. Cap. VII. Cilindru, conul, sfera. Cap. VIII. Triedre şi unghiuri poliedre. Cap. IX. Suprafeţe şi volume. Cap. X. Geometria vectorială.

La fine este o colecţiune de 202 probleme de geometrie şi o notă asupra figurilor egale.

I. I.

GH. TH. GHEORGHIU. Sur les fonctions métasphérique. Thèse présenté à la Faculté des Sciences de Bucureşti, pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques. Timişoara 1935.

CERERI

251. Ce se ştie despre viaţa lui CAROL VALŞTAIN, de care se vorbeşte în articolul din Nr. acesta:

«Nomenclatura geometrică?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii.

EL. ANGELESCU & J. M. RIUREANU. Elemente de geometrie de A. M. LEGENDRE cu adaose şi modificări de M. A. BLANCHET. Ediţia IV-a. Bucureşti 1874.

Donată de D-l Inginer PASCAL ZLATCU.

DIMITRIE PETRESCU. Două texte cu cursul de Geodezie şi Astronomie predate în anul 1871 la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, ale studentului GHEORGHE ZAMFIRESCU.

Donate de D-l Inginer PASCAL ZLATCU.

HERMANN TONTSCH. Die Honteruspresse in 400 Jahren. Braşov 1933.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

G. BIGOURDAN. L'astronomie. Paris 1917.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

* * *

Cărţile ce urmează au fost donate de *Institutul Naţional Român pentru Studiul amenajării şi folosirei isvoarelor de energie. (I. N. R.)*, prin D-l C. BUŞILĂ.

1. F. ENSTRÖM. Les recherches scientifiques dans l'industrie moderne. Bucureşti 1934.

2. L. FOURNARAKI. Asupra locomotivei cu acumulatori electrici destinate manevrelor pe Căile F. R. Bucureşti 1933.

3. I. GANITCHI. Inobilarea ligniţilor. Bucureşti 1932.

4. I. GANITCHI. Combustibilul la Căile Ferate Române. Bucureşti 1933.

5. I. GANITCHI. Clasificarea şi arderea combustibililor. Bucureşti 1934.

6. ST. GEORGESCU-GORJAN. Aplicaţiile electricităţii în industria carboniferă. Bucureşti 1933.

7. M. GEORGIAN. Alegerea felului de curent şi tensiune în industria metalurgică. Bucureşti 1931.

8. D. GERMANI. Sur la structure des formules et la synthèse des lois de similitude en physique. Bucureşti 1931.

9. C. GIGER. Studiu asupra unei metode grafice pentru predeterminarea consumaţii specifice a turbogeneratorilor cu aplicaţie la stabilirea criteriilor de comparaţie a diverselor tipuri de turbine. Bucureşti 1930.

10. C. GRECEANU. Progresele tecnice în folosinţa oţelurilor SIEMENS MARTIN. Bucureşti 1932.

11. A. M. HUG. Sur quelques électrifications récentes de chemin de fer et particularités intéressantes des locomotives électriques automotrices et lignes de contact. Bucureşti. 1930.

12. D. HURMUZESCU. Magnetism şi materie. Magneton şi electron. Bucureşti 1932.

13. BENEDICT IONESCU-SISEŞTI. Zăcămintele de cărbuni din România. Bucureşti 1934.

14. P. JANET. Quelques analogies électromagnétiques. Bucureşti 1934.

15. I. C. LĂZĂRESCU. Aspecte din producerea şi distribuţia energiei electrice în Europa. Bucureşti 1932.

16. I. C. LĂZĂRESCU. Consideraţiuni asupra posibilităţilor unei electrificări raţionale în România. Bucureşti 1932.

17. I. LUPAŞCU. Armonizarea folosirii raţionale a combustibililor româneşti. Bucureşti 1933.

18. EM. MANIŢIU & N. POPESCU. Centrala termoelectrică din Anina. Bucureşti 1931.

19. EM. MANIŢIU. Uleiuri pentru transformatori. Bucureşti 1932.

20. GR. MANOILESCU. Centrala termoelectrică Şoreçani. Bucureşti 1932.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2402. *Să se construiască sistemul de ecuaţii algebrice, care are ca soluţii:*

$$\begin{cases} x = \sin\dfrac{(k'+2)\pi}{8}\sin\dfrac{(2k-3)\pi}{12}\sec\dfrac{(4k+3k')\pi}{24} \\ y = \cos\dfrac{(4k-3k')\pi}{24}\sec\dfrac{(4k+3k')\pi}{24} \end{cases}$$

$(k = 1, 2, 3, 4, 5 \quad , \quad k' = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$

V. ALACI.

Sistemul dat se mai poate scrie:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sin\dfrac{(k'+2)\pi}{8}\sin\dfrac{(2k-3)\pi}{12}}{\cos\dfrac{(4k+3k')\pi}{24}} \\ \qquad = \dfrac{\cos\dfrac{(3k'-4k+12)\pi}{24} - \cos\dfrac{(3k'+4k)\pi}{24}}{2\cos\dfrac{(4k+3k')\pi}{24}} \\ y = \dfrac{\cos\dfrac{(4k-3k')\pi}{24}}{\cos\dfrac{(4k+3k')\pi}{24}}, \end{cases}$$

sau încă:

$$\begin{cases} 2x+1=\dfrac{\sin\dfrac{(4k-3k')\,\pi}{24}}{\cos\dfrac{(4k+3k')\,\pi}{24}}=\dfrac{\sin\dfrac{k\pi}{6}\cos\dfrac{k'\pi}{8}-\sin\dfrac{k'\pi}{8}\cos\dfrac{k\pi}{6}}{\cos\dfrac{k\pi}{6}\cos\dfrac{k'\pi}{8}-\sin\dfrac{k'\pi}{8}\sin\dfrac{k\pi}{6}} \\ y=\dfrac{\cos\dfrac{(4k-3k')\,\pi}{24}}{\cos\dfrac{(4k+3k')\,\pi}{24}}=\dfrac{\cos\dfrac{k\pi}{6}\cos\dfrac{k'\pi}{8}+\sin\dfrac{k'\pi}{8}\sin\dfrac{k\pi}{6}}{\cos\dfrac{k\pi}{6}\cos\dfrac{k'\pi}{8}-\sin\dfrac{k'\pi}{8}\sin\dfrac{k\pi}{6}} \end{cases}.$$

Acest sistem se mai poate scrie:

$$\begin{cases} 2x+1=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}-\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}} \\ y=\dfrac{1+\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}}, \end{cases}$$

sau încă:

$$\begin{cases} 2x+1=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}-\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}} \\ \dfrac{y-1}{y+1}=\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}. \end{cases}$$

De aci deducem cu uşurinţă:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}-\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}=\dfrac{2\,(2x+1)}{y+1} \\ \operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}=\dfrac{y-1}{y+1}. \end{cases}$$

Având suma şi produsul câtimilor

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{6}\ ,\ \left(-\operatorname{tg}\frac{k'\pi}{8}\right),$$

aceste câtimi sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$u^2-\frac{2(2x+1)}{1+y}u+\frac{1-y}{1+y}=0,$$

sau:

$$(1+y)u^2-2(2x+1)u+(1-y)=0.$$

De aci deducem:

$$u=\frac{2x+1\pm\sqrt{4x^2+4x+y^2}}{1+y},$$

deci rezultă:

$$(1)\quad\begin{cases}\operatorname{tg}\dfrac{k\pi}{6}=\dfrac{2x+1\pm\sqrt{4x^2+4x+y^2}}{1+y}\\[2ex]\operatorname{tg}\dfrac{k'\pi}{8}=-\dfrac{2x+1\mp\sqrt{4x^2+4x+y^2}}{1+y}.\end{cases}$$

De altă parte în *„Gazeta Matematică“*, Vol. XVII, pag. 402, este stabilit că ecuaţia algebrică, care are rădăcini de forma:

$$X=\operatorname{tg}\frac{k\pi}{m}\quad,\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1),$$

este:

$$(1+iX)^m-(1-iX)^m=0.$$

Luând aci pe rând $m=6$, $m=8$ şi înlocuind pe X pe rând cu membrii al 2-lea din (1), obţinem aducând la forma întreagă:

$$\begin{cases}[1+y+i(2x+1\pm\sqrt{4x^2+4x+y^2})]^6\\\qquad-[1+y-i(2x+1\pm\sqrt{4x^2+4x+y^2})]^6=0\\[2ex][1+y-i(2x+1\mp\sqrt{4x^2+4x+y^2})]^8\\\qquad-[1+y+i(2x+1\mp\sqrt{4x^2+4x+y^2})]^8=0.\end{cases}$$

Acesta este sistemul de ecuaţii algebrice echivalent cu sistemul transcendent (1), deci este sistemul cerut.

Soluţie analoagă dată de D-l VIRGIL COŞNIŢĂ (lic. Bârlad).

V. A.

PROBLEMA 3900. *Dintr'un punct al cercului* O_1 *se descrie cercul* O_2. *Un cerc* P *cu centrul pe cercul* O_2 *şi trecând prin centrul cercului* O_1, *taie pe acesta în* A *şi* B.

Se cere înveliţoarea dreptei AB *când centrul cercului* P *descrie cercul* O_2.

ION S. ANTONIU.

Soluţie dată de D-l ADRIAN C. GHEORGHIU (Bucureşti).

Condiţiunea ca centrul cercului O_2 să se găsească pe cercul O_1 nu este necesară.

Să presupunem dar cercurile O_1 şi O_2 situate oricum în plan şi să unim O_1 cu P şi cu A. Dreapta AB fiind coarda comună cercurilor O_1 şi P va fi perpendiculară pe linia centrelor O_1P; fie I punctul de intersecţie.

Notând cu S proecţiunea lui P pe O_1A, obţinem triunghiurile dreptunghice O_1SP şi O_1IA asemenea ca având unghiul din O_1 comun. Din asemănarea lor rezultă:

$$\frac{O_1S}{O_1I} = \frac{O_1P}{O_1A}$$

$$O_1P \cdot O_1I = O_1S \cdot O_1A;$$

cum S este mijlocul coardei O_1A, în cercul de centru P avem, însemnând cu r_1 raza cercului O_1,

$$O_1I \cdot O_1P = \frac{r^2}{2} \cdot \qquad (1)$$

Relaţiunea (1) ne arată că punctele I şi P, sunt invers în raport cu polul O_1, raportul de inversiune fiind $\frac{r_1^2}{2}$.

Rezultă de aici că, dacă punctul P descrie cercul O_2 şi acesta nu trece prin polul O_1, punctul I va descrie şi el tot un cerc pe care să-l notăm cu O_3.

Punând în evidenţă acest cerc, înfăşurătoarea dreptei AB apare uşor din următoarea teoremă datorită lui MACLAURIN:

Infăşurătoarea laturii unui unghiu drept, al cărui vârf descrie un cerc în timp ce a doua latură trece necontenit printr'un punct fix, este o elipsă având ca axă mare diametrul cercului şi punctul fix drept focar — acesta în cazul când punctul fix este în interiorul cercului — şi o hiperbolă având punctul fix ca unul din focare, iar diametrul care trece prin punctul fix drept axă transversală — în cazul când punctul fix este exterior cercului. *(Poncelet,* Traité des propriétés projectives des figures. Tome I. p. 447).

Aşa dar, dreapta AB fiind o latură a unghiului drept O_1IA, al cărui vârf I se găseşte pe cercurile O_3 şi a cărui a doua latură trece necontenit prin punctul O_1, în virtutea teoremei precedente, înfăşoară *o elipsă* sau o *hiperbolă* după cum punctul O_1 este interior sau exterior cercului O_3.

Toate acestea au fost valabile în ipoteza că cercul descris de punctul P nu trece prin polul O_1.

Dacă cercul O_2 trece prin punctul O_1, atunci inversul punctului P va descrie o dreaptă, după cum se ştie. In acest caz însă, înfăşurătoarea dreptei AB va fi o *parabolă*, în virtutea teoremei:

Dacă o latură a unui unghiu drept trece necontenit printr'un punct fix în timp ce vârful unghiului descrie o dreaptă, înfăşurătoarea celeilate laturi a unghiului este o parabolă având punctul fix drept focar, iar dreapta pe care alunecă vârful unghiului drept tangentă la vârf (F.G.M. Exercices de géométrie, No. 126 p. 55, ediţia 7).

Observaţiuni. 1°. Soluţia primită dela D-l ADRIAN GHEORGHIU, deşi constitue în majoritatea ei redijarea problemei, păcătueşte prin faptul că D-sa a considerat drept axă mare a înfăşurătoarei elipsă tocmai diametrul O_1O_3 al cercului O_3, neobservând că cercul O_3 nu trece prin punctul O_1 şi că acest punct este focar.

Apoi, pentru înfăşurătoarea parabolă D-sa a considerat dreapta pe care se plimbă punctul I drept directoare în loc de tangentă la vârf.

2°. D-sa a dat în schimb o frumoasă soluţie şi prin teoria polarelor, observând că dreapta AB este polara simetricului punctului O_1 faţă de punctul P în raport cu cercul O_1. Acest punct descriind un cerc omotetic cu cercul descris de punctul P, polara lui va descrie o conică, D-sa studiază natura şi poziţia ei.

3°. In cazul când cercurile O_1 şi O_2 sunt concentrice, D-l ADRIAN GHEORGHIU observă că înfăşurătoarea este un cerc.

4°. Când înfăşurătoarea este o elipsă ea este bitangentă cercului O_3 care mai este numit şi cercul lui PONCELET (F. G. M. loc. cit. pag. 1072).

5°. Poziția cercului O_3 se poate stabili foarte ușor, observând că centrul său se găsește pe dreapta O_1O_2 și folosind relația (1), se găsește

$$\overline{O_1O_3} = \frac{r_1^2\, d}{2(d^2 - r_2^2)} \tag{2}$$

$$r_3 = \frac{r_1^2\, r_2}{2(d^2 - r_2^2)} \tag{3}$$

unde d reprezintă distanța O_1O_2 și 2 raza cercului O_2.

6°. Cu ajutorul relațiilor precedente se deduce că poziția cercului O_3 față de punctul O_1 este aceeași cu a cercului O_2 față de același punct. Astfel când punctul O_1 este în exteriorul cercului O_2 ($d\ r_2$), înfășurătoarea este o hiperbolă, iar când punctul O_1 este în interiorul cercului O_2 ($d\ r_2$), înfășurătoarea este o elipsă.

7°. Când cercul O_2 trece prin punctul O_1, cercul O_3 devine o dreaptă perpendiculară pe O_1O_2 care taie această dreaptă într'un punct O situat la distanța $\frac{r_1^2}{4r_2}$ de punctul O_1 $\left[\operatorname{Lim}_{d \to r_2} (O_1O_3 - r_3) = \frac{r^2}{4r_2}\right]$.

Această dreaptă este tangenta la vârf în punctul O la parabola înfășurătoare a dreptei AB.

8°. O foarte bună soluție prin geometria analitică s'a primit dela D-l MIHAIL VELEA (Cluj).

9°. Au dat soluții analitice și D-nii: ALEXE ARSAVSKI, CEZAR COȘNIȚĂ (Bârlad), PETRE I. GHIȘOIU, N. N. MIHĂILEANU, NEGREA A. MIRCEA-LEONTE și CORNELIU N. POPESCU.

10°. O soluție analitică incompletă s'a primit dela D-l ION N. CRAIU (Pitești).

11°. In cazul particular al parabolei, problema oferă o aplicație practică: *Construcția prin tangente a parabolei.*

Din rezolvirea analitică a problemei se deduce că, distanța focală a parabolei este dată de relația

$$C = \frac{1}{4} R$$

R fiind raza cercurilor O_1 și O_2.

Să considerăm ecuația redusă a parabolei.

$$Y^2 = 2px$$

cum

$$C = \frac{p}{2} = \frac{1}{4} R$$

$$\therefore \quad R = 2p$$

Construcția grafică este următoarea:

Se ia pe axa parabolei, dela vârf, distanţa $\frac{R}{4}$, determinându-se centrul cercului O_1, pe care îl desecrim cu raza R. Din punctul O_2 de intersecţie a cercului O_1 cu axa x-ior (axa parabolei) ca centru, ales aşa fel ca vârful parabolei să fie între aceste centre, se descrie un al doilea cerc cu raza R. Dreapta AB care uneşte punctele de intersecţie ale cercului P, cu centrul pe cercul O_2 şi trecând prin punctul O_1, este tangentă la parabolă. Tangenta la vârf se obţine luând intersecţia cercului O_1 cu cercul P având centrul în punctul unde cercul O_2 taie a doua oară axa x-lor.

12°. Redijarea problemei precum şi observaţiunile Nr. 1—7 aparţin D-lui AL. AL. ROŞU.

I. S. A.

PROBLEMA 4271. *Când diferenţa bipatratelor a două numere se divide cu diferenţa cuburilor acelor numere?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l M. MĂNESCU. (Bucureşti).

Fie a şi b două numere întregi având cel mai mare comun divizor pe d. Punem $a = d\alpha$ şi $b = d\beta$, numerele α şi β fiind prime între ele. Fie n câtul întreg al împărţirii lui $(a^4 - b^4)$ prin $(a^3 - b^3)$. Vom avea dar:

$$n = (a^4 - b^4) / (a^3 - b^3) = d(\alpha^4 - \beta^4)/(\alpha^3 - \beta^3)$$

$$= d(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2),$$

$$\therefore \quad n = d\alpha + [d\beta^3 / (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)].$$

Se vede că n este întreg numai dacă $d\beta^3$ se divide cu $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^3)$. Ultimii doi termeni ai acestei paranteze sunt multipli ai lui β, dar primul e prim cu β. Deci trebuie ca d să se dividă cu $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, adică k fiind întreg să avem:

$$d = k(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2).$$

Inlocuind găsim:

$$a = k\alpha(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \quad \beta = k\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2), \quad n = k(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2).$$

Aci k e un întreg oarecare, iar α şi β două numere prime între ele.

Notă. S'au primit şi alte soluţii dar toate eronate. Unii au găsit că trebue să avem $a = b$, sau $b = 0$, etc. Cu formulele de mai sus se pot găsi o infinitate de soluţii. Astfel $d = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ dă $14^4 - 7^4 = 15\ (14^3 - 7^3)$.

I. I.

PROBLEMA 4318. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = x^2 + yx + y^2 \\ x^5 - y^5 = 211. \end{cases}$$

CONST. A. CRISTOPOL.

Soluţie dată de D-nii: PANAIT C. MAZILU, MIRCEA LEONTE A. NEGREA şi VLADIMIR S. SÂRBU.

Prima ecuaţiune a sistemului se descompune în următoarele două ecuaţii:

$$x - y - 1 = 0 \qquad (1) \quad \text{şi} \quad x^2 + xy + y^2 = 0 \qquad (2)$$

care, combinate cu a doua ecuaţie a sistemului propus, conduc la următoarele două sisteme de ecuaţiuni ce trebuesc rezolvate:

$$\text{(I)} \begin{cases} x - y = 1 & (3) \\ x^5 - y^5 = 211 & (4) \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 0 & (5) \\ x^5 - y^5 = 211. & (6) \end{cases}$$

Rezolvirea primului sistem de ecuaţii. Impărţind a doua ecuaţie prin prima, obţinem:

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = 211. \qquad (7)$$

Din (3) avem:

$$\begin{aligned} & x = y + 1 \\ \therefore\ & x^2 = y^2 + 2y + 1 \\ \therefore\ & x^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ \therefore\ & x^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1. \end{aligned}$$

Inlocuind aceste valori ale lui x în (7) şi făcând toate calculele şi reducerile posibile, obţinem ecuaţia în y:

$$y^4 + 2y^3 + 2y^2 + y - 42 = 0,$$

care se descompune uşor în:

$$(y-2)(y+3)(y^2+y+7) = 0,$$

de unde rădăcinile:

$$y_1 = 2 \quad ; \quad y_2 = -3 \quad ; \quad y_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{27}}{2}. \tag{8}$$

Ţinând seamă de ecuaţia (3) obţinem pentru x următoarele valori:

$$x_1 = 3 \quad ; \quad x_2 = -2 \quad ; \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{27}}{2}. \tag{9}$$

Observaţie. Am obţinut numai patru perechi de rădăcini, deoarece sistemul (I) este numai aparent de gr. 5, după cum se poate vedea din calculele făcute.

Rezolvirea celui de al doilea sistem de ecuaţii. Rezolvind ecuaţia (5) în raport cu x obţinem:

$$x' = y\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha y \tag{10}$$

$$x' = x\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha^2 y \tag{11}$$

α şi α^2 fiind celelalte două rădăcini cubice ale unităţii.

Să luăm prima rădăcină (10) şi să o substituim în (6). Observând că

$$\alpha^5 = \alpha^2$$

vom avea: $$\alpha^2 y'^5 - y'^5 = 211$$

$$\therefore \quad y'^5 = \frac{211}{\alpha^2 - 1} = \frac{211}{6}(-3 + i\sqrt{3}) = \frac{211\sqrt{3}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{211\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(2k\pi + \frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

$$= \frac{211\sqrt{3}}{3}\left[\cos\left(2k + \frac{5}{6}\right)\pi + i\sin\left(2k + \frac{5}{6}\right)\pi\right]$$

$$\therefore \; y' = \sqrt[5]{\frac{211\sqrt{3}}{3}}\left[\cos\left(\frac{2k}{5} + \frac{1}{6}\right)\pi + i\sin\left(\frac{2k}{5} + \frac{1}{6}\right)\pi\right]_{k=0,\,1,\,2,\,3,\,4}. \tag{12}$$

Din (10) deducem valorile corespunzătoare ale lui x:

$$x' = \alpha y' = \sqrt[5]{\frac{211\sqrt{3}}{3}}\left[\cos\left(\frac{2k}{5}+\frac{1}{6}\right)\pi + i\sin\left(\frac{2k}{5}+\frac{1}{6}\right)\pi\right]\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt[5]{\frac{211\sqrt{3}}{3}}\left[\cos\left(\frac{2k}{5}+\frac{5}{6}\right)\pi + i\sin\left(\frac{2k}{5}+\frac{5}{6}\right)\pi\right]_{k=0,\,1,\,2,\,3,\,4} \qquad (13)$$

căci:

$$\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\ .$$

Dacă luăm acum a doua rădăcină (11), prin calcule analoage obținem:

$$y'' = \sqrt[5]{\frac{211\sqrt{3}}{3}}\left[\cos\left(\frac{2k}{5}+\frac{7}{30}\right)\pi + i\sin\left(\frac{2k}{5}+\frac{7}{30}\right)\pi\right]_{k=0,\,1,\,2,\,3,\,4} \qquad (14)$$

și

$$x'' = \alpha^2 y'' = \sqrt[5]{\frac{211\sqrt{3}}{3}}\left[\cos\left(\frac{2k}{5}+\frac{47}{30}\right)\pi + i\sin\left(\frac{2k}{5}+\frac{47}{30}\right)\pi\right]_{k=0,\,1,\,2,\,3,\,4} \qquad (15)$$

căci:

$$\alpha^2 = \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\ .$$

In consecință, sistemul propus are 14 grupuri rădăcini, date de relațiile (8), (9), (12), (13), (14) și (15).

Observațiuni. 1. Sistemele de rădăcini (12), (13), (14) și (15) sunt fiecare, două câte două, imaginar conjugate.

In adevăr, rădăcinile (14) și (15) se pot scrie:

$$y'' = \sqrt[5]{\frac{211\sqrt{3}}{3}}\left[\cos\left(\frac{2k}{5}+\frac{1}{6}\right)\pi - i\sin\left(\frac{2k}{5}+\frac{1}{6}\right)\pi\right] \qquad (16)$$

$$x'' = \sqrt[5]{\frac{211\sqrt{3}}{3}}\left[\cos\left(\frac{2k}{5}+\frac{5}{6}\right)\pi - i\sin\left(\frac{2k}{5}+\frac{5}{6}\right)\pi\right]_{k=0,\,1,\,2,\,3,\,4} \qquad (17)$$

2. O soluţie analoagă celei de mai sus, s'a primit şi dela D-l TUDOR STOICESCU. D-sa însă nu pune rezultatele sub forma trigonometrică, aşa că nu scoate în evidenţă cele 10 rădăcini ale sistemului al doilea de ecuaţii.

3. Deasemenea au dat soluţii incomplete D-nii: Sublocot. AUREL EM. BĂDESCU (Fontainbleau), VASILE CEAUŞESCU, MIRCEA SC. NICHIFOR şi MARIN I. PREDOESCU.

4. La această problemă destul de simplă, s'au primit 85 de soluţii. Dintre cele 77 de soluţii care au luat drumul coşului, menţionăm 32 soluţii *identice* ale elevilor liceului Militar dela Iaşi, 13 soluţii *identice* ale liceului Militar dela Tg.-Mureş, 8 soluţii *identice* ale elevilor liceului Mihail Eminescu din Bucureşti şi 5 soluţii *identice* ale elevilor dela liceul Militar Chişinău. Numele tuturor acestor rezolvitori (!) au fost publicate pe copertele *Gazetei*.

I. S. A.

PROBLEMA 4367. *Să se rezolve sistemul:*

$$x^4 + 4y^4 = a,$$

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = b.$$

EM. MEREUŢĂ.

Soluţie. Distingem două cazuri: 1°. $b \neq 0$. Ecuaţia a doua a sistemului scrisă sub forma

$$x^2 + 2y^2 = b - 2xy,$$

şi ridicată la pătrat ne dă

$$x^4 + 4y^4 = b^2 - 4bxy,$$

care în baza celei dintâi se scrie

$$a = b^2 - 4bxy,$$

şi care ne dă

$$xy = \frac{b^2 - a}{4b}.$$

Introducând această valoare în a doua ecuaţie găsim

$$x^2 + 2y^2 = \frac{b^2 + a}{2b}.$$

Sistemul dat este deci echivalent cu sistemul

$$x^2+(\sqrt{2}y)^2=\frac{b^2+a}{2b}\quad,\quad 2\sqrt{2}xy=\frac{b^2-a}{\sqrt{2}b}\,.$$

Având şi scăzând ecuaţia a doua la prima ne dă

$$(x+\sqrt{2}y)^2=\frac{b^2+a}{2b}+\frac{b^2-a}{\sqrt{2}b},$$

$$(x-\sqrt{2}y)^2=\frac{b^2+a}{2b}-\frac{b^2-a}{\sqrt{2}b};$$

de unde

$$x+\sqrt{2}y=\pm\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})\,b^2+(1-\sqrt{2})\,a}{2b}},$$

$$x-\sqrt{2}y=\pm\sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})\,b^2+(1+\sqrt{2})\,a}{2a}},$$

care ne dă imediat

$$x=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})\,b^2+(1-\sqrt{2})\,a}{2b}}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})b^2+(1+\sqrt{2})\,a}{2b}},$$

$$y=\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})\,b^2+(1-\sqrt{2})\,a}{b}}\mp\tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})b^2+(1+\sqrt{2})\,a}{b}},$$

unde semnele dela x se corespund cu semnele dela y. Avem deci patru perechi de valori care verifică toate sistemul dat. *Problema admite deci patru soluţii.*

2^0. $b=0$. In acest caz trebue să avem şi $a=0$. Intr'adevăr cum

$$x^4+4y^4=(x^2+2xy+2y^2)\,(x^2-2xy+2y^2)$$

rezultă

$$a=b\,(x^2-2xy+2y^2)$$

care ne spune că dacă: $b=0$ trebue să avem şi $a=0$. Sistemul dat se reduce în acest caz la ecuaţia

$$x^2+2xy+2y^2=0.$$

Lăsând deoparte soluția banală: $x=0$, $y=0$ ecuația se mai scrie

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)+2=0,$$

de unde scoatem că soluțiile sistemului sunt date de formula

$$x=(-1\pm i)y,$$

care conține și soluția eliminată mai sus.

Observațiuni. 1°. Au rezolvat foarte bine problema numai în primul caz, D-nii: NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila), PANAIT C. MAZILU (București), DIM. MAVRODIN (clasa VII liceul M. Eminescu, București) și I. I. BUZINCU (liceul militar, Iași).

2°. D-nii: D. V. BĂDULESCU, V. I. COANDĂ, C. COTESCU, H. FLORESCU, V. GRIGORESCU, M. MÂNAC, O. I. MIHALCEA, C. NEGOIȚĂ, I. I. PETRESCU, I. GH. ȘABAC și I. N. SAGER au rezolvat bine problema găsind însă soluțiile sub o formă mai complicată.

3°. D-l C. NEGOIȚĂ precum și încă un corespondent al cărui nume n'a fost citat pentrucă n'a dus soluția problemei nici în cazul 1° până la capăt, a încercat să discute problema dar n'a reușit deoarece soluțiile D-lui nu erau puse sub forma simplă de mai sus. Sub această formă discuția este imediată. Se găsește că dacă: $b>0$ și

$$(3-2\sqrt{2})\,b^2\leqslant a\leqslant(3+2\sqrt{2})\,b^2,$$

atunci soluțiile problemei sunt reale; dacă $b<0$ soluțiile problemei sunt imaginare. In cazul $b=0$ se vede că sau x sau y sau amândouă trebuesc să fie imaginare (afară de soluția banală: $x=y=0$).

4°. Pe lângă soluțiile citate mai sus s'au mai primit câteva conținând greșeli de calcul, două identice și una foarte bună dar neiscălită.

5°. D-l V. GRIGORESCU a generalizat sistemul propus.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4430. *Să se calculeze limita expresiei:*

$$E=\sqrt[3]{6^4+7\sqrt[3]{6^{10}+7\sqrt[3]{6^{28}+7\sqrt[3]{6^{82}+\ldots+7\sqrt[3]{6^{3^n+1}}}}}}$$

când $n=\infty$.

N. BOTEA.

Soluţie. Expresia se mai poate scrie:

$$E = 6\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6+\ldots+7\sqrt[3]{6}}}}\,.$$

La radicali nu considerăm decât valoarea reală aritmetică. Să considerăm şirul de numere pozitive:

$$u_1 = 6\sqrt[3]{6}$$

$$u_2 = 6\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6}}$$

$$u_3 = 6\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6}}}$$

. . . . . .

$$u_n = 6\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6+\ldots+7\sqrt[3]{6}}} \qquad (n \text{ radicali}).$$

Acest şir este evident crescător.

Doi termeni consecutivi sunt legaţi prin relaţia:

$$(1) \qquad u_n^3 - 252\,u_{n-1} - 1296 = 0$$

şi cum

$$u_n > u_{n-1}\,,$$

vom avea:

$$(2) \qquad u_n^3 - 252\,u_n - 1296 < 0.$$

Ecuaţia:

$$(3) \qquad x^3 - 252\,x - 1296 = 0$$

admite rădăcinile

$$-6\,,\ -12\,,\ 18.$$

Rezultă că pentru:

$$0 < x < 18$$

avem:

$$x^3 - 252\,x - 1296 < 0$$

iar pentru

$$x > 18:$$

$$x^3 - 252\,x - 1296 > 0.$$

Deducem din (2) că oricare ar fi u_n avem :

$$u_n < 18.$$

Termenii şirului :

$$u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots$$

cresc deci cu n, dar rămân întotdeauna mai mici ca numărul fix 18. Şirul admite astfel o limită l, mai mică sau egală cu 18, pe care voim să o aflăm.

Vom avea :

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} u_{n-1} = l$$

şi din relaţia (1) deducem :

$$l^3 - 252\, l - 1296 = 0.$$

Deci $l = 18$.

Observaţii. 1°. Soluţii mai puţin riguroase s'au primit dela D-ra BIBY UNTER (Piatra-N.) şi D-nii : PANAIT MAZILU (elev ing. Buc.), TUDOR STOICESCU, V. CEAUŞESCU (Lic. mil. Tg.-Mureş), ION BOGDAN, V. BOGZA, V. BUCUR, I. BUZINCU, P. COJOCARU, C. COTESCU, C. I. DIMITRIU, I. DUMITRIU, R. DRAGOMIR, V. ENĂŞESCU, C. GAVRILESCU, V. IONESCU, D. MIHALCEA GH. VASILACHE (toţi dela liceul militar din Iaşi) şi P. DOBRESCU.

N. B.

PROBLEMA 4440. *Care este cel mai mic cub care se termină cu 659659?*

V. THÉBAULT.

Să căutăm în general *care este cubul care se termină cu cifrele* $a_n , a_{n-1} , \ldots a_2 , a_1$.

Fie

$$N = A \times 10^n + B$$

$$N^3 = A^3 \times 10^{3n} + 3 \times A^2 . B \times 10^{2n} + 3 \times AB^2 \times 10^n + B^3 . \quad (1)$$

Se vede că N^3 se termină cu ultimele n cifre ale lui B^3 şi că dacă cifra de ordin $n+1$ dela dreapta la stânga lui B^3 este a_{p+1},

atunci cifra a_{n+1} dela dreapta lui N^3 va fi tot una cu cifra unităților sumei

$$3 \times AB^2 + a_{p+1} \qquad (2)$$

pentrucă primele 2 părți ale lui N^3 din (1) terminându-se cu mai mult de $n+1$ zerori nu influențează pe a_{n+1}. In particular dacă B^2 se termină cu 1, cum este cazul problemei 4440, atunci A_{n+1} este dat de unimile lui

$$3A + a_{p+1}. \qquad (3)$$

Dacă deci se cunoaște B și n, atunci ultima cifră a lui A, pentru care cifra de ordin $n+1$ din dreapta lui N^3 este a_{n+1}, va fi dată de unimile numărului (2) în general sau de unimile numărului (3) atunci când B^2 se termină cu 1.

In cazul particular al problemei 4440 avem

$$N = 10A + 9$$

$$N^3 = \ldots + 2430 \times A + 729.$$

Pentru ca N^3 să se termine cu 59 trebue ca

$$3 . A + 2$$

să se termine cu 5, adică 3A să se termine cu 3 deci A să se termine cu 1. Vom avea deci

$$N = 100 \times A' + 19$$

$$N^3 = \ldots + 3 \times 19^2 \times 100 \times A' + 19^3 = \ldots + 3 \times 19^2 \times 100 \times A' + 6859$$

N^3 se va termina cu 659 când

$$3 \times A' + 9$$

se va termina cu 6 de unde $A' = 10\,A'' + 6$.

Vom avea deci

$$N = 1000\,A'' + 619$$

$$N^3 = \ldots + 3 \times 619 \times A'' \times 1000 + 237176659.$$

Ca N^3 să se termine cu 9659 trebue ca

$$3 \times A'' + 6$$

să se termine cu 9, deci $A'' = A''' + 1$ şi atunci

$$N = 10000\,A''' + 1619$$

$$\therefore \quad N^3 = \ldots + 3 \times 1619 \times A''' \times 1000 + 1619^3.$$

Dar

$$1619^3 = 4243659659$$

deci acesta este numărul cerut în problema 4440.

Continuând raţionamentul din aproape în aproape se găseşte că forma generală a numerelor ale căror cuburi se termină în 659659 este

$$N = 100000\,m + 1619.$$

G-RAL GH. B.

Notă. 1°. D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU (Lic. Fraţii Buzeşti, Craiova) a găsit soluţia exactă a problemei 4440 în felul următor: Observă că 9^1 se termină cu 9, ridică apoi la cub toate numerele 09,19, ...,99 şi observă că numai 19^3 se termină cu 59... Ridică la cub numerele 019, 1119, ...,999 şi observă că numai 619 se termină cu 659, etc.

2°. Calea generală pe care am dat-o mai sus se poate întrebuinţa şi pentru rezolvarea problemei 4213 propusă la pag. 198, Vol. XXXVIII.

GH. B.

PROBLEMA 4456. *Se dă un trapez în care bisectoarele unghiurilor formate de laturile neparalele cu baza unică se întâlnesc într'un punct pe baza mare. Să se demonstreze că:*

1°. *Dublul ariei trapezului este egal cu semiperimetrul prin înălţime plus aria triunghiului format de cele două bisectoare şi baza mică.*

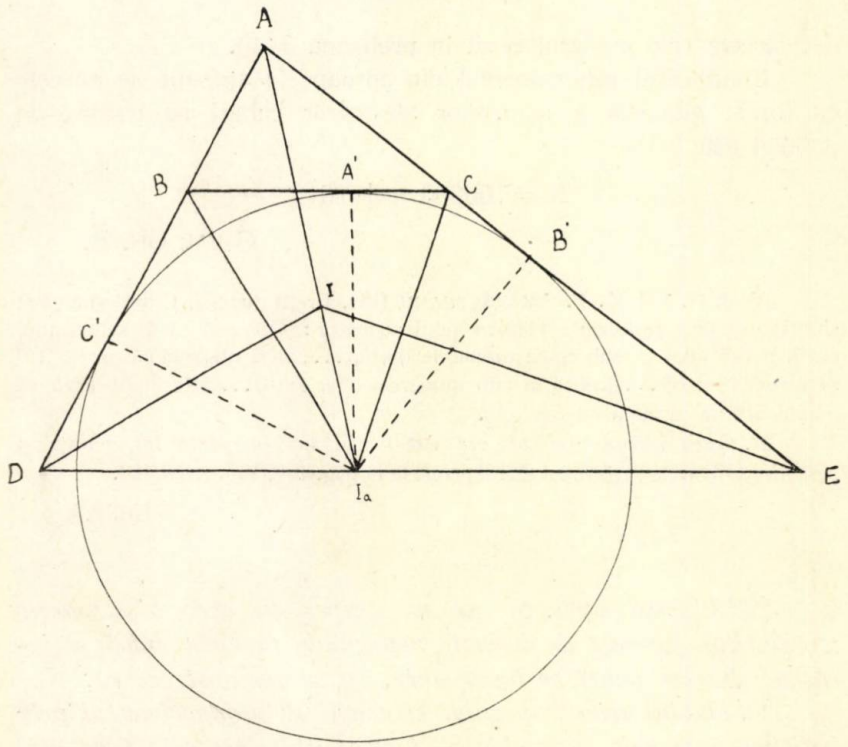
2°. *Punctul de întâlnire al mediatoarelor triunghiului considerat, punctul de întâlnire al laturilor neparalele şi punctul de întâlnire al bisectoarelor (situat pe baza mare) se găsesc pe aceeaşi dreaptă.*

PETRE MIRESCU.

1°. Fie ABC un triunghiu oarecare unde, prin punctul de concurență al bisectoarelor a două unghiuri exterioare, ducem paralela DE cu latura BC, adiacentă celor două unghiuri.

Se știe că dreapta astfel construită este egală cu suma segmentelor BD și CE.

In urma acestei construcții s'a format trapezul BCED, în care I_a reprezintă centrul cercului exînscris corespunzător laturii BC; deci perpendicularele I_a A', I_a B' și I_a C' vor fi egale ca raze, iar una din aceste drepte reprezintă înălțimea trapezului considerat.



In acest caz aria trapezului va fi:

$$A = \frac{(BC + DE)\, I}{2}$$

sau

$$A = \frac{(BC + BD + CE)\, I}{2}$$

relaţii pe care adunându-le, obţinem:

$$2A = \frac{BC \cdot I}{2} + \frac{I}{2}(BC + DE + BD + CE).$$

Q. E. D.

2°. In triunghiul ABC bisectoarea unghiului A trece prin I_a, punctul de concurenţă al bisectoarelor sale exterioare, iar pe de altă parte dreptele DI şi EI, bisectoare respectiv pentru unghiurile D şi E, sunt mediatoare faţă de triunghiul BI_aC şi bisectoarea în triunghiul ADE, al căror punct de concurenţă este I.

Q. E. D.

Au demonstrat bine problema: D-l ALEX. STOICA şi MARCEL GOLDENBERG (Liceul Marele Voevod Mihai, Bucureşti).

Au rezolvat problema, verificând prima parte a ei, D-nii: APOSTOL RADU (L. M. D.); VINTILĂ GRIGORESCU; IANCU N. SAGER, M. C. POSTELNICESCU (L. M. D.); S-LT AUREL BĂDESCU (Fontainbleau); M. MĂNAC (L. M. D.); VIRGIL METEA (L. M. Tg. Mureş); N. D. ŞTEFĂNESCU; GAVRILESCU N. C-TIN (Bacău); PETRESCU ION, MIRCEA A. NEGREA, licenţiat în matematici (Brăila).

O soluţie foarte clară a dat D-ra FILOFTEIA ANTONESCU.

Următorii elevi dela Liceul Militar, Iaşi:

ENĂŞESCU VICTOR, COJOCARU PETRE, IORDACHE ENACHE, ŞIARA VIRGIL, BOGDAN IOAN, DIMITRIU I. C. CĂLIN, AIOANEI V. ROMULUS, CORNĂŢEANU AUREL, JIPA ALEXANDRU, VASILACHE GHEORGHE, au rezolvat problema, verificând prima parte a ei, utilizând toţi aceiaşi metodă, într'o problemă care se preta la multe feluri de demonstraţii.

D-nii BUCUR VIRGIL (Ploeşti) şi COTESCU COSTEL (Bacău) au prezentat o soluţie identică celor dela Iaşi.

P. MIRESCU.

PROBLEMA 4459. *Să se calculeze valoarea determinantului:*

$$D \equiv \begin{vmatrix} -\sin a & \sin b & \cos b & \cos a \\ \cos a & -\cos b & \sin b & \sin a \\ \sin b & \sin a & -\cos a & \cos b \\ \cos b & \cos a & \sin a & -\sin b \end{vmatrix}.$$

TUDOR STOICESCU.

Soluţia I dată de D-ra CONSTANŢA CONSTANTIN (studentă Bucureşti) şi D-nii: CONST. CHIRIAC (Şc. Navală), MARCEL AMĂRĂŞTEANU (cl. VII Craiova), NICOLAE MILU (Lic. mil. Chişinău), EMANUEL BLAGA (Galaţi), IANCU N. SAGER, MARCEL ED. GOLDENBERG (cl. VII Brăila), BACÂREA ALEXANDRU, DECEANU GHEORGHE, STĂNESCU GHEORGHE, ŢARĂLUNGĂ DIMITRIE (Lic. mil. Tg.-Mureş), IOAN GR. BOGDAN, VASILE BOGZA, IOAN BUZINCU, COSTEL COTESCU, CĂLIN I. C. DIMITRIU, ENACHE IORDACHE, DUM. VICTOR ENĂŞESCU, C-TIN N. GAVRILESCU (elevi Lic. militar Iaşi), VIRGIL BUCUR (Ploeşti), DUMITRU ISAC, (Arcadânlar-Durostor), DUMITRU MIHALCEA (Iaşi), D-ra BIBY UNTER şi D-l PETRU COJOCARU (elevi din Piatra-Neamţ), GH. CARDARA (cl. VIII, lic. «Popescu», Corabia), MIRCEA GRUMĂZESCU (Şc. ofiţeri Artilerie), NEGREA A. MIRCEA LEONTE (Brăila), D. LEBĂDĂ şi P. MAZILU.

Desvoltând după elementele primei linii, vom avea succesiv:

$$D \equiv -\sin a \begin{vmatrix} -\cos b & \sin b & \sin a \\ \sin a & -\cos a & \cos b \\ \cos a & \sin a & -\sin b \end{vmatrix} - \sin b \begin{vmatrix} \cos a & \sin b & \sin a \\ \sin b & -\cos a & \cos b \\ \cos b & \sin a & -\sin b \end{vmatrix}$$

$$+ \cos b \begin{vmatrix} \cos a & -\cos b & \sin a \\ \sin b & \sin a & \cos b \\ \cos b & \cos a & -\sin b \end{vmatrix} - \cos a \begin{vmatrix} \cos a & -\cos b & \sin b \\ \sin b & \sin a & -\cos a \\ \cos b & \cos a & \sin a \end{vmatrix}$$

$\equiv -\sin a\,(-\sin b\cos a\cos b + \sin^3 a + \sin b\cos a\cos b + \sin a\cos^2 a + \sin a\cos^2 b + \sin a\sin^2 b) - \sin b\,(\sin b\cos^2 a + \sin^3 a\sin b + \sin b\cos^2 b + \sin a\cos a\cos b - \sin a\cos a\cos b + \sin^3 b) + \cos b\,(-\sin a\sin b\cos a + \sin a\sin b\cos a - \cos^3 b - \sin^2 a\cos b - \cos^2 a\cos b - \sin^2 b\cos b) - \cos a\,(\sin^2 a\cos a + \sin^2 b\cos a + \cos a\cos^2 b - \sin a\sin b\cos b + \cos^3 a + \sin a\sin b\cos b)$

$\equiv -\sin^2 a\ (\sin^2 a + \cos^2 a + \sin^2 b + \cos^2 b) - \sin^2 b\ (\cos^2 a + \sin a^2 + \sin^2 b + \cos^2 b) + \cos^2 b(-\cos^2 b - \sin^2 a - \cos^2 a - \sin^2 b) - \cos^2 a(\sin^2 a + \sin^2 b + \cos^2 a + \cos^2 b)$

$\equiv -2\ (\sin^2 a + \sin^2 b + \cos^2 a + \cos^2 b) = -4.$

Soluția II dată de D-nii: DIMITRIE RADA (cl. VII-a Lic. «Moise Nicoară» Arad), PAUL DOBRESCU, VINTILĂ GRIGORESCU, M. MÂNAC (elevi Lic. militar «N. Filipescu» Târgoviște).

La coloana ultimă înmulțită cu $\sin a$ adunăm pe prima înmulțită cu $\cos a$, din coloana a treia înmulțită cu $\sin b$ scădem pe a doua înmulțită cu $\cos b$, apoi la coloana a doua înmulțită cu $\sin a$ adunăm pe prima înmulțită cu $\sin b$. Obținem:

$$D \equiv \begin{vmatrix} -\sin a & 0 & 0 & 0 \\ \cos a & \sin(b-a) & 1 & 1 \\ \sin b & \sin^2 a + \sin^2 b & -\sin(a+b) & \sin(a+b) \\ \cos b & \sin a \cos a + \sin b \cos b & -\cos(a+b) & \cos(a+b) \end{vmatrix} \frac{1}{\sin^2 a \sin b}$$

$$\equiv \frac{-1}{\sin a \sin b} \begin{vmatrix} \sin(b-a) & 1 & 1 \\ \sin^2 a + \sin^2 b & -\sin(a+b) & \sin(a+b) \\ \sin a \cos a + \sin b \cos b & -\cos(a+b) & \cos(a+b) \end{vmatrix}$$

și adunând la ultima coloană elementele, celei de a doua vom avea.

$$D \equiv \frac{-1}{\sin a \sin b} \begin{vmatrix} \sin(b-a) & 1 & 2 \\ \sin^2 a + \sin^2 b & -\sin(a+b) & 0 \\ \sin a \cos a + \sin b \cos b & -\cos(a+b) & 0 \end{vmatrix}$$

$$D \equiv \frac{2}{\sin a \sin b} \begin{vmatrix} \sin^2 a + \sin^2 b & \sin(a+b) \\ \sin a \cos a + \sin b \cos b & \cos(a+b) \end{vmatrix}$$

$\equiv \frac{2}{\sin a \sin b}[(\sin^2 a + \sin^2 b)(\cos a \cos b - \sin a \sin b) - (\sin a \cos a + \sin b \cos b)(\sin a \cos b + \sin b \cos a)] \equiv \frac{2}{\sin a \sin b}[\sin^2 a \cos a \cos b + \sin^2 b \cos a \cos b - \sin^3 a \sin b - \sin a \sin^3 b - \sin^2 a \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos^2 a - \sin a \sin b \cos^2 b - \sin^2 b \cos a \cos b] \equiv 2[-\sin^2 a - \sin^2 b - \cos^2 a - \cos^2 b] \equiv -4.$

Soluția III dată de D-nii: VICTOR FLORESCU (cl. IV-a Liceul militar «N. Filipescu») și AL. D. STOICA (Liceul «Marele Voevod Mihai» București).

Ridicând determinantul la pătrat după regula cunoscută obținem:

$$D^2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

Deci $$D = \pm 4.$$

Vom determina semnul lui D dând valori particulare cantităților a și b. De exemplu $a = 0$, $b = 0$. Se găsește $D = -4$.

Soluția IV. Determinantul dat se poate scrie:

$$D \equiv \begin{vmatrix} -\sin a & \cos a & \sin b & \cos b \\ \cos a & \sin a & -\cos b & \sin b \\ \sin b & \cos b & \sin a & -\cos a \\ \cos b & -\sin b & \cos a & \sin a \end{vmatrix}.$$

Dacă se mai consideră determinantul:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} -\sin a & \cos a & 0 & 0 \\ \cos a & \sin a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin b & \cos b \\ 0 & 0 & \cos b & -\sin b \end{vmatrix} \equiv 1$$

și se face produsul:

$$D \times \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \cos(a+b) & \sin(a+b) & -\cos(a+b) & \sin(a+b) \\ -\sin(a+b) & \cos(a+b) & \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\cos(a+b) & \sin(a+b) \\ 0 & 0 & \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{vmatrix} = -4$$

se deduce $$D = -4.$$

Soluția V. Desvoltând minorii de ordinul 2 după regula lui LAPLACE, vom avea:

$$D = \begin{vmatrix} -\sin a & \sin b \\ \cos a & -\cos b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -\cos a & \cos b \\ \sin a & -\sin b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\sin a & \cos b \\ \cos a & \sin b \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin a & \cos b \\ \cos a & -\sin b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sin a & \cos a \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sin a & -\cos a \\ \cos a & \sin a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \sin b & \cos b \\ -\cos b & \sin b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sin b & \cos b \\ \cos b & -\sin b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sin b & \cos a \\ -\cos b & \sin a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sin b & -\cos a \\ \cos b & \sin a \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \cos b & \cos a \\ \sin b & \sin a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \sin b & \sin a \\ \cos b & \cos a \end{vmatrix} = \sin(a-b)\sin(b-a) - \cos^2(a-b)$$

$$-1-1-\cos^2(a-b)+\sin(a-b)\sin(b-a) = -4.$$

Soluția VI. Să calculăm derivata determinantului dat în raport cu parametrul a. Vom avea:

$$D'_a(a,b) = \begin{vmatrix} -\cos a & \sin b & \cos b & \cos a \\ -\sin a & -\cos b & \sin b & \sin a \\ 0 & \sin a & -\cos a & \cos b \\ 0 & \cos a & \sin a & -\sin b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sin a & 0 & \cos b & \cos a \\ \cos a & 0 & \sin b & \sin a \\ \sin b & \cos a & -\cos a & \cos b \\ \cos b & -\sin a & \sin a & -\sin b \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -\sin a & \sin b & 0 & \cos a \\ \cos a & -\cos b & 0 & \sin a \\ \sin b & \sin a & \sin a & \cos b \\ \cos b & \cos a & \cos a & -\sin b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sin a & \sin b & \cos b & -\sin a \\ \cos a & -\cos b & \sin b & \cos a \\ \sin b & \sin a & -\cos a & 0 \\ \cos b & \cos a & \sin a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\cos a & \sin b & \cos b & 0 \\ -\sin a & -\cos b & \sin b & 0 \\ 0 & \sin a & -\cos a & \cos b \\ 0 & \cos a & \sin a & -\sin b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\sin a & 0 & \cos b & \cos a \\ \cos a & 0 & \sin b & \sin a \\ \sin b & \cos a & 0 & \cos b \\ \cos b & -\sin a & 0 & -\sin b \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -\sin a & \sin b & 0 & \cos a \\ \cos a & -\cos b & 0 & \sin a \\ \sin b & 0 & \sin a & \cos b \\ \cos b & 0 & \cos a & -\sin b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \sin b & \cos b & -\sin a \\ 0 & -\cos b & \sin b & \cos a \\ \sin b & \sin a & -\cos a & 0 \\ \cos b & \cos a & \sin a & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

căci determinanții sunt doi câte doi egali și de semne contrare. Deci D este independent de a; D este de asemenea independent de b, căci:

$$D(a,b) = D(b,a)$$

și deci $D'_b(a,b) = 0$.

D este deci o constantă, care se găsește făcând $a = 0$, $b = 0$ în determinant. Se obține $D = -4$.

N. B.

EXERCIŢII

5. Să se stabilească egalitatea:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} a & \operatorname{cotg}^2 a & \operatorname{cotg}^3 a \\ 1 & \operatorname{cotg} a & \operatorname{cotg}^2 a \\ \operatorname{cotg}^2 a & \operatorname{tg} a & \operatorname{tg}^2 a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{cotg} a & \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{tg}^3 a \\ 1 & \operatorname{tg} a & \operatorname{tg}^2 a \\ \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg} a & \operatorname{cotg}^2 a \end{vmatrix}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

Se consideră funcţiunea

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^3} \\ 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & x & x^2 \end{vmatrix}.$$

Calculând,

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2.$$

Deci

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Şi punând $x = \operatorname{tg} a$, se obţine egalitatea.

PROBLEME PROPUSE

4591. La Şcoala Politechnică din Bucureşti se făcuse propunerea de a se reduce durata de predare a unei lecţiuni dela o oră la 50 de minute. Admiţând că profesorul pierde în mediu 5 minute la începutul unei lecţiuni şi 3 minute la urmă, să se calculeze:

1. Cu cât trebuie să-şi reducă cursul un profesor dacă iuţeala de predare rămâne aceeaşi?

2. Cu cât ar trebui sporită iuţeala de predare spre a preda tot cursul în acelaşi număr de lecţiuni pe tot anul?

3. Cu cât s'ar spori numărul lecţiunilor, dacă iuţeala de predare nu se schimbă, şi nici nu se face reducere de materie predată?

4. Admiţându-se reducerea cursului, menţinând iuţeala de predare, cu cât ar trebui lungite cursurile anuale pentru ca Şcoala să se termine în 4 ani în loc de 5?

I. IONESCU.

4592. Prin proiecţiile ortogonale ale vârfurilor A, B, C ale unui triunghiu pe linia centrelor cercurilor înscris şi circumscris triunghiului, se duc paralele la laturile BC , CA , AB. Aceste paralele determină un triunghiu $A_1 B_1 C_1$. Să se demonstreze că distanţa punctului lui FEUERBACH al triunghiului ABC la unul din vârfurile A_1, B_1, C_1 este egală cu suma distanţelor aceluiaşi punct la celelalte două vârfuri A_1, B_1, C_1.

V. THÉBAULT.

4593. Paralelogramul ABCD are vârfurile A, B fixe, iar vârful C mobil pe o dreaptă (C). Se cer locurile geometrice ale proecţiunilor vârfurilor C şi D pe laturile AD şi BC.

Să se examineze toate cazurile de figură care se pot prezenta în notarea vârfurilor paralelogramului, precum şi cazul particular când (C) se confundă cu locul lui D.

Să se rezolve aceleaşi chestiuni pentru cazul când (C) este o curbă oarecare.

G-L GH. BUICLIU.

4594. Fie B', C' picioarele înălţimilor vârfurilor B, C ale triunghiului ABC.

Cercul, trecând prin A şi prin simetricele punctelor B', C' faţă de mijloacele laturilor respective, tae latura BC în A', A".

Condiţiunea necesară şi suficientă, ca A', A" să fie reale, este:

$$a^2 - 4bc \cos A \geqq 0.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4595. Se consideră un triunghiu ABC, înscris în cercul de centru O şi fie două puncte M şi N în planul său.

Dacă există relaţiile:

$$(1+k)\overline{MA}^2 - k\overline{NA}^2 = (1+k)\overline{MB}^2 - k\overline{NB}^2 = (1+k)\overline{MC}^2 - k\overline{NC}^2$$

punctul M se găseşte pe dreapta ON şi împarte segmentul ON în raportul k.

N. BOTEA.

4596. Cunoscând muchiile unui tetraedru la care unul din vârfuri se proiectează în centrul feţei opuse, să se calculeze unghiurile lui diedre. Aplicaţiuni.

O. N. ŢINO.

4597. Se dă expresiunea :

$$E_1 = (\sqrt[x]{x^y})^y .$$

Inlocuindu-se x prin y şi y prin x se obţine o a doua expresiune E_2; ştiind că $x < y$, care dintre cele două expresiuni va fi mai mare ?

MAIOR I. LINTEŞ.

4598. Să se stabilească identitatea :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{(n+k-1)!}{(k!).(n-k)!}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n^2} .$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4599. Să se rezolve sistemul :

$$yz - zx - xy = 9e^2 - 2$$
$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = 81e^4 + 2$$
$$y^3z^3 - z^3x^3 - x^3y^3 = 729e^6 - 2.$$

I. ŞT. NICOLESCU.

4600. Să se determine, pentru $n = \infty$, limita expresiunei

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} - \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}} .$$

M. GHERMĂNESCU.

4601. Să se arate că numărul soluţiunilor întregi şi pozitive ale ecuaţiei indeterminate

$$x + 3y + 5z = n$$

este egal cu întregul cel mai apropiat de numărul $\frac{(n+3)(n+6)}{30}$.

TIBERIU POPOVICIU.

4602. Să se determine direcţia şi mărimea înclinaţiei unui turn de fabrică.

GH. VASILIU.

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. M. (4477, 512, 35, 36, 37, 39, 48, 53, 56, 65, 72, 84, 85); *Bogdan Gr. I.* (2446, 4413); *Boiangiu Gh.* (4413); *Bucur N. V.* (4375, 78, 88); *Bursan Al. C.* (4584); *Buzincu I. I.* (4375, 536); *Ceauşescu V.* (4388, 485, 536, 39, 41, 43, 49, 52, 53, 54, 84); *Cojocaru P. P.* (4536, 53); *Cornăţeanu A.* (4582); *Cseke W.* (4471, 75, 542, 51, 55): *Dobrescu P.* (4536); *Enache D. I.* (2446, 4378, 88); *Florescu L. V.* (4536, 49); *Gavrilescu N. C.* (4443, 506, 39, 72); *Grabovschi F. E.* (4536, 53, 72); *Ianculescu S. O.* (2446, 3290, 554); *Lebădă D.* (4378); *Marcovici Eug.* (4567, 72); *Mazilu C. P.* (4271, 436, 67, 85, 504, 06, 23, 25, 29, 35, 36, 38, 49); *Moisovici M. St.* (2446); *Neagu V. N.* (4542); *Negrea A. Mircea Leonte* (4118, 376, 472, 542, 54, 55); *Nicolescu I. St.* (4539); *Palade-Beiu Gh. E.* (4443); *Postelnicescu C. M.* (4525, 27, 52, 82); *Ştefănescu D. N.* (4536, 72); *Stoica D. Al.* (3915, 4388, 400, 523, 68, 82); *Tarasiuc S.* (2536); *Thébault V.* (4332, 91, P); *Tudorel G.* (4375, 485).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie. (520 pag. cu 3381 probleme).* (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică, Ediţia V* . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I *Ediţia II revăzută şi adăogită,* 1923 . . . . . Lei 30

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).

Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).

Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“

Casa Gazeta Matematică

Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN (Telefon 4-3929).**

C. 39808

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 4. — DECEMVRIE 1935

SUMARUL

1. Seminarul Matematic de pe lângă Universitatea din Iaşi . . . . . *I. Ionescu.*
2. Asupra unei probleme de geometrie elementară, plană . . . . . *Alexandru I. Guţu.*
3. Aplicaţiuni ale calculului vectorial . . . *Gh. Vasiliu.*
4. Premiul Inginer „Al. Roşu".
5. Note Matematice: 13 — 20.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 252.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 2458, 3368, 3958, 4066, 4330, 4419, 4462, 4510, 4523, 4536.
10. Exerciţii: 6 — 7.
11. Probleme propuse: 4586 — 4587, 4603 — 4614.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1935

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 42, 45, 49, 52, 58, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 98, 500, 03, 05, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 28, 30, 31, 33, 34, 46, 47, 50, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 600, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

SEMINARUL MATEMATIC DE PE LÂNGĂ UNIVERSITATEA DIN IAŞI

La 18 Octomvrie trecut s'au împlinit 25 ani dela întemeierea la Facultatea de Ştiinţe din Iaşi a unui Seminar de Geometrie analitică de către D-l Profesor A. MYLLER, care fusese numit la acea catedră în locul lui C. CLIMESCU, retras la pensie.

In *Revista Ştiinţifică* «V. ADAMACHI» Anul XXI, No. 2—3, D-l ILIE I. POPA, asistent la acel Seminar, a scris un istoric, din care extrag cele ce urmează:

Seminarul şi-a alcătuit Biblioteca sa cu cărţi răslețe de matematici de prin alte biblioteci şi prin cumpărarea de cărţi, colecţii de reviste şi opere ale marilor matematicieni. Fondurile au fost puse la dispoziţiune de Ministerul Instrucţiunii Publice, de Casa Şcoalelor, de Universitate, uneori de instituţiuni particulare. Seminarul mai dispune de jumătate din taxele de Seminar plătite de studenţi, de schimburile făcute cu revista *Annales scientifiques de l'Université de Jassy,* de donaţiuni făcute de foştii studenţi şi de profesori, printre cari în prima linie este fondatorul Seminarului, D-l A. MYLLER, Seminarul posedă azi 3890 volume de cărţi, 3341 volume de reviste, 137 volume în care sunt legate 3579 broşuri diverse şi 142 diferite modele matematice. Acolo se găsesc colecţiile aproape complete a 120 reviste matematice, operele complete a 94 matematicieni mari, enciclopedii, cărţi vechi de matematică, streine şi române, etc. Seminarul dispune de o sală de lectură pentru studenţi; ea poate rămâne deschisă de dimineaţa până la miezul nopţii.

La început grija Seminarului Matematic a avut-o chiar D-l A. MYLLER, căruia i s'a dat apoi un asistent, loc ocupat până azi de D-l O. MAYER, D-ra S. CREANGĂ, D-nii: D. HULUBEI, GH. VRÂNCEANU, A. MEILYCHSON, A. SCHUMACHER, M. ANTONESCU, E. STIHI. D-ra M. BORŞ, D-nii: P. CAZANACLI, D. MANGERON, I. POPA şi I. HAIMOVICI.

Pentru înzestrarea acestui Seminar Statul a cheltuit într'un sfert de veac suma de lei stabilizaţi de aproape $3^1/_2$ milioane, ce corespunde cu ce s'ar fi dat ca salariu unui conferenţiar. Sumele au fost foarte neregulat repartizate: de unde în 1929 subvenţia bugetară a fost de 229.000 lei, în 1934 a fost de 4715 lei, pe când numărul

cărţilor împrumutate de Seminar au crescut, în aceşti ani, dela 693 la 1440. Se poate conchide de aci că subvenţia scade când utilitatea creşte! Dacă în ultimii ani s'a putut face faţă cerinţelor, aceasta se datoreşte sacrificiilor făcute de profesori şi în special de D-l A. MYLLER ale cărui donaţiuni se sumează la 66.000 lei, şi din taxele studeţilor, din schimburile cu Revista de care am vorbit (65 schimburi), din donaţiuni gratuite ale editorilor (12 reviste) şi din daruri (4 reviste).

Graţie Bibliotecii Seminarului Matematic din Iaşi s'au putut face, la Facultatea de Ştiinţe de acolo, cursuri speciale, conferinţe şi de curând comunicări informative pentru matematici.

După asemenea rezultate strălucite, — pentru a căror realizare D-l A. MYLLER merită toate laudele şi recunoştinţa celor cari s'au folosit de Biblioteca Seminarului de Matematică din Iaşi, — care este starea lui de azi? Aceasta ne-o spune D-l ILIE I. POPA în articolul său jubilar:

„Astăzi însă, situaţiunea financiară a Seminarului Matematic a devenit disperată. Pentru a ilustra această afirmaţie e suficient să spunem că în 1929 subvenţia bugetară a fost de 229.000 lei, iar în 1934 pe 4715 lei... Cu toate economiile (nu se mai cumpără cărţi oricât de importante ar fi) Seminarul Matematic are nevoie anual pentru abonamente de cel puţin 55.000 lei.

„Singura resursă ce a rămas Seminarului Matematic este formată din taxele de Seminar ale studenţilor Secţiei de Matematici (şi numai 51% din cuantumul acestor taxe). Se ştie însă că Secţia de Matematici are cel mai mic număr de studenţi; acest număr este în descreştere; în fine, vin mulţi studenţi într'atât de nevoiaşi încât nu pot plăti taxele chiar aşa de mici cum sunt la Secţia de Matematici".

In această stare îngrijitoare, un *„Comitet de iniţiativă"* a lansat un Apel prin care imploră iniţiativa particulară pentru sprijinul acelei Instituţiuni. Acolo se spune că *„sprijinul material al Statului este redus la zero"* şi că **„Momentul iniţiativei particulare se impune imperios".** Toţi doritorii de a ajuta această Instituţie se pot adresa cu sugestiuni, propuneri şi mai ales cu subscripţiuni de sume, ori donaţiuni de cărţi, abonamente nominale la reviste, etc., la adresa: *„Seminarul Matematic. Universitatea Iaşi. Secţia F".*

(«Fondul pentru Biblioteca şi Sala de lectură din iniţiativa Profesorilor de Matematici şi Prietenilor ştiinţelor matematice»).

Gazeta Matematică, care urmăreşte desvoltarea ştiinţelor matematice în ţara noastră, se asociază la Apelul făcut de Direcţiunea Seminarului, pentru a putea străbate timpurile grele prin care trece. In special, toţi cei cari ca studenţi, sau cetitori de cărţi ştiinţifice s'au folosit de acel Seminar au datoria morală de a-l ajuta. — Ca unul ce m'am folosit de acea Bibliotecă în timpul războiului, cât am fost mobilizat la Iaşi la Marele Cartier General, donez suma de 1000 lei.

Dar situaţiunea această tristă nu e numai la Iaşi. D-l G. ŢIŢEICA mi-a spus că şi situaţia Bibliotecii matematice dela Facultatea de ştiinţe din Bucureşti este desperată. La Şcoala Politehnică din Bucureşti Statul a dat în 1929 şi 1930 câte 1 milion lei pentru Bibliotecă, iar în 1934 — 35 numai 284.260 şi în 1935 — 36 numai 397.861 lei. De unde în 1931 s'au cumpărat 687 volume de cărţi tehnice, în 1934 s'au cumpărat numai 242. Graţie iniţiativei particulare însă, Şcoala a primit între 224 şi 518 volume anual şi 75 — 152 abonamente gratuite la Reviste. In anii 1926, 1927, 1928, 1934, 1935 Societatea *„Prietenii Şcoalei Politehnice"* a dat pentru Bibliotecă câte 50.000 lei anual. Graţie acestor ajutoare particulare Şcoala a putut face faţă necesităţii de a ţine pe profesori, pe elevi şi lumea tehnică particulară cu progresele mari ale ştiinţei inginerului. Şi aci suntem departe de ceeace ar trebui să fie, însă putem zice că nu tindem spre zero, căci atunci ar fi o mare nenorocire: dacă tehnica română nu s'ar putea ţine la nivelul progreselor mondiale, ea ar fi repede copleşită de tehnica streină. Iniţiativa particulară trebue să aibă necontenit în vedere această primejdie, şi de aceea nu trebue să lase ca la noi cultura ştiinţifică şi tehnică să decadă.

I. IONESCU.

ASUPRA UNEI PROBLEME DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ, PLANA

Ne vom ocupa de următoarea problemă: *să se construiască un triunghiu* ABC, *când i se cunosc cele trei înălţimi* a', b', c'.

I. Cunoaştem două soluţii date acestei probleme (v. Exercices de Géometrie par F. G. M. ed. VII. pag. 708, 769). Una din soluţii se bazează pe construcţiunea unui triunghiu, care are laturile egale cu segmentele b', a' şi $\frac{a'b'}{c'}$, iar cealaltă soluţie se bazează pe construcţia unui triunghiu, care are laturile egale sau proporţionale cu inversele înălţimilor date.

Drumul urmat în soluţionarea problemei prin aceste două moduri nu este un drum direct, obişnuit. Se construeşte întâiu fie segmentul auxiliar $\frac{a'b'}{c'}$, fie segmentele auxiliare $\frac{k^2}{a'}$, $\frac{k^2}{b'}$, $\frac{k^2}{c'}$, se deduce apoi un triunghiu asemenea cu cel căutat, iar cu ajutorul acestor elemente auxiliare se construeşte triunghiul ABC.

Vom da în cele ce urmează un alt mod de a construi triunghiul ABC, care urmează drumul obişnuit în soluţionarea problemelor de construcţiuni grafice. Această construcţiune constă din aplicarea metodei *intersecţiunei a două locuri geometrice.*

II. Pentru a fixa ideile, vom presupune că c' este cea mai mare dintre înălţimi, iar b' cea mai mică. Dacă înălţimile ar fi egale toate între ele, triunghiul este echilateral şi construcţiunea laturei este o problemă elementară cunoscută.

Construim două drepte paralele Δ şi Δ', astfel ca distanţa între ele să fie egală cu c'. Presupunem că latura AB este aşternută dealungul dreptei Δ, cu vârful A într'un punct determinat al acestei drepte. Vârful C se va găsi deci pe dreapta Δ'.

Pentru a construi un triunghiu AB_1C_1, care să aibă două din înălţimi egale cu b' şi c' se duce cercul β, cu centrul în A şi de rază b', se duce tangenta într'un punct oarecare G_1 al acestui cerc, care întâlneşte dreapta Δ în punctul B_1, iar din A se duce paralela la această tangentă, care întâlneşte dreapta Δ_1 în punctul C_1.

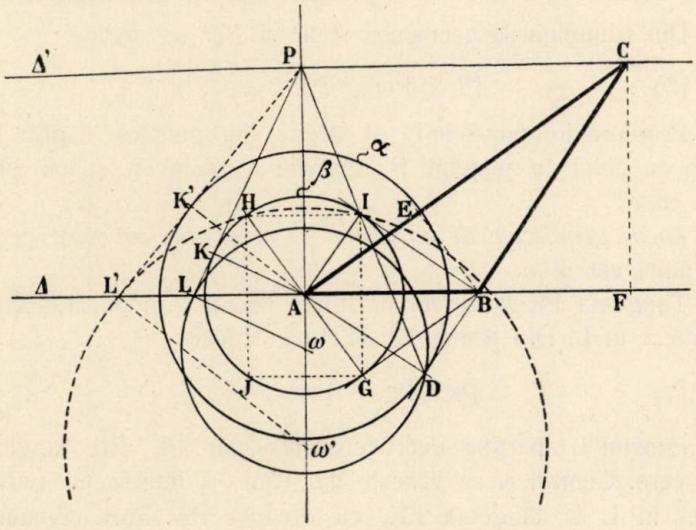
Pentru a construi un triunghiu AB_2C_2, care să aibă două din înălţimi egale cu a' şi b', se duce cercul α cu centrul în A şi de rază a', se duce tangenta într'un punct oarecare G_2 al acestui cerc, care întâlneşte dreapta Δ în punctul B_2 şi dreapta Δ' în C_2.

Triunghiurile ABC, care să aibă cele trei înălţimi egale cu a', b', c' sunt soluţiile comune celor două categorii de triunghiuri AB_1C_1 şi AB_2C_2.

III. Fie D_1 şi D_2 picioarele înălţimilor duse din vârful A pe laturile opuse, în cele două categorii de triunghiuri. Punctele D_1 şi D_2 constituesc două locuri geometrice. Punctele comune acestor locuri geometrice sunt punctele D, picioarele înălţimilor duse din vârful A pe latura opusă în triunghiul ABC căutat.

Locul geometric al punctelor D_2 este evident cercul α.

Locul geometric al punctelor D_1 se stabileşte în modul următor:



Fie ABC un triunghiu din prima categorie (vezi figura); GB este tangenta în G la cercul β, paralelă cu latura AC; Peste punctul unde perpendiculara în A pe Δ taie dreapta Δ'; H, I, J sunt simetricele punctului G în raport cu A, cu Δ şi cu PA. Din figura astfel formată se deduc egalităţile:

(1) $$\widehat{BAC} = \widehat{PAH} = \widehat{IAP}$$

(2) $$\frac{AI}{AP} = \frac{\overline{AB}}{AC} \; ;$$

cari arată că triunghiurile ABC şi IAP sunt asemenea şi prin urmare:

(3) $$\widehat{AIP} = \widehat{ABC}$$

Din patrulaterul inscriptibil AIBD se deduce:

$$(4) \qquad \overset{\frown}{AID} = \overset{\frown}{ABD}$$

Relaţiile (3) şi (4) adunate ne dau:

$$(5) \qquad \overset{\frown}{AIP} + \overset{\frown}{AID} = \overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ABD} = 180^0.$$

Punctele P, I *şi* D *sunt prin urmare în line dreaptă.*

Din triunghiurile asemenea ADP şi AIP se deduce:

$$(6) \qquad \overline{PI} \times \overline{PD} = \overline{PA}^2 = c'^2.$$

Prin urmare punctele D se deduc din punctele I prin inversiunea cu polul în punctul P, exterior cercului β, şi cu puterea egală cu c'^2.

Locul geometric al punctelor D_1 *este dar un cerc,* pe care-l vom numi cercul ω.

Tangenta PK la cercul β, atinge cercul β în punctul K şi taie dreapta Δ în L. Din triunghiul ALP se deduce:

$$(7) \qquad \overline{PK} \cdot \overline{PL} = \overline{PA}^2 = c'^2.$$

Punctul L aparţine deci cercului ω, iar PL este tangentă la acest cerc. Centrul ω se găseşte dar uşor, la intersecţia perpendicularei în L la tangenta PK, cu dreapta PA. Raza cercului este evident egală cu segmentul $\overline{\omega L}$.

Intersecţia cercului ω cu cercul α determină punctele D şi prin urmare rezolvă problema.

IV. Tangenta PK se poate construi totdeauna şi prin urmare se poate totdeauna construi cercul ω. Pentru ca acest cerc să taie cercul α trebue să existe relaţia:

$$| \overline{\omega L} - a' | \leqslant \overline{\omega A} \leqslant \overline{\omega L} + a'$$

şi cum centrul A al cercului α se găseşte totdeauna în interiorul cercului ω, rămâne numai inegalitatea:

$$| \overline{\omega L} - a' | \leqslant \overline{\omega A}$$

care se mai poate scrie astfel:

$$\overline{\omega L} - \overline{\omega A} \leqslant a' \leqslant \overline{\omega L} + \overline{\omega A}$$

sau trecând la valorile segmentelor ωL şi ωA în funţiune de a', b', c' se deduce condiţia de posibilitate a problemei:

$$\frac{b'c'}{b'+c'} \leqslant a' \leqslant \frac{b'c'}{c'-b'},$$

care se mai poate scrie şi:

$$\frac{1}{b'} - \frac{1}{c'} \leqslant \frac{1}{a'} \leqslant \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'}. \tag{8}$$

Această condiţiune este traducerea directă a condiţiunii de existenţă:

$$b - c \leqslant a \leqslant b + c$$

a unui triunghiu, în care c este cea mai mică, iar b cea mare dintre laturi.

V. In conclusiune dacă condiţiile (8) sunt îndeplinite se poate determina un punct D de intersecţie a cercurilor α şi ω. Tangenta în D la cercul α taie dreptele Δ şi Δ' în punctele B şi C. Se determină astfel un triunghiu ABC, care răspunde la condiţiile problemei.

Tangenta în D', al doilea punct de intersecţie al cercurilor α şi ω, conduce la o soluţiune simetrică celei de mai sus, în raport cu PA

Cercul ω este cum s'a arătat mai sus, cercul invers cercului β, cu polul de inversiune în P şi cu puterea de inversiune c'^2. Se poate construi cercul ω', inversul cercului α, în aceleaşi condiţiuni. Intersecţia cercului ω' cu cercul β, nu ne dă soluţii distincte de cele de mai sus. Intr'adevăr din relaţia:

$$\overline{PD} \times \overline{PI} = c'^2$$

rezultă că I este corespondentul punctului D de pe cercul α în această din urmă inversiune. Prin urmare cercul ω' trece prin I şi H. Aceste puncte aparţin şi cercului β. Tangentele în aceste puncte la cercul β determină prin urmare punctele B' şi C' analoage soluţiei de mai sus. Tangenta în I. la cercul β taie însă dreapta Δ în punctul B găsit mai sus, iar această tangentă este egal înclinată faţă de dreapta Δ ca şi dreapta AC, deoarece avem:

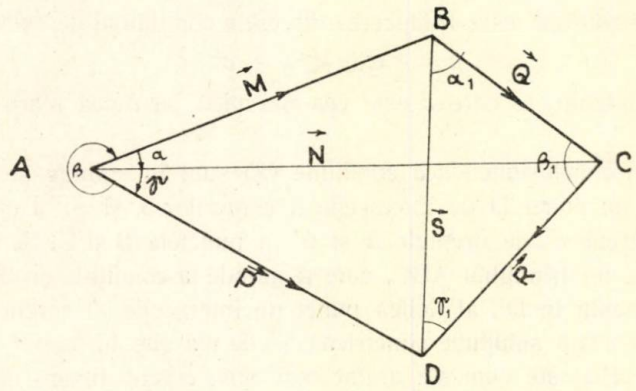
$$\widehat{CAB} = \widehat{PDA} = \widehat{ABI}.$$

Soluţia AB'C' este dar simetrică cu cea de mai sus ABC, în raport cu perpendiculara pe mijlocul segmentului AB.

ALEXANDRU I. GUŢU.

APLICAȚIUNI ALE CALCULULUI VECTORIAL

1°. Fie patrulaterul ABCD format din vectorii $\vec{M} = M\vec{M}_0$, $\vec{Q} = Q\vec{Q}_0, \vec{R} = R\vec{R}_0, \vec{P} = P\vec{P}_0$ și cu diagonalele $\vec{N} = N\vec{N}_0$ și $\vec{S} = S\vec{S}_0$. Notez cu α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 unghiurile, așa după cum se vede în figură :



Definesc trei noui vectori :

$$\vec{X} = (\vec{S}\,\vec{Q})\,[\vec{N}\,\vec{P}] + (\vec{N}\,\vec{P})\,[\vec{S}\,\vec{Q}]$$
$$\vec{Y} = (\vec{Q}\,\vec{R})\,[\vec{P}\,\vec{M}] + (\vec{P}\,\vec{M})\,[\vec{Q}\,\vec{R}] \qquad (1)$$
$$\vec{Z} = (\vec{R}\,\vec{S})\,[\vec{M}\,\vec{N}] + (\vec{M}\,\vec{N})\,[\vec{R}\,\vec{S}]$$

unde prin (.) notez produsul scalar, iar prin [.] notez produsul vectorial. Urmărind figura, vectorii (1) se pot ușor transforma :

$$\vec{X} = (\vec{M} - \vec{P} \,.\, \vec{N} - \vec{M})\,[\vec{N} \,.\, \vec{P}]$$
$$+ (\vec{N} \,.\, \vec{P})\,[\vec{M} - \vec{P} \,.\, \vec{N} - \vec{M}] = -\vec{M}^2[\vec{N} \,.\, \vec{P}]$$
$$+ (\vec{M} \,.\, \vec{N})\,[\vec{N} \,.\, \vec{P}] + (\vec{N} \,.\, \vec{P})\,[\vec{M} \,.\, \vec{N}] + (\vec{N} \,.\, \vec{P})\,[\vec{P}\,\vec{M}]$$
$$+ (\vec{P} \,.\, \vec{M}) \,.\, [\vec{M} \,.\, \vec{P}]$$

de oarece

$$(\vec{M} \cdot \vec{M}) = \vec{M}^2 \text{ şi } [\vec{M} \cdot \vec{M}] = 0$$

cum însă:

$$[\vec{N}\ \vec{P}] = -[\vec{P} \cdot \vec{N}], (\vec{M} \cdot \vec{N})[\vec{N} \cdot \vec{P}]$$

$$= (\vec{N} \cdot \vec{N})[\vec{M} \cdot \vec{P}] = -\vec{N}^2[\vec{P} \cdot \vec{M}] \text{ etc...}$$

deduc că:

$$\vec{X} = -\vec{M}^2[\vec{N} \cdot \vec{P}] - \vec{N}^2[\vec{P} \cdot \vec{M}] - \vec{p}^2[\vec{M} \cdot \vec{N}]$$

şi analog

$$\vec{Y} = -\vec{M}^2[\vec{N} \cdot \vec{P}] - \vec{N}^2[\vec{P} \cdot \vec{M}] - \vec{p}^2[\vec{M} \cdot \vec{N}] \quad (2)$$

$$\vec{Z} = -\vec{M}^2[\vec{N} \cdot \vec{P}] - \vec{N}^2[\vec{P} \cdot \vec{M}] - \vec{p}^2[\vec{M} \cdot \vec{N}]$$

adică

$$\vec{X} = \vec{Y} = \vec{Z}.$$

Ţinând seama de:

$$|\vec{X}| = NPQS \sin(\alpha - \alpha_1), |\vec{Y}| = M.P.Q.R \sin(\beta - \beta_1) \text{ şi}$$

$$|\vec{Z}| = M.N.R.S. \sin(\gamma - \gamma_1)$$

sunt condus să scriu că:

$$\frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{AB.DC} = \frac{\sin(\beta - \beta_1)}{AC.BD} = \frac{\sin(\gamma - \gamma_1)}{AD.BC} \quad (3)$$

Această remarcabilă formulă exprimă posibilitatea determinării unui punct A, cunoscând coordonatele altor trei puncte B, C şi D după ce am măsurat unghiurile α, β şi γ făcând în A staţie cu teodolitul.

(Vezi pentru aceasta operele lui GAUSS F. C. vol. III. Göttingen pagina 316, 317 sau Geodäsie de GALLE. Leipzig 1907 pagina 213).

2°. Dând punctului A diferite poziţii faţă de cercul BCD pot discuta cunoscuta problemă a Hărţei [1]).

1) După unii autori problema lui POTHÉNOT.

In cazul că A se află pe cercul BCD am:

$$\vec{X} = \vec{Y} = \vec{Z} = 0 \text{ adică}$$

$$\vec{M}^2[\vec{N} \cdot \vec{P}] + \vec{N}^2[\vec{P} \cdot \vec{M}] + \vec{P}^2[\vec{M} \cdot \vec{N}] = 0$$

sau încă:

$$AB \sin\alpha + AC \sin\beta + AD \sin\gamma = 0 \qquad (4)$$

formulă foarte elegantă ce caracterizează patrulaterele inscriptibile.

Observând însă că $\alpha = \alpha_1$, $\beta = 180^0 - \beta_1$ și $\gamma = \gamma_1$ relația (4) devine:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD. \qquad (5)$$

Adică tocmai teorema lui PTOLEMEU asupra patrulaterelor inscriptibile.

3°. Se numește punctul lui COLLIN, punctul în care spre ex: AC taie a doua oară cercul ABD; îl notez cu C^2 și observ că analog mai obțin încă două puncte COLLIN C_1 și C_3 relative la vârfurile B și D cu cercurile ADC și ABC.

Pot scrie pentru patrulaterele inscriptibile ABC_2D, $ABCC_1$ și $ABDC_3$ relațiuni analoage lui (4); Obținând un sistem de 3 ecuațiuni

$$(AB + C_1B) \sin\alpha + AC \sin\beta + AD \sin\gamma = 0$$

$$AB \sin\alpha + (AC + C_2C) \sin\beta + AD \sin\gamma = 0$$

$$AB \sin\alpha + AC \sin\beta + (AD + C_3D) \sin\gamma = 0.$$

Compatibilitatea sistemului atrage însă condiția:

$$\begin{vmatrix} AB + C_1B & AC & AD \\ AB & AC + CC_2 & AD \\ AB & AC & AD + C_3D \end{vmatrix} = 0$$

care desvoltată ne dă:

$$\frac{AB}{BC_1} + \frac{AC}{CC_2} + \frac{AD}{DC_3} = -1. \qquad (6)$$

Din oricare din cele trei ecuațiuni și ținând seama de (3) deduc că:

$$C_1B \sin\alpha = C_2C \sin\beta = C_3D \sin\gamma.$$

GH. VASILIU.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU“

Subsemnații membri în Comisiunea pentru decernarea premiului « INGINER AL. ROȘU », cercetând volumul XL al *Gazetei Matematice* pentru a desprinde activitatea cea mai rodnică în domeniul geometriei elementare avută de către abonații elevi de liceu, studenți ai Facultăților, elevi ai Școalelor Politehnice și Militare din țară, am constatat următoarele:

In cursul volumului XL singurul articol geometric care să îndeplinească condițiunile cerute este articolul D-lui CEZAR IVĂNESCU, student în matematici la Universitatea din Iași, apărut la pag. 397 — 9 și purtând titlul:

« Proprietăți ale Triunghiului ».

D-l CEZAR IVĂNESCU a mai publicat sub formă de Notă la pag. 446 o demonstrație a teoremei lui STEINER generalizată, iar la pag. 240 problema de geometrie elementară Nr. 4470.

Prin această activitate D-l CEZAR IVĂNESCU îndeplinește cu prisosință condițiunile premiului « INGINER AL. ROȘU ».

In consecință, am hotărît ca premiul « INGINER AL. ROȘU » în valoare de 500 lei să se acorde pentru cea mai rodnică activitate de geometrie elementară în cursul volumului XL: D-lui CEZAR IVĂNESCU, student al Universității din Iași.

COMISIUNEA
PENTRU DECERNAREA PREMIULUI „ING. AL. ROȘU“:
G-L GH. BUICLIU, ING. A. IOANOVICI,
AL. A. ROȘU.

NOTE MATEMATICE

13. *Asupra unui articol de aritmetică.* D-l G-L GH. BUICLIU într'o scrisoare din 3.IX a. c., îmi atrage atenția, printre altele, că în *Gazeta Matematică, Vol. XXXVII, pag. 368,* în tabloul din articolul meu s'au strecurat unele greșeli ce trebuesc îndreptate.

Recalculând acel tablou găsesc că în adevăr trebuesc îndreptate următoarele:

La terminaţiunea 244 corespunde $500n \pm 162$ în loc de $500n \pm 161$

» » 500 » $100n + 50$ » » » $100n \pm 50$

» » 644 » $500n \pm 238$ » » » $500n \pm 258$

» » 684 » $500n \pm 178$ » » » $250n \pm 133$

» » 689 » $250n \pm 117$ » » » $500n \pm 117$

Terminaţiunea 906 se va înlocui cu 916

» 989 » » » » 984.

Unele din aceste îndreptări ale tabloului au fost menţionate de D-l G-L GH. BUICLIU în *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XV, pag. 37, iar altele de subsemnatul în *Gazeta Matematică, Vol. XXXVIII, pag. 175.*

I. V. MĂTIEŞ.

14. *Asupra problemei 4031.*

Soluţia acestei probleme, publicată în «G. M.» Vol. XL pag. 255 nu este completă, deoarece concluzia cum că cifrele a şi b trebuesc să fie identic nule, pentru ca numărul

$$N = 1931\, a\, 1929^3 \pm 1929\, b\, 1931^3$$

să fie divizibil prin 1930 este prematură.

Intr'adevăr, concluzia aceasta se obţine, observându-se că după ce se caută resturile diviziunilor fiecărui număr care intervine în expresia numărului N, se are:

$$N = (1569 + 35a)^3 \pm (361 + 35b)^3 = x^3 \pm y^3$$

şi studiindu-se următoarele patru cazuri

I $x + y =$ mult 1930 II $x - y =$ mult 1930

III $x^2 - xy + y^2 =$ mult 1930 IV $x^2 + xy + y^2 =$ mult 1930

Ori, aceste cazuri nu sunt singurele posibile fiindcă un produs. poate fi divizibil printr'un număr neprim, fără ca unul din factorii

produsului să fie divizibil, şi astfel se omit următoarele cazuri în număr de douăsprezece

$$\begin{cases} x+y = \text{mult } 2 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 5.193 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y = \text{mult } 5 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 2.193 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \text{mult } 2.5 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 193 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = \text{mult } 2.193 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = \text{mult } 2 \\ x^2+xy+y^2 = \text{mult } 5.193 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y = \text{mult } 5 \\ x^2+xy+y^2 = \text{mult } 2.193 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = \text{mult } 2.5 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 193 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y = \text{mult } 2.193 \\ x^2+xy+y^2 = \text{mult } 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = \text{mult } 193 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 2.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y \text{ mult } 5.193 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = \text{mult } 193 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 2.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = \text{mult } 5.193 \\ x^2-xy+y^2 = \text{mult } 2 \end{cases}$$

care învederează maturitatea concluziei obţinute.

Voiu da în rândurile ce urmează soluţia completă a acestei probleme, dar nu voiu urma pentru aceasta calea mai sus citată, ea comportând studiul prea multor cazuri ci voiu observa cum că numerele *1931a 1929* şi *1929b 1931* au cuburile lor terminate respectiv în 9 şi 1 aşa încât numai numărul format din suma cuburilor acestor numere va fi divizibil prin *10* şi deci problema determinărei cifrelor *a* şi *b* pentru ca cele două expresiuni ale numărului dat să fie divizibiie respectiv prin *1930*, trebue mărginită numai pentru următoarea expresie

$$N = 1931\ a\ 1929^3 + 1926\ b\ 1931^3$$

şi numai la determinarea condiţiunei de divizibilitate prin *193*, căci prin *10* acest număr este totdeauna divizibil.

Observând acum că numărul N se poate scrie sub forma

$$N = (193001930 + 10^5 - 1 + 10^4 a)^3 + (1193001930 - 10^5 + 1 + 10^4 b)^3$$

conchid că am :

$$N = 10(X + Y)[10^2(X^2 - XY + Y^2) - 3 \cdot 10(X - Y) + 3]$$

atunci când pun simbolic:

$$X = 19300193 + 10^4 + 10^3 a$$

$$Y = 19300193 - 10^4 + 10^3 b$$

şi deci câtul diviziunii numărului N prin *10* este

$$N' = (X + Y)[10^2(X^2 - XY + Y^2) - 3 \cdot 10(X - Y) + 3]$$

rezultând că, pentru determinarea condiţiunilor de divizibilitate a numărului N' prin *193* voiu avea de studiat numai următoarele două cazuri

I) $X + Y = \text{mult } 193$

II) $10^2(X^2 - XY + Y^2) - 3 \cdot 10(X - Y) + 3 = \text{mult } 193$

şi aceasta numai fiindcă *193* este număr prim.

Cazul I. — Se are în mod evident:

$$X + Y = 2 \cdot 19300193 + 10^3(a + b) = 193 \cdot 100001 \cdot 2 + 10^3(a + b)$$

adică :

$$X + Y = 10^3(a + b) + \text{mult } 193$$

şi cum 10^3 e prim cu *193* va trebui ca suma cifrelor a şi b să fie zero sau multiplu de *193,* ceeace nu se poate decât dacă aceste cifre sunt identic nule — rezultat obţinut în soluţia citată.

Cazul II. — Acest caz scapă soluţiei citate şi este puţin mai delicat decât precedentul, pentru analizarea lui, observ în primul rând că:

$$X = \text{mult } 193 + 10^3(a + 10) = \text{mult } 193 + 35a - 36$$

$$Y = \text{mult } 193 + 10^3(b - 10) = \text{mult } 193 + 35b + 36$$

şi deci că va trebui să determin cifrele a şi b astfel încât să am

$$122500(a^2 - ab + b^2) - 379050(a - b) + 390963 = \text{mult } 193$$

sau încă, după căutarea resturilor diviziunilor numerilor *122500; 379050* şi *390963* prin *193:*

$$-55(a^2 - ab + b^2) + 95(a - b) - 55 = \text{mult } 193$$

care îmi arată cum că cifrele a şi b vor trebui astfel determinate încât

$$11(a - b)^2 - 19(a - b) - 11(ab - 1) = \text{mult } 193.$$

Această ultimă relaţie îmi dă

$$a - b = \frac{19 \pm \sqrt{484ab + 8492m - 121}}{22}$$

şi va trebui, în primul rând să am în mod necesar:

$$484ab + 8492m - 121 = n^2$$

$$\therefore \quad ab = \frac{n^2 + 121 - 8492m}{484}$$

care pentru motivul că produsul cifrelor a şi b este întreg, îmi arată că trebue să am:

$$n = 11p \qquad m = 11q$$

şi deci că, în al doilea rând, am:

$$a - b = \frac{19 \pm 11p}{22}$$

evidenţiindu-se că pentru nici o valoare a lui p diferenţa cifrelor a şi b nu este o cifră întreagă şi deci că nu există soluţiuni în acest de al doilea caz.

Conchid deci că unica soluţie admisibilă este $a = b = 0$ adică aceea găsită în soluţia citată, deşi prematur formulată.

Pentru a termina, observ că problema poate fi uşor generalizată prin considerarea următorului număr

$$N = (m + n)\, a\, (m - n)^{2p+1} \pm (m - n)\, b\, (m + n)^{2p+1}$$

şi determinarea numerilor a şi b astfel ca N să fie divizibil prin m.

In cazul când numerele m, $m + n$ şi $m - n$ au acelaşi număr de cifre, o condiţie suficentă de divizibilitate a numărului N prin m

este ca suma numerelor cu acelaşi număr de cifre a şi b să fie divizibilă prin m. Dacă a şi b n'au acelaşi număr de cifre, condiţiunea suficientă de divizibilitate este mult mai complicată.

Sfătuesc pe tinerii corespondenţi ai Gazetei de a studia această generalizare, ea nefiind prea dificilă, iar calea de urmat fiind evidenţiată în deajuns prin rândurile acestea.

PROF. G. G. CONSTANTINESCU.

N. R. Incă dela apariţia soluţiei problemei No. 4031 D-l GENERAL BUICLIU mi-a atras atenţia asupra examinărei celorlalte cazuri, pe care făcând-o am constatat că nu avem alte soluţii. Acea examinare nu o mai publicăm, deoarece soluţia D-lui profesor G. G. CONSTANTINESCU, remarcabilă prin eleganţa ei, este completă.

I. L.

15. *Generalizarea problemei 4457.* Problema 4457, rezolvată la pag. 426, Vol. XL al *Gazetei Matematice,* se poate generaliza în felul următor. Fie sistemul

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Sigma x_1 &= a_1 \\ \Sigma x_1^2 &= a_2 \\ &\cdots\cdots \\ \Sigma x_1^n &= a_n \end{aligned}$$

în care x_i sunt rădăcinile ecuaţiunii

$$(2)\qquad x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0.$$

Ţinând seamă de (1), formulele lui NEWTON devin

$$(3)\qquad k b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k = 0.$$

Dăm lui k în (3) valorile $1, 2, \ldots n$ şi găsim sistemul în b_i, care se rezolvă foarte simplu:

$$(4)\qquad \begin{aligned} b_1 + a_1 &= 0 \\ 2b_2 + a_1 b_1 + a_2 &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ n b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n &= 0. \end{aligned}$$

In cazul problemei 4457 datele problemei erau

$$n = 4\ ;\ a_1 = 10\ ;\ a_2 = 30\ ,\ a_3 = 100\ ,\ a_4 = 354.$$

S.-LT. I. C. SAVIN.

16. *Relativ la împărţirea polinoamelor prin* $x^n - a$. D-l Lt. C-dor Gr. Zapan dă în nota dela pag. 140, Vol. XLI, două expresiuni ale restului împărţirii unui polinom întreg prin $x^n - a$ şi stabileşte condiţiile de divizibilitate.

Este adevărată observaţia de la finele notei citate, că această chestiune nu se găseşte în tratatele de algebră, ea a fost însă tratată acum 30 de ani în *Gazeta Matematică* de T. Lalescu în nota de la pag. 227, Vol. XI.

Tr. Lalescu a pus restul sub formula a doua a D-lui Lt. C-dor Gr. Zapan, iar condiţiile de divizibilitate sunt aceleaşi la ambii autori.

G-l Gh. Buicliu.

Observare. — Faţă de nota de mai sus adaug că D-l Lt. C-dor Gh. Niculescu mi-a atras atenţiunea că în *Exercices d'Algèbre* de *Aubert & Papelier* este tratat un exerciţiu în care se arată condiţiile de divizibilitate ale unui polinom prin $x^n - a$. Prin urmare formula a doua stabilită de subsemnatul a mai fost întâlnită şi tratată de diverşi autori. Ar fi interesant însă de cercetat aplicaţiunile la cari este susceptibilă această formulă, în care scop atrag atenţiunea tinerilor corespondenţi ai *Gazetei Matematice*.

Lt. Comandor Gr. Zapan.

17. *Asupra unei generalizări a formulei lui* Leibnitz.

D-nii: Prof. M. Ghermănescu şi Gh. Gheorghiu îmi atrag atenţia că formula pe care am stabilit-o la pag. 74 este cunoscută. Ea se găseşte la pag. 71 a Lecţiunilor de Calcul Diferenţial ale D-lui Prof. A. Anghelescu.

N. Botea.

18. *Cube et tétraèdre trirectangle.* **1.** Considérons un cube ABCD A'B'C'D', puis un plan variable (P) passant au sommet A' et tangent à la sphère (O) inscrite au cube. Ce plan coupe les arêtes AB, AD en M, N. Posons $AA' = a$, $AM = x$, $AN = y$; désignons par S_a, $S_{a'}$, S_m, S_n, les aires des triangles A'MN, AMN, A'AN, A'MA, V le volume du tètraèdre AA'MN.

La sphère inscrite au cube coïncide avec la sphère tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre AA'MN, dans le trièdre tronqué opposé au sommet A. Son rayon a pour expression

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2}a = \frac{3V}{-S_a + S_{a'} + S_m + S_n};$$

d'où, observant que

$$S_a^2 = S_a^2 + S_m^2 + S_n^2,$$

$$(2)\quad \tfrac{1}{2}a = \frac{axy}{-(a^2x^2 + a^2y^2 + x^2y^2)^{\frac{1}{2}} + ax + ay + xy}.$$

Dès lors il vient

$$(ax + ay - xy)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + x^2y^2,$$

puis, après réductions.

$$(3)\qquad x + y = a = \text{constante}.$$

Réciproquement, de la relation (3), découle la suivante :

$$(4)\quad r_a = \frac{axy}{-(a^2x^2 + a^2y^2 + x^2y^2) + ax + ay + xy} = \tfrac{1}{2}a,$$

r_a étant le rayon de la sphère inscrite au trièdre tronqué opposé au sommet A.

On peut donc énoncer cette proposition :

Si le diamètre de la sphère inscrite au trièdre tronqué opposé au sommet A *d'un tétraèdre* AA'MN, *trirectangle en* A, *est égal à l'une des arêtes issues de ce sommet, il équivaut à la somme des deux autres arêtes, et réciproquement.*

2. De la relation connue

$$\frac{1}{r_a} = -\frac{1}{h_a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

h_a, a, x, y étant les hauteurs du tétraèdre AA'MN, et en vertu de (4), on tire

$$\frac{2}{a} = -\frac{1}{h_a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

puis

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{h_a} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

et enfin

$$S'_a + S_a = S_m + S_n.$$

Cette remarque conduit à dire qu'il n'y a, en général, que *sept* sphères tangentes aux quatre plans des faces du tétraèdre AA'MN, deux des *combles* seulement possédant une sphère inscrite.

En effet, comme

$$S_a > S'_a\,,\ S_a > S_m,\ S_a > S_n\,,$$

on a, au plus, $S_m = S_n$, puisque

$$S_a + S_m \neq S_{a'} + S_n\,,\ S_a + S_n \neq S_{a'} + S_m.$$

V. THÉBAULT.

19. *Chestiuni de prioritate în legătură cu un articol de geometria triunghiului.* In *Gazeta Matematică* Vol. XL, pag. 536, s'a publicat un articol a D-lui G-L GH. I. POPESCU cu titlul „*Din geometria triunghiului*". D-l G-L GH. I. POPESCU, înainte de a trimite articolul la redacţie mi l-a dat mie să-l văd şi să-i comunic dacă nu cumva chestiunile pe care le tratează sunt cunoscute. Proprietăţile ortopolului sunt aşa de mult frământate încât e foarte greu să afirmi că proprietăţi aşa de frumoase ca acelea date de D-l G-L GH. I. POPESCU să nu fi fost cunoscute. De aceea eu am dat articolul la imprimat, ţinând seamă mai ales de metodele date de D-l G-L GH. I. POPESCU în demonstrarea diferitelor proprietăţi pe care le-a găsit D-sa *singur*, independent de ce s'a publicat până acum asupra ortopolului.

Fac acest scurt istoric pentru că se întâmplă că unele din proprietăţile găsite de D-l G-L GH. I. POPESCU au fost publicate anterior chiar în *Gazeta Matematică* de către colegul de redacţie D-l LT. M. FOCŞENEANU care face cunoscut prin o notă, că:

1°. Proprietăţile 1 şi 2 sunt demonstrate în articolul „*Asupra ortopolului*" din *Gazeta Matematică* Vol. XXXI, pag. 447, de LT. L. I. FOCŞENEANU şi în *Curierul Matematic* Vol. II, pag. 50 şi Vol. I, pag. 145.

Cercurile ortopolare au fost generalizate de D-l N. BOTEA în o notă relativă la izopol, publicată în *G. M.* Vol. XXXV, pag. 58.

2°. Proprietăţile dela 5 se găsesc în *Curierul Matematic* Vol. I, pag. 145.

3°. Proprietatea 9 se găseşte în articolul „*Hipocicloida cu 3 rebrusmente şi ortopolul*" din *G. M.* Vol, XXXVI, pag. 254.

In calitate de redactor care am revăzut şi am dat la imprimat articolul D-lui G-L GH. I. POPESCU, am ţinut să restabilesc prin această notă dreptul *deplin* de autor al D-lui G-L GH. POPESCU asupra proprietăţilor din articolul *„Din geometria triunghiului"* şi dreptul de *prioritate* al D-lui LT. M. I. FOCŞENEANU asupra proprietăţilor citate la 1^0, 2^0 şi 3^0 precedent.

Şi fiindcă de şi răsfoind destul de des *Gazeta Matematică* nu mi-am amintit de articolele şi notele publicate în ea relativ la ortopol, e firesc să nu-mi amintesc nici de proprietăţi apărute în alte publicaţiuni consultate, restrâng dreptul de prioritate numai în ceeace priveşte *Gazeta Matematică*, nefiind exclus ca proprietăţile să fie publicate mai de mult şi aiurea, căci *nil novi sub sole.*

G-L GH. BUICLIU.

20. *O soluţie directă a problemei 4448.* Iată o soluţie directă a problemei 4448, rezolvată la pag. 164, Vol. XLI. Inlocuesc pe α, β, γ prin $2a$, $2b$, $2c$ şi observ că prima linie devine

$$\left| \sin(a+b) - \sin 2c \cos(a-b) \quad \cos(a+b) - \cos 2c \cos(a-b) \right.$$
$$\left. \sin(2c-a-b) \right| .$$

Se găseşte apoi uşor că

$$\sin(a+b) - \sin 2c \cos(a-b) = \frac{\cos a \cos b}{1+\operatorname{tg}^2 c} [\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$$
$$- 2\operatorname{tg} c + \operatorname{tg}^2 c \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}^2 c \operatorname{tg} b - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c]$$

$$\cos(a+b) - \cos 2c \cos(a-b) = \frac{\cos a \cos b}{1+\operatorname{tg}^2 c} [2\operatorname{tg}^2 c - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b]$$

$$\sin(2c-a-b) = \frac{\cos a \cos b}{1+\operatorname{tg}^2 c} [2\operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a$$
$$- \operatorname{tg} b + \operatorname{tg}^2 c \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}^2 c \operatorname{tg} b - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c].$$

Motive de simetrie dau valori analoage pentru celelalte linii.

Dacă factorul comun, pus în evidenţă, este nul problema e rezolvată. In caz contrar, să înlocuim pentru prescurtare pe $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$

prin x, y, z şi observăm că prima linie după simplificare devine

$$| x + y - 2z + z^2x + z^2y - 2xyz \quad 2z^2 - 2xy$$
$$2z - x - y + z^2x + z^2y - 2xyz |$$

sau adunând ultima coloană cu prima

$$| 2z^2x + 2z^2c - 4xyz \quad 2z^2 - 2xy \quad 2z - x - y + z^2x + z^2y - 2xyz | .$$

Scoţând în factor pe 2 din primele 2 coloane şi scăzând prima coloană din ultima:

$$\begin{vmatrix} z^2x + z^2y - 2xyz & z^2 - xy & 2z - x - y \\ x^2y + x^2z - 2xyz & x^2 - yx & 2x - y - z \\ y^2z + y^2x - 2xyz & y^2 - zx & 2y - z - x \end{vmatrix} .$$

Aci dacă se scade linia a doua din întâia şi a treia din a doua, se obţine un determinant cu două linii identice, deci nul, ceeace demonstrează enunţul.

B. I. BAIDAFF.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXIX. Fascicola IV. Aprilie 1935. Clasificarea elementară a grupurilor de ordinul $\leqslant 4$, de A. E. SAGASTUME BERRA.

Idem. Fascicola V. Mai 1935.

Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'École Politechnique Roi Charles II. Bucarest. Anul V (1933 — 1934) No. 2—3. Bucureşti 1935. Théorèmes sur le produit des séries sommables, par J. C. VIGNAUX. Un procédé graphique pour reconnaitre une sinusoïde, par E. ABASON. Note sur l'article de M. E. ABASON. Sur la méthode des discontinuités pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques, par AL. TH. POPESCO. Dimensionelle Kohaerenz der Masssysteme, von E. BORDEA. Une relation thermodynamique, par D. TEODORESCO. Passage du courant dans les électrolytes sans électrolyse, par VASILESCO KARPEN. Étude physicale sur les réactions des gaz à des très basses températures. Les réactions entre le dioxide d'azote et le bioxide de soufre de —74° C à —9° C par M. CONSTANTINESCO. Lignes de champ magnétique autour d'une ramification de courants, par SABBA S. STEFANESCO. Sur l'étude du récepteur téléphonique, de

T. A. TANASESCO. Beitrag zur Kentniss der Stossdauer beim longitudinalen Stoss zilindrischer Stahlstäbe, von ISAIA IS. NICULESCU. Contribution à la théorie de la flottation, par I. HUBER PANU.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol XLI. No. 9. Septemvrie 1935.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 7. Septemvrie 1935. Buenos Aires. Asupra conjugatelor comune la două involuţii, de E. A. DE CESARE. Originile studiului matematicilor în şcolile argentiniene, de T. M. DOVIDIO.

C. C. TEODORESCU. *Anuarul Laboratorului de Rezistenţă şi Incercări de materiale.* 1924 — 1935. Şcoala Politehnică din Timişoara. Timişoara 1935.

Culegere de Probleme de Geometrie Analitică, cu indicaţiuni şi răspunsuri pentru cl. 8-a secţia ştiinţifică şi anul preparator dela Şcoalele politehnice, militare şi Universitate, de ION DUMITRIU. Tipografia Colegiului Naţional „Carol I". Craiova. 1935.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciţii. Anul II. No. 1. — 1 Octomvrie 1935.

Idem. Anul II. No. 2. — 1 Noemvrie 1935.

Idem. Anul II. No. 3. — 1 Decemvrie 1935.

Journal de Mathématiques Elémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 60. No. 3. 1 Noemvrie 1935. Paris.

LOIS LONG. *Le livre d'algèbre du bacalauréat.* Paris. Gauthier-Villars. Editeur. Quai des Grands-Augustins, 55. Preţul 20 franci. 1935.

Aceasta este o carte cu probleme tratate şi cu exerciţii enunţate, conformă cu programele părţii I-a a bacalaureatului pentru pregătirea la diferite şcoli şi la profesorat. Ea cuprinde următoarele capitole grupate în trei cărţi:

Deslegarea unei ecuaţii de gradul II şi aplicaţiuni; teoria trinomului de gradul II şi aplicaţiuni; rezolvarea problemelor de gradul II; definiţiuni şi proprietăţi preliminare ale funcţiunilor; studiul variaţiunii funcţiunilor; progresiunile; logaritmii; dobânzi compuse. In capitole se dau definiţiuni, teoreme, metode de rezolvare şi se tratează complet mai multe chestiuni, iar la finele mai fiecăruia este o culegere de exerciţii, în număr total de 332, dintre care unele date pe la examene de bacalaureat sau pe la concursurile ţinute la diferite şcoli.

Mărturisesc că rare ori, prin cărţi de asemenea cuprins, în mărime numai de 210 pagine şi într'un domeniu elementar am găsit lucruri noui ca în această carte. Autorul dă o mare atenţiune *bunului simţ* şi *reflexiunei* în deslegarea problemelor de algebră care de regulă se tratează mecaniceşte, prin reguli fixe şi formule anumite. Iată ce spune autorul la pag. 37:

«Une question étant posée, il ne faut pas s'astreindre à vouloir, pour la résoudre, suivre aveuglement une méthode déterminée et une marche uniforme, mais s'ingénier à profiter, le cas échéant, de toute simplification pouvant de présenter dans le problème particulier que l'on envisage».

Astfel, dacă se cere a rezolva inegalitatea:

$$(3x^2+1)/(4x-1)<0,$$

cum numărătorul este esenţialmente pozitiv, trebue ca numitorul să fie negativ, deci $x<1/4$. Pentru a rezolva inegalitatea:

$$\sqrt{x-4}<2-x,$$

observăm că prima parte a ei este pozitivă, deci în a doua luăm $x<2$, dar atunci radicalul este imaginar şi deci nu avem soluţii. Neegalitatea:

$$-1<(x^2+5)/6x<1,$$

echivalează cu:

$$[(x^2+5)/6x]^2<1,$$

pe care o putem înmulţi cu $(6x)^2>0$, trecem totul în partea I şi găsim:

$$(x^2+5)^2-(6x)^2=(x^2+6x+5)(x^2-6x+5)$$
$$=(x+5)(x+1)(x-1)(x-5)<0,$$

de unde ese $-5<x<-1$ şi $1<x<5$.

La punerea problemelor în ecuaţie se fac recomandări folositoare, ca: a se profita de simetria pe care o prezintă problema; de a nu se alege necunoscutele astfel ca să se ivească ambiguităţi la alegerea soluţiunii căutate, căci algebra e generoasă, ea dă mai mult de cât i se cere, dar atunci deseori se urcă şi gradul ecuaţiei. E bine să se compare soluţia algebrică cu cea geometrică, căci se pot trage consecinţe pentru numărul soluţiunilor, posibilitatea problemei şi chiar pentru rezoluţia ei. Autorul dă exemple interesante unde, alegând necunoscute mai multe, uneori se obţine o rezolvare mai rapidă. La problemele numerice autorul recomandă să se facă o primă rezolvare care să ne dea o idee cam pe unde se găseşte soluţia definitivă, căci astfel se evită erori mari. Pentru rezolvare mai uşoară nu trebue să se neglijeze metoda schimbării variabilei.

O altă parte originală este că autorul nu spune numai ce să se facă ci şi ce să nu se facă. El a observat greşelile mai dese ce le fac elevii la examene şi la concursuri şi îi previne să nu facă anume erori. Astfel se greşeşte des de începători considerând $f(4)=f\times 4$; la trinomul $(-7x^2-3x\sqrt{3}+1)$ mulţi ia coeficientul lui x egal cu (-3) ne mai uitându-se ce vine dincolo de x Apoi nu e totdeauna avantajos, la deslegarea ecuaţiilor de gradul II, de a lua formula cu coeficientul lui x pus sub forma $2b'=b$, căci poate da loc la calcule mai lungi; se face apoi eroare de a se considera în acest caz coeficientul lui x ca fiind pereche, când el ar putea fi, de exemplu $2\sqrt{2}$.

La studiul trinomului de gradul II găsim lucruri noui. Astfel faptul că α este în afară de rădăcini se poate scrie $a \cdot f(\alpha) \cdot (b^2 - 4ac) > 0$. Dacă b şi c sunt de semne contrare ecuaţia are rădăcini reale şi pozitive dacă $a[f(2c/b)]$ e negativ. Condiţia de realitate a rădăcinilor o deduce şi scriind că semisuma rădăcinilor este cuprinsă între rădăcini. Pentru a se evita confuziuni autorul notează rădăcinile cu x' şi x'' după cum radicalul e luat cu + sau cu —. Din studiul trinomului scoate imediat unele teoreme de maximum şi de minimum.

Pe elevi trebue să-i deprindem a ceti, pe formule şi egalităţi, rezultate practice.

La studiul variaţiunilor haşurează pe o oarecare grosime regiunile unde nu sunt soluţiuni sau nu sunt acceptabile. Aceasta dă o mare claritate tablourilor de variaţiuni. Pe partea unde funcţiunea este crescătoare pune o săgeată dirijată în sus, pe celelalte în jos aşa că vârfurile săgeţilor indică clar maximele şi minimele funcţiunii. Când funcţiunea sare prin $\pm\infty$ săgeţile ies dirijate la fel.

Se vede că această carte a fost tipărită cam repede căci s'au strecurat erori cum nu se prea văd în tipăriturile editorului. Astfel la pag. 8 s'a pus *leurs sommes* în loc de *leur somme s*, iar la pag. următoare *5* în loc de *s*. La pag. 11 s'a pus $m = 1/2$ în loc de $m = 1/t$.

Din această privire sumară asupra acestei cărţi se poate vedea că ea este folositoare, nu numai pentru pregătirea candidaţilor la bacalaureat sau la anumite şcoli, dar şi pentru învăţământul în genere al algebrei elementare, şi aceasta nu numai elevilor ci şi profesorilor.

I. IONESCU.

Mathesis. Tomul XLIX No. 8. Octomvrie 1935. Gembloux. Asupra metodei lui Cauchy-Lipschitz şi derivarea integralei unei ecuaţii diferenţiale normale considerată ca funcţiune a valorilor iniţiale x_0 şi y_0, de R. H. T. GERMAY. Asupra desvoltării în fracţiune continuă a rădăcinii pătrate a unui număr întreg nepătrat perfect, de G. FISTIE. Asupra punctelor duble infinit vecine ale unei suprafeţe algebrice, de D-ra LILA GUSENHOVEN. Triunghiuri sferice particulare, de GINO LORIA. Suplimente oferite de d-l V. THÉBAULT: I) Asupra punctului lui FEUERBACH. II) Asupra geometriei triunghiului.

Numerus. Vol. I. Caietul 5. Noemvrie 1935. Bucureşti. Geométrie du r iangle par T. LALESGU.

Pitagora. Anul I. No. 1. Noemvrie 1835. Craiova. (Revistă de Matematici pentru uzul şcoalelor secundare, redactată de un grup de profesori secundari de matematici dela Colegiul Naţional „Carol I" din Craiova, sub direcţia D-lui N. BALABAN, profesor de matematici). Cuvânt înainte, de N. BALABAN. Către cetitori, *Redacţia*. Sisteme de numeraţie, de P. BOLDESCU. Sumări, de E. CRĂCIUNESCU. Polinoame omogene şi polinoame simetrice, de P. BOLDESCU. Despre diviziunea expresiilor aritmetice, de N. PAVEL. Inducţie completă, de E. CRĂCIUNESCU.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXI. No. 2—3. Iunie — Septemvrie. Iaşi 1935. Isostazia şi figura pământului, de MIHAIL P. BOTEZ. Douzeci şi cinci de ani de activitate a Seminarului Matematic din Iaşi, de ILIE I. POPA.

Idem No. 60. Noemvrie 1935.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XV. Nr. 8. — 15 Octomvrie 1935. Patruzeci de ani de activitate a *Gazetei Matematice,* de V. ALACI. Eliminarea folosită la progresiile aritmetice, geometrice şi la succesiuni mai generale, de B. I. BAIDAFF.

Idem. Anul XV. No. 9. — 15 Noemvrie 1935. Restul împărţirii numerelor întregi, de I. V. MĂTIEŞ şi EUGEN VIŞA.

The Mathematical Gazette. Vol. XIX. No. 235. Octomvrie 1935. London. Un capitol asupra limitelor, de N. M. GIBBINS. Problema lui A, B, C şi D, de Sir A. S. EDDINGTON. Asupra elipselor şi hiperbolelor geodezice, de C. E. WEATHERBURN. Metoda lui LAGRANGE a analizelor şcolare, de F. B. PIDDUCK. Factorizarea integrării largi, de C. G. PARADINE. O introducere elementară la geometria liniară, de E. H. SMART. Interpretarea timpului matematic imaginar, de G. WINDRED.

Universidad Nacional de la Plata. *Anuario* pera el Anno 1935. No. 25. La Plata 1935.

CERERI

252. Ce a devenit studentul GHEORGHE ZAMFIRESCU, care a fost student la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti la 1871, şi despre care se vorbeşte în *«Diverse»* la pag. 190 din anul acesta ?

I. IONESCU.

DIVERSE

Societatea Română de Matematici a ţinut următoarele Şedinţe :

La 21 Octomvrie au comunicat : D-l I. IONESCU despre *«Nomenclatura Geometrică»* şi D-l G. ŢIŢEICA despre *«Curbura totală a unei varietăţi pătratice»* şi despre *«Deformări de speţă superioară».*

La 11, 15 şi 18 Noemvrie, D-l WILHELM BLASCHKE, dela Facultatea de Ştiinţe din Hamburg a conferenţiat despre *«Geometria textilă* şi *Geometria integrală».*

La 22 Noemvrie, D-l M. FRÉCHET, dela Sorbona a conferenţiat despre *«Coeficientul de Corelaţie».*

Sporirea Bibliotecii

F. BUETZENBERGER. Über bizentrische Polygone. Steinershe Kreis-und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. Lipsca 1913.

Donată de I. IONESCU, Inginer.

E. JACQUIER. Application de la géométrie à la science des nombres. Paris 1888.

Donată de I. IONESCU, Inginer.

I. APRIHĂNEANU. Asupra electrificării căilor ferate. Bucureşti 1924. Publicaţia No. 2 a Societăţii anonime române *«Electrica»*.

Donată de D-l N. BOTEA.

I. APRIHĂNEANU. Problema tracţiunii electrice în reţeaua căilor noastre ferate. Bucureşti.

Donată de D-l N. BOTEA.

I. APRIHĂNEANU. Tracţiunea electrică a trenurilor.

Donată de D-l N. BOTEA.

» « »

Cărţile ce urmează au fost donate de *Institutul Naţional Român pentru studiul amenajării şi folosirii izvoarelor de energie (I. N. R.)* prin D-l C. BUŞILĂ:

1. MARCEL IVAN. Automotoare cu acumulatori electrici pe căile ferate. Bucureşti 1933.
2. ST. MATEESCU. Utilizarea energiei termice a mărilor. Bucureşti 1930.
3. ST. MICLESCU. Vagoane automotoare pe căi ferate. Bucureşti 1933.
4. ST. MIHĂESCU. Raţionalizarea combustibilului la căile ferate. Bucureşti 1933.
5. C. MIKLOSI. Aplicarea sudurii electrice la fabricarea pieselor de maşini şi la construcţiuni metalice. Bucureşti 1929.
6. C. MIKLOSI. Utilizarea raţională a combustibililor solizi. Aprecierea şi recepţionarea. Bucureşti 1933.
7. N. MOCEAROF. Tracţiunea prin locomotive cu aburi. Bucureşti 1933.
8. C. MOTAŞ. Etude sur les gissemets de gaz naturel de Transilvanie. Bucureşti 1929.
9. L. MRAZEC. Invăţământul superior. Ştiinţa. Bucureşti 1934.
10. L. MRAZEC. Quelques remarques sur une politique du combustible en Roumanie. Bucureşti 1934.
11. ISAIA NICULESCU. Chestiunea cărbunelui în Germania. Bucureşti 1933.
12. A. PAGANI. Exemples de réglage de tension par compensation dans un réseau de transport en cours de développement. Bucureşti 1933.
13. C. PARTENI ANTONI. Selecţiunea în protecţia reţelelor contra supraintensităţilor. Bucureşti 1927.
14. C. PARTENI ANTONI. Contribution à l'étude de la commutation dans les machines à courant continu. Bucureşti 1928.

15. C. PARTENI ANTONI. La protection contre les surintensités d'un réseau composé de plusieurs centrales. Bucureşti 1931.

16. C. PARTENI ANTONI. Tensiunile foarte joase. Bucureşti 1934.

17. D. A. PASTIA. Centrala hidro-electrică pe râul Siret la Cosmeşti. Bucureşti 1927.

18. D. A. PASTIA. Centrala hidro-electrică pe râul Bistriţa la Bocancea. Bucureşti 1929.

19 D. A. PASTIA. Puterea apei şi turbinele de apă moderne. I şi II Bucureşti 1931—1933.

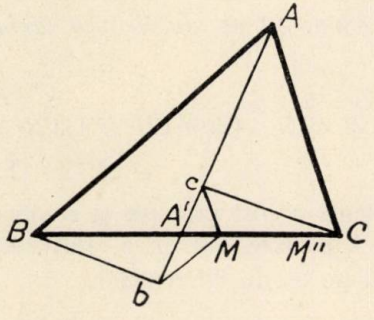
20. D. PERIEŢEANU. Intrebuinţarea păcurii drept combustibil. Bucureşti 1931.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2458. *Intr'un triunghiu* ABC *se proiectează vărfurile* B *şi* C *pe bisectoarele unghiului* A *în* b, c *şi* b', c'. *Să se demonstreze:* 1) *că paralelele duse prin* b, b' *cu latura* AC *şi prin* c, c' *cu latura* AB *se tae în punctele* M *şi* M' *pe* BC; 2) *că triunghiurile formate de picioarele acestor proiectante şi punctul comun de pe latura* BC *sunt isoscele.*

G. A. NICHIFOR.

Să considerăm cazul mai general al unei drepte oarecare AA' trecând prin A şi a două paralele oarecare B_b, C_c trecând prin B şi C. Vom arăta că paralelele din *b* şi *c* la AC şi AB se taie în M pe BC.



Fie pentru moment M şi M'' intersecţia lui BC cu cele două paralele în ipoteză că proprietatea nu este adevărată.

Triunghiurile asemenea $bA'M$, $AA'C$ de o parte şi $cA'M''$, $AA'B$ de altă parte, dau

$$\frac{A'C}{A'A} = \frac{A'M}{A'b} \text{ şi } \frac{A'c}{AA'} = \frac{A'M''}{BA'}$$

din care, prin împărţire, se deduce

$$(1) \qquad \frac{A'C}{A'c} = \frac{A'M}{A'M''} \cdot \frac{BA'}{A'b}$$

Dar din triunghiurile asemenea $A'bB$, $A'cC$ avem:

$$\frac{A'C}{A'c} = \frac{A'B}{A'b}$$

care introdus în (1) conduce la

$$A'M = A'M''$$

şi cum din construcţie rezultă că M şi M'' se găsesc pe prelungirea lui BA', urmează că M'' se confundă cu M, ceeace demonstrează proprietatea.

Când AA' este bisectoarea unghiului A, triunghiul bMc este isoscel, căci

$$\sphericalangle cbM = \sphericalangle A'AC = \sphericalangle A'AB = \sphericalangle bcM.$$

D-l M. L. A. NEGREA (Brăila) a dat o soluţie analoagă înlocuind bisectoarele cu două drepte prependiculare.

PROBLEMA 3368. *Să se stabilească identitatea*.

$$\sum_{i=0}^{i=p} (-1)^{p+i} \frac{C_{2p}^{2p} C_{2p}^{p-i}}{4p+2i+1} = \frac{2^{2p}(4p)!}{(2p)!(2p+1)(2p+3)\ldots(6p+1)}.$$

T. POPOVICIU.

Această problemă a fost propusă şi rezolvată şi în *„Jurnal Matematic"*, (Vol. I, p. 108, Vol. II, p. 135). Voiu da aci o altă demonstraţie bazată pe teoria diferenţelor.

Fie

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}.$$

Membrul întâi al identității propuse se poate scrie

$$(1)\quad \sum_{i=0}^{i=p}(-1)^{p+i}\frac{C_{2(p+i)}^{2p}\,C_{2p}^{p-i}}{4p+2i+1}=\sum_{i=0}^{i=2p}(-1)^{i}\frac{\binom{2i}{2p}\binom{2p}{i}}{2i+2p+1}$$

căci

$$\binom{2i}{2p}=0,\quad i<p.$$

Fie acum

$$f(x)=\frac{\binom{2x}{2p}}{2x+2p+1}$$

şi să punem

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$$

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)$$

. . . . . .

$$\Delta^k f(x)=\Delta^{k-1} f(x+1)-\Delta^{k-1} f(x)$$

. . . . . .

$f(x)$ este *diferența de ordinul k a lui* $f(x)$.

Membrul al doilea al expresiei (1) este egal cu $\Delta^{2p} f(0)$.

Avem

$$f(x)=\frac{\binom{-2p-1}{2p}}{2x+2p+1}+\text{polinom de gradul } 2p-1.$$

Se ştie însă că diferența de ordinul k a unui polinom de grad $<k$ este identic nulă. Găsim astfel că

$$\Delta^{2p} f(x)=\binom{-2p-1}{2p}\Delta^{2p}\left(\frac{1}{2x+2p+1}\right).$$

Insă un calcul din aproape în aproape ne arată că

$$\Delta^k\left(\frac{1}{2x+2p+1}\right)=\frac{(-1)^k\,2^k\,k!}{(2x+2p+1)(2x+2p+3)\ldots(2x+2p+2k+1)}.$$

Pe de altă parte

$$\binom{-2p-1}{2p} = \frac{(2p+1)\,(2p+2)\ldots(4p)}{(2p)\,!} = \frac{(4p)\,!}{(2p)\,!\,(2p)\,!}\,.$$

Deducem prin urmare că

$$\Delta^{2p} f\,(0) = \frac{2^{2p}\,(4p)\,!}{(2p)\,!\,(2p+1)\,(2p+3)\ldots(6p+1)}$$

care este tocmai identitatea cerută.

TIBERIU POPOVICIU.

PROBLEMA 3958. *Pe latura* BC *a unui triunghiu* ABC, *se ia punctul* P *care împarte pe* BC *în segmentele* PB *şi* PC *al căror raport este egal cu puterea* m *a raportului* b/c *al laturilor* AC *şi* AB. *Fie* N *intersecţia lui* AP *cu cercul* ABC *iar* D *şi* D' *intersecţiile acestui cerc cu diametrul perpendicular pe* BC. *Dacă* M *şi* M' *sunt intersecţiile lui* BC *respectiv cu* ND *şi* ND', *să se demonstreze că aceste puncte,* M *şi* M', *împart latura* BC *în segmente al căror raport este egal cu puterea* $m+1$ *a raportului* b/c. *Să se demonstreze apoi că puterea lui* A *faţă de cercul* MNM' *este dată de raportul*

$$\frac{b^{2(m+2)} - c^{2(m+2)}}{b^{2(m+1)} - c^{2(m+1)}}\,.$$

In cazul când, $(b/c)^m$ *este egal cu unitatea,* H *este ortocentrul lui* ABC, *iar* O' *simetricul lui* O *faţă de* BC, *atunci dreapta* HO' *este tangentă cercului* MNM', *punctul de tangenţă* T *fiind chiar intersecţia acestui cerc cu* AN. *Să se deducă locul lui* T *când unghiul* A *rămâne constant, iar vârfurile* B *şi* C *fixe.*

G-L GH. BUICLIU.

1. D' fiind mijlocul arcului BD'C în cercul O urmează că NMD' este bisectoarea unghiului BNC şi cum DN $\perp$ ND' rezultă că NM' este bisectoarea exterioară a aceluiaşi unghiu.

Deci

$$(1) \qquad \frac{MB}{MC} = \frac{M'B}{M'C} = \frac{NB}{NC}\,.$$

Triunghiurile asemenea BNP, CPA de o parte şi NPC, BPA de altă parte dau însă

$$\frac{NB}{b} = \frac{BP}{AP} \quad \text{şi} \quad \frac{NC}{c} = \frac{PC}{AP}$$

pe care împărţindu-le găsim:

$$\frac{NB}{NC} \cdot \frac{c}{b} = \frac{PB}{PC} = \left(\frac{b}{c}\right)^m$$

şi ţinând seamă de (1)

$$\frac{MB}{MC} = \frac{M'B}{M'C} = \left(\frac{b}{c}\right)^{m+1}$$

care demonstrează prima parte a problemei.

2. Puterea r^2 a lui A faţă de cercul MNM' este dată de

$$r^2 = A\bar{\omega}^2 - \overline{\omega M}^2$$

în care ω este mijlocul lui MM' sau centrul cercului MNM'. Din modul cum sunt construite punctele M şi M' rezultă

$$\frac{MB}{b^{m+1}} = \frac{MC}{c^{m+1}} = \frac{a}{c^{m+1} + b^{m+1}}$$

$$\frac{M'B}{b^{m+1}} = \frac{M'C}{c^{m+1}} = \frac{a}{c^{m+1} - b^{m+1}}$$

de unde se scoate

$$(2) \quad \begin{cases} MB = \dfrac{ab^{m+1}}{c^{m+1} + b^{m+1}}, & MC = \dfrac{ac^{m+1}}{c^{m+1} + b^{m+1}} \\ M'B = \dfrac{ab^{m+1}}{c^{m+1} - b^{m+1}}, & M'C = \dfrac{ac^{m+1}}{c^{m+1} - b^{m+1}}. \end{cases}$$

Apoi urmărind figura, se vede că

$$\frac{\omega B}{\omega C} = \frac{\omega M - MB}{\omega M + MC} = \frac{MM' - 2\,MB}{MM' + 2\,MC} = \frac{M'B - MB}{M'C + MC}$$

şi ţinând seamă de (2)

$$\frac{\omega B}{\omega C} = \frac{b^{2(m+1)}}{c^{2(m+1)}}$$

de unde, în virtutea proprietăţilor rapoartelor egale,

$$\frac{\omega B}{b^{2(m+1)}} = \frac{\omega C}{c^{2(m+1)}} = \frac{a}{c^{2(m+1)} - b^{2(m+1)}} = \frac{\sqrt{\omega B \times \omega C}}{b^{m+1} \cdot c^{m+1}}$$

şi fiindcă diviziunea M', B, M, C este armonică

$$\overline{\omega M}^2 = \omega B \times \omega C$$

aşa că rapoartele precedente dau

$$(3) \qquad \overline{\omega M} = \frac{a b^{m+1} c^{m+1}}{c^{2(m+1)} - b^{2(m+1)}} .$$

Teorema lui STEWART, aplicată punctelor A, B, M, C dă

$$BC \cdot \overline{AM}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{AC}^2 + MC \cdot \overline{AB}^2 - MB \cdot MC \cdot BC$$

care, ţinând seamă de (2), dă după efectuarea tuturor calculelor:

$$(4) \qquad \overline{AM}^2 = \frac{c^{m+3} + b^{m+3}}{c^{m+1} + b^{m+1}} - \frac{a^2 b^{m+1} c^{m+1}}{(c^{m+1} + b^{m+1})^2} .$$

Se găseşte la fel

$$(5) \qquad \overline{AM'}^2 = \frac{c^{m+3} - b^{m+3}}{c^{m+1} - b^{m+1}} + \frac{a^2 b^{m+1} c^{m+1}}{(c^{m+1} - b^{m+1})^2} .$$

In triunghiul AMM' în care Aω este mediană avem

$$2(\overline{A\omega}^2 + \overline{\omega M}) = \overline{AM}^2 + \overline{AM'}^2$$

sau ţinând seamă de (4) şi (5)

$$(6) \qquad 2(\overline{A\omega}^2 + \overline{\omega M}^2) = \frac{c^{m+3} + b^{m+3}}{c^{m+1} + b^{m+1}} + \frac{c^{m+3} - b^{m+3}}{c^{m+1} + b^{m+1}} + \frac{4a^2 b^{2m+2} c^{2m+2}}{(c^{2m+2} - b^{2m+2})^2} .$$

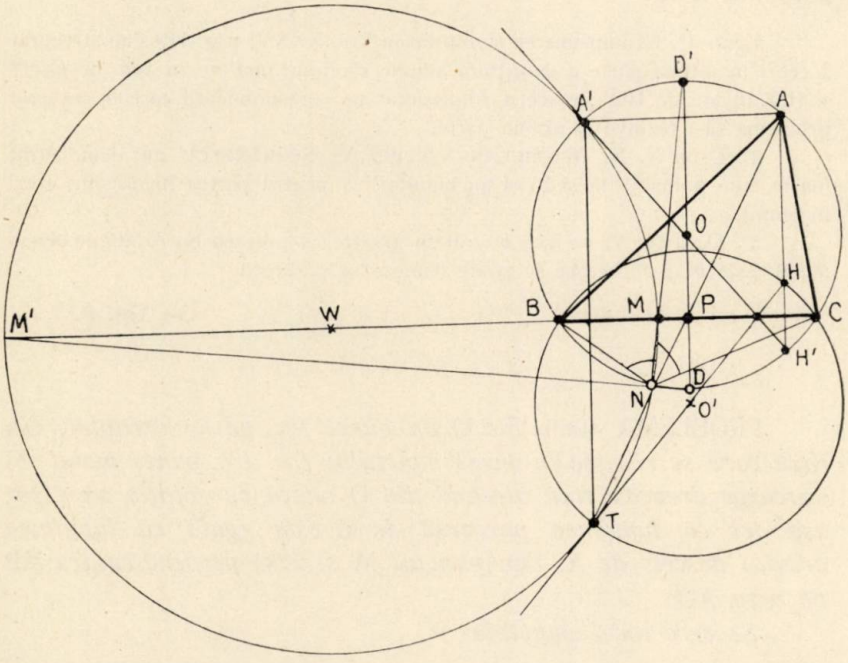
Dacă se înmulţeşte (3) cu 2, se ridică la pătrat şi se scade din (6) se obţine tocmai puterea lui A faţă de cercul MNM′:

$$(7) \qquad \overline{A\omega}^2 - \overline{\omega M}^2 = r^2 = \frac{c^{2(m+2)} - b^{2(m+2)}}{c^{2(m+1)} - b^{2(m+1)}}$$

care e relaţia din enunţ pentru cazul $c > b$.

3. Când $(b/c)^m$ este egal cu 1 , P este la mijlocul lui BC şi

$$\frac{NB}{NC} = \frac{b}{c} .$$



Punctul N aparţine cercului ω , loc al punctelor ale căror distanţe B şi C sunt în raportul b/c. Acest cerc trece evident prin A′, intersecţia lui O cu paralela din A la BC, căci

$$A'B = b \quad , \quad A'C = c .$$

De asemeni cercul ω trece prin simetricul T al lui A faţă de BC, simetric care se găseşte în simetricul lui A faţă de P. Punctele M′, B, M, C formând o diviziune armonică avem

$$\overline{\omega M}^2 = \omega B \times \omega C$$

care arată că puterea lui ω față de cercul ABC este pătratul razei cercului ω. Deci ω și O sunt ortogonale și atunci OA' este tangentă în A' la ω. Cum unghiul A'AH este drept prin construcție rezultă că A'O trece prin H', care este simetricul lui H față de BC. Dar atunci, simetrica lui OH' față de BC, care trece evident prin O' este tangentă la ω și fiindcă PO' || AH și egal cu $\frac{1}{2}$ AH rezultă că HO' se întâlnește cu AP în T ceeace demonstrează punctul 3) al problemei.

4. Când $\hat{A}$ e constant și BC fix, H descrie cercul O' deci și T, simetricul lui H față de O' descrie același, cerc O' și anume porțiunea BTC.

Notă. 1°. La imprimarea enunțului în Vol. XXXVI pag. 119 s'au strecurat 2 erori în ultima parte a enunțului anume s'a imprimat m în loc de $(b/c)^m$ și HD' în loc de HO' ceeace a împiedecat pe corespondenții cari au încercat problema să-i rezolve și ultima parte.

2°. D-nii N. N. MIHĂILEANU și FL. V. ȘERBĂNESCU au demonstrat foarte bine punctele 1) și 2) și au anunțat că pentru partea finală sunt erori în enunț.

3°. Dacă în (7) se face $m = 0$ se găsește că puterea lui A față de cercul MNM' este $b^2 + c^2$, ceeace se poate demonstra și direct.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4066. *Fie* O *un punct fix pe o dreaptă;* OA *raza care se rotește în jurul punctului fix. Un punct mobil* M *parcurge dreapta fixă plecând din* O *odată cu rotația axei* OA, *așa fel că lungimea parcursă de* M *este egală cu lungimea arcului descris de* A. *Din punctul* M *se lasă perpendiculara* MP *pe raza* AO.

Se cere locul punctului P.

D. ARG. DUMITRESCU.

Redactarea problemei după soluția D-rei PREDUȚA D. BUNGEȚEANU.

Luând raza cercului ca unitate și notând cu A_0 poziția lui A pe Ox avem:

$$\text{arc } A_0A = \theta$$

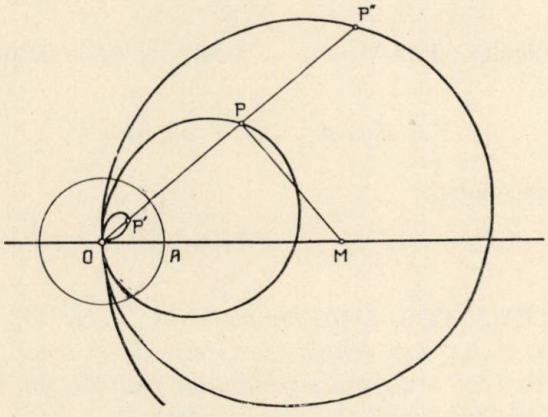
deci

$$OP = \rho = OM \times \cos\widehat{A_0OA} = \theta\cos\theta$$

ecuația polară a curbei este:

$$\rho = \theta \cos\theta.$$

Observare. Dând lui θ valori dela 0 la ∞ obținem curba formată dintr'o infinitate de bucle. O primă buclă caracteristică este dată de $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, iar celelalte de $\frac{2k-1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{2k+1}{2}$; pentru fiecare valoare extremă curba trece prin origină, care este un punct multiplu. Prima buclă e cu totul particulară; este situată în întregime în primul cadran și trece prin origina pentru $\theta = 0$ și $\theta = \frac{\pi}{2}$. Toate celelalte bucle sunt din ce în ce mai mari și trec mereu prin origină.



Punctele de intersecție ale curbei cu dreapta $\theta = \alpha$, fiind:

$$\alpha \cos\alpha \ , \ (\alpha + \pi)\cos\alpha \ , \ldots \ (\alpha + k\pi)\cos\alpha , \ldots$$

se observă că ele formează o progresie aritmetică cu rația $\pi \cos\alpha$. Prin urmare, ca și la spirala lui ARCHIMEDE, punctele de intersecție ale curbei, exceptând origina, cu o rază vectoare oarecare sunt echidistante, și aici mai observăm că și distanțele dintre punctele de intersecții ale curbei cu două raze vectoare simetrice față de Ox sunt egale.

Expresiile maxime ale lui ρ sunt rădăcinile ecuației $\theta = \text{cotg}\theta$, ce se obțin intersectând curba reprezentativă a cotangentei cu prima

bisectoare. (COMBEROUSSE: Algebră superioară, II pag. 875). Se vede uşor că aceste rădăcini sunt de forma $k\pi + \varepsilon$ şi că ε tinde către zero când k tinde către infinit, prin urmare aceste raze vectoare maxime se apropie din ce în ce mai mult de axa Ox.

Au găsit numai ecuaţia curbei Domnii: C. IVĂNESCU, M. MĂNESCU, M. MARGULIUS, N. N. MIHĂILEANU, P. VARLAM, V. I. C. VISSARION, S-LT. I. C. SAVIN.

Domnii N. N. ALDEA şi H. P. IONESCU-BISS au considerat cazul general când $r = f(\theta)$; atunci:

$$\operatorname{arc} A_0 A = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$$

$$\therefore \quad OP = \rho = \cos\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\theta \cdot$$

In particular, dacă $r = a = \text{const}$, iar $\theta_0 = 0$, atunci $r' = 0$ şi avem:

$$\rho = a \cos\theta \int_0^{\theta} d\theta = a\theta \cos\theta$$

tocmai ecuaţia curbei.

D. A. D.

PROBLEMA 4330. *Dintr'un punct al sferei* O_1 *se descrie sfera* O_2. *Sfera* O_3 *are centrul pe sfera* O_2 *şi trece prin centrul sferei* O_1. *Se cere învelitoarea planului radical al sferelor* O_1 *şi* O_3 *când centrul sferei* O_1 *descrie sfera* O_2.

ION S. ANTONIU.

Să presupunem în O_2 un triedru dreptunghic $O_2x_2y_2z_2$, având planele paralele cu ale triedrului O_1xyz şi fie θ unghiul făcut de O_2O_3 cu $O_2z_2 \parallel O_1z$ şi φ unghiul făcut de proiecţiunea lui O_2O_3 pe planul $x_2O_2y_2$ cu $O_2x_2 \parallel O_1x$.

Vom avea

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 = r^2$$

ecuaţia sferei O_1;

$$(a + R\sin\theta\cos\varphi)\ ,\ (b + R\sin\theta\sin\varphi)\ ,\ (c + R\cos\theta)$$

coordonatele centrului sferei O_3;

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x(a + R\sin\theta\cos\varphi) - 2y(b + R\sin\theta\sin\varphi) - 2z(c + R\cos\theta) = 0$$

ecuațiunea sferei O_3.

Ecuația planului radical P al sferelor (O_1) și (O_3) este

$$P \equiv 2x(a + R\sin\theta\cos\varphi) + 2y(b + R\sin\theta\sin\varphi) + 2z(c + R\cos\theta) = r^2. \quad (1)$$

Invelitoarea acestui plan, care depinde de parametrii θ și φ se obține eliminând acești parametri între ecuațiunea (1) și ecuațiunile

$$P'_\theta = 0 \; ; \; P'_\varphi = 0$$

sau

$$P'_\theta = x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi = z\sin\theta \quad (2)$$

$$P'_\varphi = y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0. \quad (3)$$

Din (2) și (3) scoatem

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases} \text{ de unde } \begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \text{ și } \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

Ecuațiunea înfășurătorii va fi deci:

$$2(xa + yb + zc) + 2R\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r^2$$

adică cuadrica

$$4(R^2 - a^2)x^2 + 4(R^2 - b^2)y^2 + 4(R^2 - c^2)z^2 - 8abxy + 8bcyz - 8cazx + 4ar^2x + 4br^2y + 4cr^2z - r^4 = 0 \quad . \quad (4)$$

Discuţie.

Discriminantul Δ al formei patratice (4) este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4(R^2 - a^2) & -4ab & -4ca & 2ar^2 \\ -4ab & 4(R^2 - b^2) & -4bc & 2br^2 \\ -4ca & -4bc & 4(R^2 - c^2) & 2cr^2 \\ 2ar^2 & 2br^2 & 2cr^2 & -r^4 \end{vmatrix}$$

$$= 64r^4 \begin{vmatrix} R^2 - a^2 & -ab & -ca & a \\ -ab & R^2 - b^2 & -bc & b \\ -ca & -bc & R^2 - c^2 & c \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix} = -64r^4 R^4 \neq 0.$$

Formăm apoi:

$$\delta = \begin{vmatrix} 4(R^2 - a^2) & -4ab & -4ca \\ -4ab & 4(R^2 - b^2) & -4bc \\ -4ca & -4bc & 4(R^2 - c^2) \end{vmatrix} = 64R^4(R^2 - r^2).$$

Ecuaţiunea în S este:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} 4(R^2 - a^2) - S & -4ab & -4ca \\ -4ab & 4(R^2 - b^2) - S & -4bc \\ -4ca & -4ac & 4(R^2 - c^2) - S \end{vmatrix} = 0$$

sau desvoltând:

$$S^3 - 4(3R^2 - r^2)S^2 + 16R^2(3R^2 - 2r^2)S - 64R^4(R^2 - r^2) = 0. \quad (5)$$

Conica are centru unic atunci când $\delta \neq 0$ adică $R \neq r$.

Ecuaţiunea (5) ştim că are toate rădăcinile reale şi deci numărul rădăcinilor ei pozitive este egal cu numărul variaţiunilor expresiunei (5). Dacă notăm cu S_1, S_2 şi S_3 rădăcinile ecuaţiunei (5) ecuaţiunea redusă a cuadricei, în acest caz, este

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + S_3Z^2 - \frac{R^2r^4}{R^2 - r^2} = 0$$

coordonatele centrului ω a cuadricei este

$$\left[\frac{-ar^2}{2(R^2 - r^2)}\right], \left[\frac{-br^2}{2(R^2 - r^2)}\right], \left[\frac{-cr^2}{2(R^2 - r^2)}\right].$$

In cazul $R = r$ ($\delta = 0$) ecuaţia în S devine

$$S(S - 4r^2)^2 = 0$$

şi cuadrica este de gen paraboloid.

Tabloul rezumativ al ecuaţiunei este:

R	Semnele coeficienţilor ecuaţiunei în S	Semnele rădăcinilor ecuaţiei în S	Semnele coeficienţilor ecuaţiei reduse	Natura cuadricei
0	+ + − +	+ + −	+ + − +	Hiperboloid cu 2 pânze
$\frac{r}{\sqrt{3}}$	+ − − +	+ + −	+ + − +	
$r\sqrt{\frac{2}{3}}$	+ − + +	+ + −	+ + − +	
r				paraboloid
$+\infty$	+ − + −	+ + +	+ + + −	Elipsoid real

NEGREA A. MIRCEA-LEONTE
(Brăila).

Observaţiuni. 1. Problema a mai fost rezolvată şi de Domnii: S.-LT. CONST. N. AVRAM (Versailles) şi VLADIMIR S. SÂRBU (Cluj).

2. Domnul S.-LT. C. N. AVRAM rezolvă problema observând că învelitoarea este o suprafaţă de revoluţie şi tratând-o în plan.

3. Domnul VLADIMIR SÂRBU, rezolvă ecuaţia în S şi scrie ecuaţia explicită a cuadricelor

$$-4R^2(X^2 + Y^2) + 4(R^2 - r^2)Z^2 = \frac{R^2 r^4}{R^2 - r^2}$$

pentru cuadricele cu centru şi:

$$X^2 + Y^2 = -RZ$$

pentru paraboloid.

Din aceste ecuaţii se vede că înfăşurătoarea este o suprafaţă de revoluţie in jurul axei $O_1 z$.

D-sa a făcut o amplă discuţiune a ecuaţiunilor, pe care nu o mai reproducem, ea găsindu-se în toate tratatele de geometrie analitică.

I. S. A.

PROBLEMA 4419. *Se proiectează vârfurile triunghiului* ABC *la punctele* a, b, c, *pe dreapta* Δ *din planul său.*

Paralelele duse din b *şi* c *respectiv la* AB *şi* AC *se întâlnesc în* A′, *paralelele duse prin* c, a *respectiv la* BC, BA *se întâlnesc în* B′, *iar paralelele duse prin* a, b *respectiv la* CA, CB *se întâlnesc în* C′.

Să se arate că punctele A′, B′, C′, *se găsesc pe o dreaptă* Δ′ *perpendiculară pe* Δ. N. BOTEA.

Soluţia I. Să considerăm punctele

$$M \equiv (A'c\ ,\ bC')\ ,\ N \equiv (A'b\ ,\ cB').$$

Din egalităţile:

$$\frac{B'N}{B'c} = \frac{ab}{ac}\ ,\ \frac{C'b}{C'M} = \frac{ab}{ac}$$

deducem:

$$\frac{B'N}{B'c} = \frac{C'b}{C'M}$$

relaţie care arată că punctele A′, B′, C′, sunt în linie dreaptă.

Dacă deplasăm dreapta Δ printr'o mişcare de translaţie, punctele A′, B′, C′ descriu dreptele Δ_a , Δ_b , Δ_c perpendiculare pe Δ. Să arătăm că aceste drepte coincid. Dreapta Δ_b taie latura BC într'un punct D_1 , ce se obţine, construind punctul B′, corespunzător dreptei Δ ce trece prin C, iar dreapta Δ_c taie latura BC într'un punct D_2 , pe care-l găsim, construind punctul C′, referitor la dreaptă Δ, ce trece prin B. Pe figură se arată cu uşurinţă că punctele D_1 şi D_2 coincid. Deci dreptele Δ_b şi Δ_c coincid şi se confundă cu Δ′.

Soluţia II. Vom considera dreapta Δ trecând prin vârful A şi vom demonstra că dreapta B′C′ este perpendiculară pe Δ (Proprietatea se va păstra dacă vom da o translaţie dreptei Δ). Punctele B′, C′ se găsesc respectiv pe laturile AB , AC. Fie E şi F respectiv punctele în care dreapta AB întâlneşte dreptele Cc şi bC′. Triunghiurile ABC, AFC′ au toate laturile paralele. Ele sunt asemenea şi două linii omoloage ale lor sunt paralele. Dreptele CE şi C′B′ sunt paralele, dacă sunt drepte omoloage în cele două triunghiuri, deoarece trec prin vârfurile corespunzătoare C şi C′. Trebue dovedit că:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{B'A}{B'F}\ .$$

Această relație este o consecință a relațiilor:

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{cA}}{\overline{cb}} \quad , \quad \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'F}} \frac{\overline{cA}}{\overline{cb}} .$$

Soluția III dată de D-nii: VINTILĂ GRIGORESCU, M. NĂSTASE, M. POSTELNICESCU și I. I. ȚIȚEICA (elevi lic. militar «Mânăstirea Dealu» Târgoviște).

Fie ω ortopolul dreptei Δ în raport cu triunghiul ABC. Din construcția ortopolului rezultă:

$$b\omega \perp A'c \ , \ c\omega \perp A'b$$

și ω este ortocentrul triunghiului $A'bc$. Deci $A'\omega$ este perpendiculară de Δ fiind înălțimea triunghiului $A'bc$. Analog se arată că perpendiculara coborîtă din ω pe Δ trece prin B' și C'.

Generalizare. Să considerăm în același plan un triunghiu ABC și o dreaptă Δ, pe care să luăm trei puncte a, b, c, oarecare.

Făcând construcțiile indicate de enunț obținem trei puncte A', B', C' în linie dreaptă.

In adevăr dacă $A\infty$, $B\infty$, $C\infty$ sunt punctele în care dreapta dela infinit întâlnește laturile triunghiului ABC, enunțul problemei ne conduce la construcția punctelor

$$A' \equiv (bC\infty \ , \ cB\infty) \ , \ B' \equiv (cA\infty \ , \ aC\infty) \ , \ C' \equiv (aB\infty \ , \ bA\infty)$$

care se află în linie dreaptă după o proprietate a lui PAPPUS. (*Cul. de prob. de Geometrie XII, 49).*

Observațiuni. 1°. D-l G. MIHĂILESCU (cl. VI lic. „N. Filipescu" Târgoviște) a demonstrat colinearitatea punctelor A', B', C' cu ajutorul teoriei transversalelor.

2°. D-nii A. DOBRESCU (Prof. R. Sărat) și M. MARGULIUS (București) au dat soluțiuni trigonometrice, arătând că punctele A', B', C' se proiectează într'un același punct pe Δ. Au arătat apoi că dacă proiecțiunile se fac de un unghiu oarecare, dreapta Δ' este paralelă cu direcția de proiecțiune. Aceasta rezultă și din soluția II de mai sus.

3°. Mai general dacă în locul punctelor a, b, c avem pe Δ trei puncte α, β, γ astfel ca:

$$\frac{\overline{bc}}{\overline{\beta\gamma}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{\gamma\alpha}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{\alpha\beta}}$$

proprietatea se menține.

4°. D-nii S-LT AUREL BĂDESCU (Fontainbleau), IANCU SAGER și un anonim au dat soluții bune analitice.

N. B.

PROBLEMA 4462. *Să se arate că:*

$$(1) \qquad \sum_{k=o}^{k=m} A_n^k A_{n-k}^{m-k} C_{n-k-1}^{m-k} = A_n^m C_n^m,$$

$$(2) \qquad \sum_{k=o}^{k=m} (k+1) A_n^k A_{n-k}^{m-k} C_{n-k-1}^{m-k} = A_{n+1}^m C_n^m,$$

unde A_n^p este simbolul aranjărilor, iar C_n^p al combinărilor.

N. C.

Soluție dată de D-ra MARGARETA CARACUDOVICI și D-nii : M. F. AMĂRĂȘTEANU, S-LT A. EM. BĂDESCU, C. I. CHIRIAC, V. GRIGORESCU A. HILF, M. MĂNAC, I. N. SAGER și AL. D. STOICA.

Cum

$$(3) \qquad A_n^k A_{n-k}^{m-k} = A_n^m,$$

prima relație devine

$$\sum_{k=0}^{k=m} A_n^k A_{n-k}^{m-k} C_{n-k-1}^{m-k} = A_n^m \sum_{k=0}^{k=m} C_{n-k-1}^{m-k},$$

care se reduce la partea a doua, în baza relației cunoscute

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{k=m} C_{n-k}^{m-k} = C_{n+1}^m.$$

Tot cu ajutorul lui (3) relația a doua devine

$$\sum_{k=0}^{k=m} (k+1) A_n^k A_{n-k}^{m-k} C_{n-k-1}^{m-k} = A_n^m \sum_{k=0}^{k=m} (k+1) C_{n-k-1}^{m-k},$$

care se mai poate scrie sub forma

$$A_n^m \left(\sum_{k=0}^{k=m} C_{n-k-1}^{m-k} + \sum_{k=0}^{k=m-1} C_{n-k-2}^{m-k-1} + \ldots + \sum_{k=0}^{k=0} C_{n-k-m-1}^{0} \right),$$

și cu ajutorul lui (4)

$$A_n^m (C_n^m + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{n-m}^0) = A_n^m C_{n+1}^m,$$

adică tocmai partea a doua.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4510. *Se dau în plan un punct* P *şi o conică* (C) *şi se cere să se determine o curbă* Γ *astfel ca polara unui punct* M *de pe* (Γ), *faţă de* (C) *să fie perpendiculara în* P *şi pe* MP.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-l SERGIU TARASIUC.

Polara lui M faţă de (C) trecând necontenit prin P înseamnă că M descrie dreapta Δ care este polara lui P faţă de (C).

Fie M′ intersecţia lui Δ cu polara lui M faţă de (C) şi A, B intersecţiile lui Δ cu (C). Fascicolul P (MAM′B) este, prin construcţie, armonic; deci pentru ca unghiul MPM′ să fie drept, trebue ca MP şi M′P să fie bisectoarele unghiului APB.

De aci rezultă că curba (Γ) se reduce la două puncte M, M′ a căror construcţie rezultă imediat din cele spuse până aci.

Când (C) este un cerc, unul din punctele M este aruncat la infinit, căci în acest caz Δ ⊥ PM′. Dacă P este în centrul cercului, polara lui este o dreaptă dela infinit, polara oricărui punct dela infinit trece prin P şi e perpendiculară pe MP. Deci când P este în centrul cercului, punctele M sunt punctele dreptei dela infinit.

Notă. Soluţia pe cale analitică conduce la rezolvarea unui sistem de gradul II a cărui discuţie este un interesant exerciţiu de algebră. Fie (a, b), (α, β), coordonatele punctelor P şi M faţă de un sistem de axe care trec prin vârful conicei (e), una din axe fiind chiar tangenta la conică, a cărei ecuaţie va fi deci

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Se scrie ecuaţia clasică a polarei lui M faţă de (C) şi apoi se exprimă cele două condiţiuni ale enunţului. Rezultatul este următorul sistem de ecuaţii

$$(aq + p)\ \alpha - b\beta + ap = 0$$

$$(\alpha q + p)(\beta - b) + \beta(\alpha - a) = 0$$

în care necunoscutele sunt α şi β.

Am primit o soluţie analitică dela un harnic corespondent, al cărui nume a fost citat pe coperta unui număr anterior, dar pe care nu-l citãm aici pentru că prin un viciu de raţionament şi de calcul că M descrie o conică de ecuaţie.

$$qx^2 + y^2 + (p - aq)\,x - bq - ap = 0.$$

G-L GH. B.

PROBLEMA 4523. *Se scriu două numere de două cifre unul după altul. Putem forma astfel două numere de patru cifre. Poate fi unul din acestea multiplu al celuilalt?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-l AL. D. STOICA (Liceul Marele Voevod Mihai, Bucureşti).

Fie ab şi cd două numere de câte două cifre fiecare. Se întreabă dacă putem avea:

$$(1)\ 1000a + 100b + 10c + d = n(1000c + 100d + 10a + b),$$

n fiind întreg. Relaţia se poate scrie:

$$(2)\quad (100 - n)(10a + b) = (100n - 1)(10c + d).$$

Numărul n nu poate trece peste 9. Deci avem:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$100 - n$	99	98	97	96	95	94	93	92	91
$100n - 1$	99	199	299	399	499	599	699	799	899

.

Observăm că pentru $n = 2, 3, 5, 6, 8, 9$ valorile lui $(100 - n)$ şi $(100n - 1)$ sunt prime între ele. Deci $(100n - 1)$ trebue să dividă pe $(10a + b)$, ceeace nu se poate căci primul are trei cifre şi al doilea două. Pentru $n = 4$ şi $n = 7$ egalitatea (2) devine:

$$32(10a + b) = 133(10c + d) \quad \text{şi} \quad 31(10a + b) = 233(10c + d).$$

Prima cere ca $(10a + b)$ să se devidă cu 133 şi a doua cu 233, ceeace nu se poate căci $(10a + b)$ are numai două cifre.

Pentru $n = 1$ egalitatea devine $(10a + b) = (10c + d)$. Cele două numere sunt identice şi avem soluţia formală $abab = 1 \times abab$.

Au rezolvat problema şi D-nii: P. MAZILU, D. MAVRODIN şi E. GRUBOWSCHI.

PROBLEMA 4536. *Fracţia* a/b/c *poate avea două interpretări. In ce caz cele două valori pot fi egale?*

I. IONESCU.

Soluţie dată de D-rele: FILOFTEIA N. ANTONESCU, CONSTANŢA N. CONSTANTIN şi ILEANA S. MUSCELEANU (Liceul de fete, Caracal), şi D-nii: P. MAZILU (Şcoala Politehnică, Bucureşti), V. CEAUŞESCU (Liceul Militar, Târgu Mureş), P. DOBRESCU, V. FLORESCU şi N. D. ŞTEFĂNESCU (Liceul militar Mânăstirea Dealului), M. F. AMĂRĂŞTEANU şi D. CERCELARU (Craiova), I. I. BUZINCU (Iaşi), E. G. BEIU-PALADI (Liceul Mihai Viteazu, Bucureşti), R. V. APOSTOL (Buzău), P. P. COJOCARU (Piatra Neamţ), E. F. GRABOWSCHI (Orheiu).

Interpretările sunt:

$$(a/b)/c = a/bc \quad \text{şi} \quad a/(b/c) = ac/b.$$

Condiţia căutată este:

$$a/bc = ac/b.$$

Ea este îndeplinită pentru $a = 0$, când valoarea comună este 0. Altfel şi dacă b nu e nici nul, nici infinit, cum se consideră în aritmetică, condiţia se reduce la $c = (1/c)$ sau $c^2 = 1$, adică $c = 1$.

In caz de valori algebrice mai putem lua $b = 0$, $b = \infty$ şi $c = -1$.

EXERCIŢII

6. Se consideră cercurile descrise din vârfurile triunghiului ABC ca centre şi tangente între ele. Triunghiul pe care îl formează tangentele lor comune exterioare, considerate oricum, este omologic cu ABC, axa de omologie fiind polara triliniară a centrului cercului înscris I.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Cercurile considerate se ating pe laturi în punctele lor de contact cu cercul înscris: fie A', B', C' aceste contacte.

A' este centrul interior de similitudine al cercurilor (B) şi (C). Fie A_1 intersecţia tangentelor comune exterioare pe linia centrelor BC şi B_1, C_1 puncte analoage. A_1 este centrul extern de similitudine al acestor cercuri, deci A_1, B_1, C_1 sunt coliniare şi analog A_1, B', C', etc. [teorema d'ALEMBERT].

7. Să se arate că dacă avem:

$$(ax + by)\,xy + c = 0$$

avem şi:

$$\left(\frac{ax}{by}\right)^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\,\frac{bc}{a^2x^3}}}{-1 \pm \sqrt{1 - 4\,\frac{ac}{b^2y^2}}}$$

semnele corespunzându-se. I. L.

R. Se rezolvă mai întâiu x din ecuaţia primă, apoi y, se grupează factorul xy în fiecare şi se obţine, după transformări algebrice, a doua relaţie.

PROBLEME PROPUSE

4586 [1]). Între unghiurile unui triunghiu, avem relaţiile:

$$(1 - 8\cos A\cos B\cos C)^2 = \{8\cos B\cos C - \cos(B - C).[1 - 2\cos 2A]\}^2 + \{\sin(B - C).[1 + 2\cos 2A]\}^2.$$

$$(1 + 8\cos A\sin B\sin C)^2 = \{8\sin B\sin C - \cos(B - C).[1 - 2\cos 2A]\}^2 + \{\sin(B - C).[1 + 2\cos 2A]\}^2.$$

N. N. MIHĂILEANU.

4587 [2]). Există triunghiuri ABC între ale căror unghiuri să existe ecuaţia

$$x^3 + x^2\sin A + x\,\mathrm{tg}B + \sec C = 0,$$

având ca rădăcini pe

$$\cos A,\ \mathrm{cotg}B,\ \mathrm{cosec}C.$$

GH. VASILIU.

4603. Să se determine precis intersecţia a două cercuri egale ale căror centre sunt foarte apropiate unul de altul.

I. IONESCU.

4604. Ştiind că $a\ b\ c$ sunt cifre de parităţi consecutive, se cere să se arate dacă într'un sistem de numeraţie oarecare un număr de patru cifre de forma $a\ a\ b\ b$ poate fi pătratul unui număr de două cifre de forma $c\ c$?

V. THÉBAULT.

---

1) Problema publicată cu acest număr la pag. 163 (XLI) se anulează şi se înlocueşte cu prezenta, întrucât a mai fost publicată la pag. 440 (XXXVII) şi rezolvată la pag. 272 (XL).

2) Problema publicată cu acest număr la pag. 168 (XLI) se anulează şi se înlocueşte cu prezenta, întrucât a mai fost publicată cu No. 4368 la pag. 336 (XXXIX).

4605. Să se formeze un pătrat de opt cifre întrebuinţând de două ori cifra 2 şi de câte trei ori pe fiecare din cifrele 4 şi 9.

G-L GH. BUICLIU.

4606. Să se construiască un triunghiu echilateral, având vârfurile pe trei cercuri concentrice date.

Să se determine relaţiunile dintre razele cercurilor pentru cazurile când problema admite o singură soluţiune şi pentru cazul când latura triunghiului echilateral este egală cu diferenţa razelor extreme.

GH. BASACOV.

4607. Patrulaterul format de vârfurile celor patru triunghiuri isoscele construite în exterior pe laturile unui patrulater dat, are dreapta care-i uneşte mijloacele diagonalelor, perpendiculară pe aceeaşi dreaptă din patrulaterul dat.

AL. A. ROŞU.

4608. Fie ABC un triunghiu înscris în cercul O, iar M un punct pe BC. Proiecţiunile lui M pe AB şi AC le notăm cu A_1 şi A_2. Să se arate că unghiul format de A_1A_2 cu diametrul vârfului A este egal cu unghiul format de AM cu BC.

GH. VASILIU.

4609. Cevienele unui punct P din planul triunghiului ABC taie laturile BC , CA , AB şi cercul circumscris triunghiului respectiv în A_1 , B_1 , C_1 şi A_2 , B_2 , C_2. Se proiectează punctul A_1 în α' , α'' pe A_2B , A_2C. Perpendiculara din A_2 pe $\alpha'\alpha''$ taie pe BC în A_3. Analog se obţin punctele β' , β'' , B_3 ; γ' , γ'' , C_3. Să se arate că:

1°. Dreptele AA_3 , BB_3 , CC_3 sunt concurente;

2°. Care este condiţiunea, ca dreptele $\alpha'\alpha''$, $\beta'\beta''$, $\gamma'\gamma''$ să întâlnească laturile triunghiului ABC în trei puncte colineare?

I. I. ŢIŢEICA.

4610. Se consideră un triunghiu isoscel OPQ cu vârful în O. Pe latura OP se iau punctele A şi M , iar pe latura OQ se iau punctele B şi N astfel ca $\overline{PA} = \overline{OB}$ şi ca $\overline{PM} = \overline{ON}$. Se notează cu x lungimea segmentelor egale AM şi BN. Punctele A şi B sunt fixe.

1°. Să se arate că există două valori pentru x astfel ca segmentul $\overline{MN}$ să aibă o lungime dată. Cele două segmente MN se întâlnesc pe bisectoarea unghiului O.

2°. Să se determine x astfel ca MN să fie minimum. Odată x determinat, se notează cu C intersecţia lui MN cu AB şi cu D intersecţia lui OC cu PQ. Să se arate că OADB este un paralelogram.

D. V. IONESCU.

4611. Să se arate că dacă:

$$\cos 6x + 2\cos 5x + 3\cos 4x + 4\cos 3x + 5\cos 2x + 6\cos x = 0$$

atunci:

$$(2\cos 3x + 2\cos 2x + \cos x + 1)^2 = 7.$$

N. CIORĂNESCU.

4612. Să se arate că o ecuaţiune cu rădăcinile în progresiune aritmetică se poate rezolva, fără a utiliza relaţiunile între coeficienţi şi rădăcini, în două feluri: utilizând expresiunea raţiei sau folosind o ecuaţiune care să dea rădăcinile extreme.

LOCOT. C-DOR GH. NICULESCU.

4613. Fie C cercul cu centrul în O şi de rază 1.

Se consideră familia cercurilor Γ având centrele pe C şi tangente la o dreaptă fixă Δ.

1°. Să se determine învelitoarea cercurilor Γ.

2°. Să se arate o construcţiune geometrică a acestei învelitoare.

3°. Să se calculeze lungimea totală a învelitoarei. Să se calculeze şi aria totală a învelitoarei atunci când această curbă nu se taie pe ea însăşi.

G. CĂLUGĂREANU (Cluj).

4614. Să se determine funcţiunea $\varphi(\Theta)$ astfel ca o funcţie de expresia $\varphi(x) + \alpha\varphi(y)$, unde α e o constantă, să fie partea reală a unei funcţiuni analitice $f(z)$ de variabilă complexă z.

TIBERIU POPOVICIU.

Erată. I. La pagina 50, numărând rândurile de jos în sus, să se scrie:

1) la rândul 11: $N = 237\ x47\ 30y\ 8z4$.
2) „ „ 8 şi 6: $+4730$ în loc de $+4130$.
3) „ „ 5: 7904 „ „ „ 7304.

GR. ZAPAN

II. La problema No. 4598 să se înlocuiască $(k!)$ cu $(k!)^2$.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Buzincu I. I. (4493); *Ceauşescu Vasile* (4544, 45); *Ciucă Ion* (4544); *Cotescu C.* (2446); *Dobrea Albert* (4582); *Dobrescu Paul* (4541); *Ghişoiu I. Cornel* (4506); *Goldenberg Marcel* (4544, 45); *Ionescu Dumitru* (4541, 44); *Mănac Marin* (4541, 45); *Marin Dan* (4541, 44, 45); *Mătieş V. I.* (A); *Mavrodin D.* (4496, 541); *Mazilu C. P.* (4545); *Petrescu I. Ion* (4539, 43); *Roşculeţ N. Nic.* (4599); *Tarasiuc S.* (N); *Ţiţeica I. I.* (4535); *Vişa I. Eug.* (4562).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 . . . . . Lei 30

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

La aceste preţuri se vor adăogă taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 alé fiecărei luni. Abonamentu de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN (Telefon 4-3929).**

C. 39972

M 2532

Biblioteca „ASTRA"
- SIBIU -

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASTRA"
SIBIU

0 - MAR 20..

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 5. — IANUARIE 1936

SUMARUL

1. Sărbătorirea celor 40 ani ai „Gazetei Matematice" . . . . . *Delegaţia Societaţii.*
Cuvântarea Domnului *A. D. Bunescu.*
Cuvântarea Domnului *Dr. C. Angelescu* Ministrul Instrucţiunii Publice.
Cuvântarea Domnului *Ion Ionescu.*
Cuvântarea **M. S. Regelui Carol II.**
2. Extinderi asupra indicatorilor . . . . *Maior I. Linteş.*
3. Note Matematice: 21 —24.
4. Bibliografie.
5. Cereri: 253.
6. Diverse.
7. Probleme rezolvate: 2861, 3045, 4046, 4332, 4382, 4493, 4538.
8. Exerciţii: 8 — 9.
9. Probleme propuse: 4615 — 4626.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1936

74310

22.

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 13, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 42, 45, 49, 52, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 98, 500, 03, 05, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 28, 30, 31, 33, 34, 46, 47, 50, 58, 59, 60, 61, 64, 66, 69, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 95, 96, 98, 601, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 09, 12, 13, 14. 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

SĂRBĂTORIREA CELOR 40 ANI AI „GAZETEI MATEMATICE“

Societatea noastră a sărbătorit la 17 Decemvrie 1935 — ziua morţii lui SPIRU HARET — împlinirea a 40 ani de existenţă şi regulată apariţie a *Gazetei Matematice.*

Iniţiativa acestei manifestări aparţine membrilor mai noui ai Societăţii, adică nici fondatorilor, nici «stâlpilor». Aceştia nu au înţeles să iasă la capătul a 40 de ani, din linia de modestie şi de discreţie pe care şi-au purtat o atât de rodnică activitate. Mai mult, căutau argumente matematice pentru lipsa de calităţi speciale ale numărului 40.

Ceilalţi membri însă, care n'au meritul fondării revistei, au făcut apel la forţa numerelor. Au fost, bineînţeles, ca număr, în majoritate, şi au decis deci sărbătorirea.

Cu un entusiasm rar cunoscut de matematici, şi care a fost cea mai frumoasă răsplată necăutată pentru o operă atât de imaterială şi de altruistă, membrii Societăţii, înconjuraţi de toţi cei cari poartă o grijă sau o recunoştinţă pentru opera *Gazetei Matematice*, având în frunte pe Scumpul nostru SUVERAN, au sărbătorit odată cu împlinirea celor 40 ani ai Gazetei, pe purtătorii focului sacru al acestei opere, pe cei 4 «stâlpi» : ION IONESCU, ANDREI IOACHIMESCU, GHEORGHE ŢIŢEICA şi regretatul VASILE CRISTESCU.

Serbările au fost trei :

O şedinţă solemnă la Fundaţia Carol I, în Inalta prezenţă a M. S. REGELUI CAROL II ;

O şedinţă festivă la Şcoala Politehnică ;

O masă de 100 persoane.

Serbările au fost precedate de un parastas oficiat la biserica Sf. Constantin, Duminică 15 Decemvrie, pentru pomenirea şi odihna sufletelor celor 20 membri decedaţi, în asistenţa familiilor lor şi a numeroşi membri ai Societăţii.

In numărul acesta, redăm şedinţa solemnă dela Fundaţia Carol I.

* * *

Solemnitatea a avut loc Marţi 17 Decemvrie 1935, orele 11, fiind onorată cu Inalta Prezenţă a M. S. REGELUI CAROL II, însoţit de A. S. R. PRINCIPELE NICOLAE.

O numeroasă asistență — în frunte cu D-l Ministru al Instrucțiunii Publice, cu Rectorii Politehnicelor, cu decanii și delegații facultăților de Științe, cu comandantul și delegații învățământului militar, compusă din membrii societății, numeroși profesori universitari și secundari, ingineri, militari de toate gradele, numeroși studenți, elevi de licee militare și civile, — depășea cu mult capacitatea de primire a aulei fundației și dădea sălii o admirabilă înfățișare sărbătorească.

Din partea Societății au primit pe M. S. REGELE D-nii: I. IONESCU, A. IOACHIMESCU, G. ȚIȚEICA, GENERAL G. BUICLIU și membrii delegației: I. BUȘILĂ, A. IOANOVICI și A. BUNESCU.

La intrare în sală s'a făcut Majestății sale REGELUI o entuziastă primire — răspuns la Inaltul Său gest de a prezida o asemenea sărbătoare.

Au urmat cuvântările D-lui A. BUNESCU din partea delegației Societății, D-lui DR. C. ANGELESCU Ministrul Instrucțiunii Publice, D-lui ION IONESCU din partea fondatorilor Revistei.

A răspuns M. S. REGELE, după care solemnitatea s'a terminat, Majestatea Sa întreținându-se câteva minute înainte de plecare cu «stâlpii».

Redăm textul cuvântărilor în paginile următoare.

DELEGAȚIA SOCIETĂȚII

Cuvântarea Domnului A. D. Bunescu

Sire,

Inalta cinste în care participarea Majestății Voastre învălue sărbătorirea acestui rar eveniment cultural din viața noastră națională, împlinește o luminoasă tradiție, care s'a înrădăcinat binefăcătoare în moravurile noastre de vre-o cinci ani încoace.

Dar fie-ne îngăduit ca, raportând cazul particular de astăzi la măreața operă constructivă a Majestății Voastre, noi, lăsându-ne în voia înclinărilor noastre spirituale, să-i căutăm o interpretare geometrică.

Această sublimă abstracție a minții omenești, geometria, ne arată că o operă definitivă, o construcție static determinată în spațiu și în timp, o construcție indeformabilă, are la baza structurii ei triunghiul. Iată de ce noi vedem pe Majestatea Voastră ostenind ne-

încetat să construiască din educaţia trupului, a sufletului şi a minţii acestei naţiuni, triunghiul care să facă sistemul nostru naţional indeformabil în suflete şi în graniţe.

La unghiurile acestui triunghiu, cu îngăduinţa Majestăţii Voastre, ne străduim şi noi să aşezăm câteva grade.

Acest gând bun a încolţit acum 41 ani în mintea a cinci tineri ingineri din focarul de muncă, de creaţie şi de dragoste de ţară al lui ANGHEL SALIGNY, care avea să le facă mai târziu onoarea de a veni alături de dânşii. In ziua de 4 Octomvrie 1894, regretaţii ION ZOTTU, VASILE CRISTESCU, VICTOR BALABAN şi MIHAIL ROCO şi D-l ION IONESCU, toţi abia ieşiţi din Şcoala de Poduri şi Şosele, înţelegând nevoia educării tinerelor generaţii prin desvoltarea şi disciplinarea matematică a raţiunii, iau temerara hotărîre a editării unei reviste de matematici.

Pentru înplinirea nevoilor materiale ale începutului, îşi asociază pe alţi cinci: regretaţii EMANOIL DAVIDESCU şi NICOLAE NICOLESCU şi D-nii: ANDREI IOACHIMESCU, TANCRED CONSTANTINESCU şi M. KINBAUM. Şi cu contribuţia de muncă şi de bani a tuturor — taxa de înscriere era 300 lei aur şi cotizaţia 155 lei aur — apare la 15 Septemvrie 1895 *Gazeta Matematică*, prima revistă specială de matematici în româneşte. Scopul ei era: publicarea de articole originale de matematici şi desvoltarea gustului pentru studiul acestei ştiinţe şi al cercetărilor originale.

Fericită a fost ideia fondatorilor, ca revista să dea preferinţă lucrărilor originale: era un stimulent esenţial pentru posibilităţile şi temperamentul tineretului românesc şi desigur, consolidarea de mai târziu a revistei, datorează mult acestei inspirate şi curagioase iniţiative.

La 15 Septemvrie anul acesta *Gazeta Matematică* a împlinit aşa dar 40 ani de neîntreruptă apariţie.

La început ea încearcă o dureroasă pierdere: Fondatorul VICTOR BALABAN se stinge la o săptămână dela apariţia primului număr.

Curând după aceea ea încearcă o mare bucurie căci face un prizonier: pe tânărul doctor în matematici care avea să fie mai târziu ilustrul matematician GHEORGHE ŢIŢEICA.

Şi astfel, Gazeta intră în epoca eroică, având scris pe steag: «entusiasm, armonie, sacrificii continue, muncă desinteresată», lozincile idealului creator.

Numărul celor ce se adună sub cutele lui creşte mereu: ajunge la 47 în 1915 şi la 174 astăzi. Recompensa morală pe care o caută activitatea lor este din ce în ce mai frumoasă: Gazeta se difuzează, scormone energiile latente şi entusiasmul tineretului şi converteşte din ce în ce mai mulţi oficianţi pentru acest cult al raţiunii: dela 144 corespondenţi în primul an, trece la 410 în 1912 şi la 680 în 1927.

Câtă rodnică acţiune educativă exercitau în tinereţea noastră de liceeni palpitaţiile acelea care precedau apariţia, cu o punctualitate matematică, a Gazetei!

Numărul anual al paginilor revistei se ridică treptat dela 288 în primul an la 480 înainte de războiu şi la 610 în anul 40.

Ea este repede cunoscută şi în străinătate. Numeroşi matematiciani străini din diferite colţuri ale lumii devin corespondenţii ei. Astăzi *Gazeta Matematică* se găseşte la loc de cinste în bibliotecile naţionale din Londra şi New-York.

Dar ceeace caracterizează în deosebi acea epocă eroică de care vorbeam, este acest fenomen puţin obişnuit la noi că o iniţiativă particulară de asemenea natură, a reuşit să învingă dificultăţile începutului şi să se consolideze, fără niciun sprijin din partea Statului.

Sunt nevoit să ies un moment din rolul de delegat oficial în care vorbesc acum — şi gestul acesta nu pot să nu-l mai repet de câteva ori — pentru ca să împărtăşesc respectuos Majestăţii Voastre că meritul acestei izbânzi revine în primul rând «stâlpilor» *Gazetei Matematice* — cum i-au botezat membrii ingineri — , D-lor ION IONESCU, GHEORGHE ŢIŢEICA, ANDREI IOACHIMESCU şi regretatului VASILE CRISTESCU dispărut în 1929 dintre noi.

Ei, în frunte cu D-l ION IONESCU, sunt creatorii acestei minunate sinteze între minte şi suflet care este *Gazeta Matematică*.

«Izbânda unei asemenea opere serioase — spunea în 1909 regretatul TRAIAN LALESCU, dispărut atât de curând şi pentru Gazetă şi pentru ştiinţă — trebue să ne umple inima de bucurie şi să ne întărească încrederea în energia complexă a neamului nostru».

Abia după 1922, adică după 27 de ani, *Gazeta Matematică* este nevoită să apeleze la mijloace exterioare, deci şi la Stat, pentru a străbate grelele împrejurări economice de după războiu. Şi încă, aceasta era în realitate o cerere de «restitutio in integrum», căci

ea își văzuse economiile din cotizații reduse prin inflație dela 35.000 lei aur în 1914 la 35.000 lei hârtie în 1920. La această reparație, datorăm și D-lui DR. ANGELESCU în calitate de Ministru al Instrucțiunii în 1927 și 1928, o contribuție prețioasă, pentru care îi reînoim astăzi mulțumirile noastre.

Conducătorii țării au cinstit cum se cuvine dovada de intelectualitate românească pe care o dădea *Gazeta Matematică*.

In 1903, REGELE CAROL I a primit în audiență pe D-l ȚIȚEICA, dorind să I se prezinte volumele apărute până atunci.

La expoziția științifică organizată în același an de doctorul ISTRATI Gazeta a primit cea mai înaltă distincțiune.

SPIRU HARET, cu ocazia votării în Senat a legii care recunoștea Gazetei — transformată între timp în societate — calitatea de persoană morală, face în Senat, ca Ministru al Instrucțiunii, următoarea apreciere:

«Ea este o societate care este nespus de binefăcătoare pentru învățământ, este o fondație pur științifică, desinteresată, care nu numai că nu are fonduri, dar din contră dă din punga ei pentru a susține *Gazeta Matematică*, care are vre-o 14 ani de existență și care ne face destul de mari servicii pentru învățământul matematicilor. A contribuit mai mult decât orice altă instituțiune pentru desvoltarea și întărirea învățământului matematic».

De altfel acest mare educator în românism, a arătat totdeauna o deosebită atențiune *Gazetei Matematice*, îngrijind, ori de câte ori a fost Ministru, ca liceele să fie abonate.

Astăzi, când se împlinesc 13 ani dela moartea sa, omagiem pios și recunoscători amintirea sa vecinică.

La 1 Septemvrie 1909, grija de viitor a fondatorilor, consolidează organizarea redacției transformând-o în societate juridică.

Astfel că războiul întregirii găsește *Gazeta Matematică* cu forțele sporite și întărite, deci pregătită de război. Lista membrilor ei nu mai indica ingineri și profesori, ci un general, cinci maiori, patrusprezcce căpitani, unsprezece locotenenți, etc.

Războiul punea societății noastre o grea problemă: gloria cerea membrilor și corespondenților să moară în tranșee; dar gloria cerea revistei să nu moară. Ea trebuia să treacă, făclie de speranțe nestinse, din România mică în România Mare. Elementele soluției problemei erau înscrise pe steag. Deci, membrii Gazetei, punându-se

în slujba patriei, cuceresc ambele glorii. Ca un simbol, GHEORGHE HOGAŞ moare în tranşeele dela Mărăşeşti având *Gazeta Matematică* alături.

Şi astfel *Gazeta Matematică* a fost singura revistă care nu şi-a întrerupt apariţia în timpul războiului. Ea s'a pus bine înţeles în serviciul matematicilor aplicate la ştiinţele militare, străbătând cu o desăvârşită încredere grelele vremuri dela Iaşi.

Dificultăţile financiare care au urmat, făceau sacrificiile membrilor prea dureroase. Oamenii de inimă, fie din sânul ei, cum a fost inginerul ION TEODOR, fie din afară, i-au venit în ajutor, astfel că după patru ani Gazeta s'a refăcut.

Era nevoie de această grabnică refacere, căci starea de scădere a învăţământului matematic din licee, consecinţă atât a depresiunii generale cât şi a desfiinţării secţiei reale, cerea din partea Gazetei mai mult decât colaborarea dinainte, cerea un sprijin. Ea l-a dat larg şi viitorilor profesori, şi viitorilor ingineri şi viitorilor militari.

Este prilejul să ne exprimăm în special satisfacţia pentru solicitudinea deosebită pe care conducătorii învăţământului militar au arătat-o sforţărilor noastre. Numărul mare al corespondenţilor şi al premiaţilor noştri dela liceele militare, vădeşte o fericită înţelegere a spiritului în care trebue formată personalitatea viitorului ofiţer: disciplină bazată pe educaţia raţiunii şi specialitate bazată pe aplicaţiune ştiinţifică, ambele derivând din matematici.

După atâtea împrejurări din vieaţa ei care i-au verificat şi confirmat vitalitatea, *Gazeta Matematică* putea să-şi îngădue răgazul unor preocupări materiale. Membrii ei aveau justificarea etică să treacă dela desăvârşirea construcţiei morale, la construcţia materială care s'o adăpostească. Cele patru lozinci intră în acţiune: membrii societăţii se întrec în zidirea *Casei Gazetei Matematice*. Unul din ei, D-l MIHAIL MANOILESCU, în calitate de Sub-Secretar de Stat la Finanţe, dublează sumele adunate cu 1.000.000 lei din fondurile culturale. Graţie sprijinului lui TRAIAN LALESCU şi D-lui TANCRED CONSTANTINESCU, Casa Muncii C. F. R. donează un teren de 250 mp.

După aproape 40 ani de viaţă nomadă, *Gazeta Matematică* este astăzi proprietara a două etaje, într'un imobil comun cu Casa de pensii a Tramvaielor. O bibliotecă ce se îmbogăţeşte mereu, îngrijeşte să transforme şi direct acest avut material, într'o unealtă de interes cultural şi general.

Sire,

Odată în slujba unei asemenea misiuni, fondatorii şi colaboratorii lor de mai târziu au înţeles să-şi amplifice acţiunea şi cu alte mijloace care să colaboreze cu revista la acelaşi scop, dar să asigure realizarea lui mai amplă şi mai grabnică.

In 1902 *Gazeta Matematică* inaugurează concursurile de matematici între elevii liceelor, corespondenţi ai revistei. Această iniţiativă, tot atât de norocoasă ca şi inovaţia lucrărilor originale din programul revistei, a corespuns atât de bine predispoziţiei elevilor, încât concursurile au căpătat imediat o mare popularitate. Prestigiul la care le ridicase seriozitatea lor şi modul cum erau întocmite rapoartele de premiare, era atât de mare, încât n'au lipsit chiar intervenţiuni pentru favorizarea candidaţilor!

Efectul lor, didactic prin stimulentul întrecerii şi educativ prin stabilirea de raporturi personale între corespondenţii şi membrii Gazetei, a fost foarte rodnic în pregătirea viitorilor profesionişti ai matematicilor pure şi aplicate şi a creat o binefăcătoare familie a *Gazetei Matematice.*

In acelaşi sens, Gazeta a început din anul 1912 să acorde premii pentru lucrările originale valoroase din diferitele domenii ale matematicilor. Premiile sunt alimentate de şapte fonduri, unele create prin subscripţie de membrii Gazetei, altele donate. Citez între aceşti donatori pe D-l GENERAL SCARLAT PANAITESCU, vechiu membru al societăţii noastre.

Pentru a ajuta pregătirea matematică a corespondenţilor prin culegeri de probleme şi tratate de matematici, în limba noastră, cât mai pedagogice şi cât mai ieftine, Gazeta a creat în 1901 o editură a sa *Biblioteca Gazeta Matematică*, în care au apărut până astăzi 11 volume redactate de diferiţi membri ai Societăţii.

De asemenea s'a creat şi o editură tehnică a Gazetei, prin donaţia din 1914 în valoare de 13.750 lei aur — adică 500.000 lei de astăzi — a D-lui ION IONESCU, reprezentând salariul său ca suplinitor al catedrei lui SALIGNY la Şcoala de Poduri şi Şosele. Probabil că toată ofranda sa de muncă şi de credinţă din cei 20 ani cari tocmai se împlineau, i s'a părut D-lui IONESCU prea puţină.

Şi în sfârşit, începând cu anul şcolar trecut, societatea publică şi un „Supliment lunar cu exerciţii al *Gazetei Matematice*", destinat exclusiv elevilor de liceu. Apariţia lui a dovedit odată mai mult

comunitatea dintre Gazetă şi vieaţa didactică. In primul an numărul corespondenţilor a fost 1500! Un îmbucurător simptom de accentuare a seriozităţii în progresul nostru cultural această instinctivă nevoie de matematici, atunci când ele sunt reduse în învăţământ dela rolul de altă dată. Am zice poate mai bine «o îmbucurătoare reacţiune a instinctului de conservare», astăzi când problemele materiale ale vieţii naţionale şi ale securităţii ei, toate probleme de ştiinţă aplicată, sunt pe planul întâi al preocupărilor noastre.

Sire,

Aceste 40 volume au condensat în filele lor toate acele străduinţe şi întreg acel entusiasm.

Intre scoarţele lor 40 de serii de elevi şi 3 generaţii de iubitori ai ştiinţei, au depozitat un tezaur matematic de creaţie românească.

Aceste 40 de volume sunt hrisoavele de nobleţe ale familiei care este *Gazeta Matematică.*

Le închinăm cu smerenie Majestăţii Voastre.

In ziua de sărbătoare de astăzi, 20 de ofiţeri, 49 de profesori, 105 ingineri şi 1800 corespondenţi, toţi ostaşi credincioşi ai Regelui Culturii, purtând în suflete lozincile Domniei Majestăţii Voastre, îşi încălzesc credinţa la focul sacru al idealului Majestăţii Voastre şi intră mai încrezători şi mai hotărîţi în al 41-lea an al *Gazetei Matematice.*

Să trăiţi Sire! Să trăiască Măria Sa Marele Voevod de Alba Iulia! Să trăiască Dinastia!

Cuvântarea Domnului Dr. C. Angelescu, Ministrul Instrucţiunii Publice

Sire,

In evoluţia culturală a popoarelor se pot distinge două perioade: o primă perioadă de formaţie şi transformare, perioadă în care poporul primeşte şi asimilează rezultatele obţinute de alte popoare mai înaintate în cultură şi în civilizaţie; şi o a doua perioadă de creaţiune şi de emisiune în care poporul ajuns la maturitatea lui intelectuală, contribue cu aportul său, în mod activ, la crearea de bunuri culturale şi la promovarea tezaurului preţios al umanităţii, cultura şi civilizaţia.

Durata primei perioade, pentru fiecare popor, depinde de calităţile lui sufleteşti şi de darurile cu care natura l-a înzestrat. Unele popoare străbat mai încet, altele mai repede, această primă etapă şi de îndată ce şi-au închegat o viaţă de stat, intră în rândurile energiilor creatoare, obţinând prin rezultatele muncii lor respectul şi recunoştinţa omenirei.

Neamul românesc, aşezat în această parte a lumii, la această răscruce a tuturor invaziunilor, secole dearândul nu a putut să-şi îndeplinească altă misiune, decât aceia de a fi bastion de apărare împotriva tuturor năvălitorilor, de a fi scut al civilizaţiei, care s'a înfiripat şi s'a organizat în Apus.

Indată însă ce el a putut să-şi închege viaţa de Stat Naţional, în câteva decenii a străbătut prima etapă şi a intrat cu toată energia în perioada de creaţiune pe toate tărâmurile şi în special, pe tărâmul ştiinţific, dând ştiinţei, nu numai savanţi, al căror nume a trecut de mult hotarul acestei ţări, dar contribuind cu aportul său la promovarea ştiinţei universale.

Intre ştiinţele cari au luat la noi o desvoltare mai repede şi mai pronunţată, a fost matematica. Când ne gândim că abia au trecut şase decenii, de când s'au întors în ţară cei dintâi doctori în matematici dela Paris: SPIRU HARET, CONSTANTIN GOGU şi DAVID EMANOIL şi că astăzi ţara noastră numără o pleiadă de matematicieni, adevăraţi savanţi, trebue să recunoaştem marile însuşiri cu care este înzestrat acest popor şi să ni se întărească încrederea în energia şi puterea de creaţiune ale neamului nostru.

Intre mijloacele cari într'un timp atât de scurt, au contribuit mai mult la obţinerea acestei isbânzi, atât de strălucite, în domeniul unei ştiinţe, care cere o deosebită fineţă şi o profunzime de judecată deosebită, *Gazeta Matematică* trebue numărată printre cele dintâi, aşa încât, cu drept cuvânt, putem spune că istoricul ştiinţelor matematice la noi se confundă cu istoricul *Gazetei Matematice*.

Infăptuirea acestei reviste cade în vremea când România, devenită liberă şi independentă, condusă de înţelepciunea Marelui Rege CAROL I, a ştiut să cheme la viaţă şi să pună în valoare atâtea energii latente, care au transformat cu totul ţara în ultima jumătate a secolului trecut.

In această epocă de transformare şi de înflorire, lumea intelectuală românească era frământată de gândul de a găsi, fiecare în

ramura lui de activitate, mijloacele cele mai sigure şi cele mai repezi pentru ridicarea acestei ţări şi a acestui neam, la rangul ţărilor Apusene cu o cultură şi cu o civilizaţiune mai înaintată.

Cei cinci ingineri tineri, cari au pus bazele *Gazetei Matematice* erau frământaţi de acest gând şi au căutat să întemeieze o revistă care, să răspândească, să înfiltreze în păturile adânci ale poporului nostru, gândirea şi judecata matematică menită să ridice această pătură, din punctul de vedere material şi moral.

Judecata solidă şi entusiasmul creator al acestor tineri au reuşit şi *Gazeta Matematică* a fost creată.

Revista de matematică pură şi aplicată, a pătruns tot mai mult în şcoala şi societatea românească îndemnând la muncă asiduă pe tinerii cu înclinări pentru speculaţiunile abstracte şi judecata fină a matematicii.

Gazeta Matematică organizând în fiecare an, concursuri cu elevii şcoalelor noastre, a dat un nou avânt şi o îndrumare sănătoasă învăţământului matematic din şcoalele noastre.

Apreciind marile servicii aduse culturii româneşti de către această revistă, SPIRU HARET transformă mai târziu această revistă, în *„Societatea Gazeta Matematică"*, care a continuat şi continuă mersul său ascendent de propăşire şi de contribuţie la desvoltarea ştiinţifică a culturii româneşti.

Din istoricul acestei reviste, generaţiunile viitoare vor putea desprinde învăţământul plin de folos, că numai prin entusiasmul unui patriotism luminat, numai printr'o muncă continuă, stăruitoare, pătrunsă de o desinteresată dragoste de neam, se poate creia ceva durabil, se poate creia ceva folositor pentru viitorul acestei ţări.

Ca ministru al Instrucţiunii, îndeplinesc datoria, exprimând mulţumirile mele pline de recunoştinţă, întemeietorilor încă în viaţă şi colaboratorilor *Gazetei Matematice* pentru opera îndeplinită, graţie căreia i se datoreşte, în mare parte progresul ce s'a realizat în învăţământul matematicilor, atât în şcoalele secundare, cât şi în învăţământul superior.

Sire,

Majestatea Voastră, urmând exemplul marilor săi înaintaşi, pune o continuă stăruinţă în stimularea energiilor creatoare ale acestui neam tânăr şi viguros, făcându-vă principala preocupare din

întărirea şi înălţarea culturală ştiinţifică, acordându-i sprijinul ca să ne poată da şi în viitor aceleaşi rezultate, care să facă cinste neamului şi ţării, pentru a cărei înălţare Majestatea Voastră Vă închinaţi toată dragostea, toată puterea de muncă, toată viaţa.

Cuvântarea Domnului Ion Ionescu

Sire,

Suntem adunaţi aci ca să sărbătorim împlinirea a *patruzeci* de ani de apariţiune regulată a revistei **Gazeta Matematică.**

Iniţiativa tipăririi acestei reviste a fost luată acum 41 de ani de cinci ingineri eşiţi din fosta Şcoală Naţională de Poduri şi Şosele de aici din Bucureşti. Dintre aceia, eu fiind singurul rămas în viaţăi, mi s'a cerut să iau cuvântul la această solemnitate.

Trebue dela început să mărturisesc că nu am fost printre iniţiatorii acestei sărbătoriri. La întemeierea **Gazetei Matematice** fondatorii ei au organizat-o astfel ca să le supravieţuiască lor; ei au înlăturat orice ar fi putut pricinui nemulţumiri, intrigă sau ură printre redactorii revistei şi în urmă printre membrii Societăţii. De aceea nu am prevăzut preşedinţi, directori, secretari; nu am înfiinţa, Consilii de administraţie sau Comitete de direcţiune; mai mult încât pentru orice muncă depusă sau serviciu îndeplinit, nu am dat nici o răsplată materială. Un Casier ales pe 5 ani, şi doi membri aleşi pe câte 2 ani alcătuiesc **„Delegaţiunea"** care administrează revista şi o reprezintă în relaţiunile ei exterioare.

In asemenea condiţiuni, ce însemnează un număr de 40 de ani în viaţa unei instituţiuni, în viaţa unei reviste ? Matematiceşte vorbind 40 este un biet număr ca şi oricare altul în şirul nesfârşit al numerelor naturale ! El nu are nici o virtute specială.

De când apare **Gazeta Matematică** eu m'am ocupat mai mult de partea ei aritmetică; nu am întâlnit însă nici o proprietate proprie, nimic caracteristic sau interesant pentru numărul 40. De aceea în numărul jubilar depe Septemvrie trecut, — cu care revista a intrat în Anul XLI, — am propus o problemă investigativă, în care ceream să se găsească o asemenea proprietate.

Când unui matematician i se pune întrebarea:

— Ce ai făcut când ai împlinit 40 de ani ?

el răspunde imediat:

— Am intrat în al 41-lea an !

Cu toate acestea, propunerea de a se face această sărbătorire se datoreşte unui renumit matematician al nostru, D-lui GHEORGHE ŢIŢEICA. Dela înfiinţarea Societăţii **Gazeta Matematică,** D-sa a fost raportorul permanent al ei pentru toate evenimentele însemnate în legătură cu revista, şi în această calitate a fost nevoit dese ori să se ocupe şi de chestiuni de ordin sentimental, şi chiar de ordin mistic. Astfel, în mai multe rânduri, D-sa a adresat rugi Creatorului pentru ca la viitoarea serbare a Semicentenarului revistei să se mai găsească în viaţă cel puţin unul dintre întemeietorii ei, care să formeze atunci inelul de legătură dintre trecut şi viitor. Nu este însă de loc sigur, şi nu se poate demonstra, că lanţul nu se va rupe definitiv mai înainte !

Pe de altă parte, Românul are zicătoarea că averea nu stă mai mult de 40 de ani în aceeaşi mână.

In fine, o lege a naturii ne mai spune că un corp, care cade spre pământ, îl ajunge cu o iuţeală cu atât mai mare cu cât e mai aproape de el !

Pentru aceste motive, găsesc şi eu că sărbătorirea de azi are un rost : ea este consacrarea în public a trecerii avutului ştiinţific şi material al **Gazetei Matematice** dela generaţiunea acelora cari au întemeiat-o, la generaţiunea de azi, care o va duce mai departe pe calea propăşirii şi a strălucirii.

Celor tineri dela **Gazeta Matematică** le revin locurile noastre ale celor bătrâni ; lor le revin însă obligaţiunile şi răspunderile pe care ni le-am luat noi încă de acum 40 de ani, pentru o îndrumare a culturii matematice naţionale, pentru contribuţia României la propăşirea generală a ştiinţelor matematice şi pentru înlesnirea învăţământului superior ştiinţific, tehnic şi militar, care cer cunoştinţe matematice solide la baza lor.

Să nu se uite apoi că nu este de ajuns ca tinerii să ne încânte pe noi cei vechi dela **Gazeta Matematică** cu titlul măgulitor de **„stâlpi“,** ci trebue să ne imite cu toţii la muncă şi la jertfe ; ei trebue să se îngrijească ca să ne descarce de toată povara ce mai suportăm, până când noi, cei vechi, nu ne vom prăbuşi cu toţii. Trebue ca după acum să se aşeze temeinic stâlpi noui, rezistenţi şi înalţi, cari să susţină edificiul ştiinţific al **Gazetei Matematice** la înălţimea la care el este privit azi de întreaga lume matematică.

Tinerii de azi şi cei de mâine trebue să stea necontenit de veghe ca acele patru faruri care ne-au călăuzit pe noi timp de 40 de ani, şi anume: **entusiasmul, armonia, munca desinteresată** şi **sacrificiile continui** să fie şi în viitor bine menţinute, bine întreţinute şi bine folosite.

Credinţa, foarte răspândită, că matematica este o ştiinţă universală şi că energiile şi sumele cheltuite cu dânsa nu sunt de folos Ţării, trebueşte înlăturată. Intr'o scrisoare adresată lui LAPLACE, — ilustrul autor al Mecanicei cereşti, — NAPOLEON I spunea că progresele pe care le fac matematicile contribuesc la strălucirea naţiunii, şi adăoga la sfârşit:

„Inaintarea şi perfecţionarea matematicilor sunt intim legate de prosperitatea Statului“.

Tinerii nu trebue dar să uite că şi **Gazeta Matematică** este una din pârghiile pentru ridicarea culturii ştiinţifice a Neamului Românesc, şi că o asemenea ridicare este şi una din cele mai vii dorinţe ale **Majestăţii Voastre,** Care a şi ţinut să onoreze, cu Inalta Sa prezenţă, sărbătorirea noastră de azi.

Să trăiţi, Sire.

Să trăiască *Gazeta Matematică.*

Cuvântarea M. S. Regelui Carol II

Cu o vie plăcere am venit astăzi să asist la această sărbătorire a 40 de ani de existenţă a „Gazetei Matematice“. Am venit cu atât mai multă bucurie, cu cât la noi în ţară — unde se fac atâtea începuturi frumoase, dar atât de puţină continuitate — să pot aduce regescul Meu salut acelora care timp de 40 de ani, cu aceeaşi stăruinţă şi cu aceeaşi dragoste, au lucrat pentru un frumos ideal.

Urarea pe care v'o fac este ca aceşti 40 de ani împliniţi astăzi, să se împlinească încă de 40 de ori.

EXTINDERI ASUPRA INDICATORILOR

Prima extindere

In *„Exercices d'Arithmétique"* par FITZ-PATRICH — pag. 400 se arată că:

In şirul natural al primelor p *numere, numărul numerelor prime cu* N *este dat de expresiunea:*

$$1)\quad F_p(N) = p - \Sigma E\left(\frac{p}{a}\right) + \Sigma E\left(\frac{p}{ab}\right) - \Sigma E\left(\frac{p}{abc}\right) + \dots$$

ştiind că $N = a^\alpha \cdot b^\beta \dots$ iar E (I) reprezintă întregii lui I.

De asemenea în acelaşi volum la pag. 403, găsim că:

In şirul natural al primelor p *numere, suma numerelor prime cu* N, *este dat de expresiunea:*

$$2)\quad S_p(N) = \tfrac{1}{2}\, p(p+1) - \Sigma \frac{a}{2} E\left(\frac{p}{a}\right)\left[1 + E\left(\frac{p}{a}\right)\right]$$
$$+ \Sigma \frac{ab}{2} E\left(\frac{p}{ab}\right)\left[1 + E\left(\frac{p}{ab}\right)\right]$$
$$- \Sigma \frac{abc}{2} E\left(\frac{p}{abc}\right)\left[1 + E\left(\frac{p}{abc}\right)\right]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Imi propun acum:

Să determinăm produsul numerelor prime cu N *din şirul natural al primelor* p *numere.*

Fie $N = a^\alpha$, atunci se vede lesne că numerele *neprime* cu *p* sunt:

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \dots\ E\left(\frac{p}{a}\right) a$$

pe cari le vom elimina din produsul $p!$, prin urmare produsul căutat va fi:

$$P_p(N) = \frac{p!}{E\left(\frac{p}{a}\right)!\, a^{E\left(\frac{p}{a}\right)}}.$$

Fie $N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta}$, atunci numerele *neprime* vor fi:

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots\ E\left(\frac{p}{a}\right) a$$

$$b,\ 2b,\ 3b,\ \ldots\ E\left(\frac{p}{b}\right) b.$$

Dar în aceste două şiruri există numere egale, multiple în acelaşi timp şi de a şi de b, adică Mab, şi cari vor fi:

$$ab,\ 2ab,\ 3ab,\ \ldots\ E\left(\frac{p}{ab}\right) ab.$$

Aceste numere vor fi deci eliminate.
Atunci produsul căutat va fi:

$$P_p(N) = \frac{p!\ E\left(\frac{p}{ab}\right)!\ (ab)^{E\left(\frac{p}{ab}\right)}}{E\left(\frac{p}{a}\right)!\ E\left(\frac{p}{b}\right)!\ a^{E\left(\frac{p}{a}\right)} \cdot b^{E\left(\frac{p}{b}\right)}}.$$

Iar în general vom avea expresiunea:

$$3)\quad P_p(N) = \frac{p!\ \Pi E\left(\frac{p}{ab}\right)! \ldots \Pi\ (ab)^{E\left(\frac{p}{ab}\right)} \ldots}{\Pi E\left(\frac{p}{a}\right)!\ \Pi E\left(\frac{p}{abc}\right)! \ldots \Pi\ a^{E\left(\frac{p}{a}\right)} \ldots \pi\ (abc)^{E\left(\frac{p}{abc}\right)} \ldots}$$

Observaţie.

In cazul când $p = N$ găsim formula:

$$P(N) = \frac{N!\ \Pi\left(\frac{N}{ab}\right)! \ldots \Pi\ (ab)^{\frac{N}{ab}} \ldots}{\Pi\left(\frac{N}{a}\right)!\ \Pi\left(\frac{N}{abc}\right)! \ldots \Pi\ a^{\frac{N}{a}} \ldots \Pi\ (abc)^{\frac{N}{abc}} \ldots}$$

pe care am stabilit-o în G. M. XXXI, pag. 83.

A doua extensiune

Fie un şir natural de numere cuprins între p şi q, $(q > p)$, atunci în mod analog se poate stabili lesne că:

Numărul numerelor prime cu N din acel şir va fi dat de expresiunea :

$$4) \quad F_{pq}(N) = q - p - \Sigma\left[E\left(\frac{q}{a}\right) - E\left(\frac{p}{a}\right)\right] + \Sigma\left[E\left(\frac{q}{ab}\right) - E\left(\frac{p}{ab}\right)\right] - \Sigma\left[E\left(\frac{q}{abc}\right) - E\left(\frac{p}{abc}\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Suma numerelor prime cu N din şirul dat va fi :

$$5) \quad S_{pq}(N) = \tfrac{1}{2}\left[q(q+1) - p(p+1)\right] - \Sigma\frac{a}{2}\left\{E\left(\frac{q}{a}\right)\left[1+E\left(\frac{q}{a}\right)\right] - E\left(\frac{p}{a}\right)\left[1+E\left(\frac{p}{a}\right)\right]\right\} + \Sigma\frac{ab}{2}\left\{E\left(\frac{q}{ab}\right)\left[1+E\left(\frac{q}{ab}\right)\right] - E\left(\frac{p}{ab}\right)\left[1+E\left(\frac{p}{ab}\right)\right]\right\} - \Sigma\frac{abc}{2}\left\{E\left(\frac{q}{abc}\right)\left[1+E\left(\frac{q}{abc}\right)\right] - E\left(\frac{p}{abc}\right)\left[1+E\left(\frac{p}{abc}\right)\right]\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

In sfârşit, produsul numerelor prime cu N din şirul dat va fi dat de expresiunea :

$$6) \quad P_{pq}(N) = \frac{q!}{p!} \cdot \frac{\Pi E\left(\frac{p}{a}\right)!}{\Pi E\left(\frac{q}{a}\right)!} \cdot \frac{\Pi E\left(\frac{q}{ab}\right)!}{\Pi E\left(\frac{p}{ab}\right)!} \ldots \ldots \frac{\Pi (ab)^{E\left(\frac{q}{ab}\right) - E\left(\frac{p}{ab}\right)} \ldots}{\Pi a^{E\left(\frac{q}{a}\right) - E\left(\frac{p}{a}\right)} \ldots}$$

Aplicațiuni:

Voiu da câteva exemple numai pentru a doua extensiune.

Fie

$$N = 12 \; ; \; p = 10 \text{ și } q = 20,$$

atunci:

$$F_{pq}(N) = 10 - \Sigma\left[E\left(\frac{20}{2}\right) - E\left(\frac{10}{2}\right)\right] + \Sigma\left[E\left(\frac{20}{6}\right) - E\left(\frac{10}{6}\right)\right]$$

$$= 10 - [10 - 5 + 6 - 3] + [3 - 1]$$

$$= 10 - 8 + 2 = 4.$$

In adevăr în șirul:

10 , **11** , 12 , **13** , 14 , 15 , 16 , **17**, 18, **19** , 20

numai numerele scrise cu litere grase sunt prime cu *12*.

De asemenea:

$$S_{pq}(N) = \tfrac{1}{2}[20 \times 21 - 10 \times 11] - \Sigma\frac{2}{2}\left\{E\left(\frac{20}{2}\right)\left[1 + E\left(\frac{20}{2}\right)\right] - E\left(\frac{10}{2}\right)\left[1 + E\left(\frac{10}{2}\right)\right]\right\} + \Sigma\frac{6}{2}\left\{E\left(\frac{20}{6}\right)\left[1 + E\left(\frac{20}{6}\right)\right] - E\left(\frac{10}{6}\right)\left[1 + E\left(\frac{10}{6}\right)\right]\right\}$$

$$= 155 - 80 - 45 + 30$$

$$= 60 = 11 + 13 + 17 + 19.$$

Apoi:

$$P_{pq}(N) = \frac{20!}{10!} \cdot \frac{5!\,3!}{10!\,6!} \cdot \frac{3!}{1!} \cdot \frac{6^{3-1}}{2^{10-5} \cdot 3^{6-3}}$$

$$= 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19.$$

MAIOR I. LINTEȘ.

NOTE MATEMATICE *)

21. *Curiozităţi aritmetice.* 1°. Numerele cuprinse între 10, 13, 95 şi 99, 100 şi 141, 949 şi 999,... sunt singurele numere de 2, 3, 4,... cifre ale căror cuburi încep cu aceeaşi cifră ca şi ele.

2°. Numerele cuprinse între 1000 şi 1032, 9950 şi 9999 sunt singurele numere de 4 cifre ale căror cuburi încep cu 10 şi 99.

3°. Dacă se caută cuburile perfecte ale căror rădăcini să fie numărul ce se obţine scriind una după alta grupele de n cifre dela stânga şi dela dreapta acelor cuburi, nu se vor găsi ca rezultate decât cuburile numerelor cuprinse în intervalele numerelor precedente. Se ştie că cuburile de această formă sunt terminate la dreapta prin numerele

$$1\ ,\ 01\ ,\ 25\ ,\ 76\ ,\ 99,\ldots$$

Pentru $n = 1, 2$ se găsesc cuburile următoare, neglijând pe acelea de forma 10^n:

$$11^3 = \mathbf{1}\,33\,\mathbf{1}\ ;\ 99^3 = \mathbf{9}\,7029\,\mathbf{9}\ ;\ 0101^3 = \mathbf{01}\,03030\,\mathbf{1}\ ;$$

$$0976^3 = \mathbf{09}\,297141\,\mathbf{76}\ ;\ 0999^3 = \mathbf{09}\,970029\,\mathbf{99}\ ;$$

$$1001^3 = \mathbf{10}\,030030\,\mathbf{01}\ ;\ 1025^3 = \mathbf{10}\,768906\,\mathbf{25}\ ;$$

$$9986^3 = \mathbf{99}\,18172661\,\mathbf{76}\ ;\ 9999^3 = \mathbf{99}\,97000299\,\mathbf{99}.$$

4°. Numerele de 8 cifre

$$5100^3 = 1326\,\mathbf{5100}\,0000$$

$$7500^3 = 4218\,\mathbf{7500}\,0000$$

$$7600^3 = 4389\,\mathbf{7600}\,0000$$

sunt singurele cuburi ale numărului format de cele 4 cifre dela mijlocul lor.

Puterile lui 76 terminându-se cu 76, urmează că $\mathbf{7600}^n$ este de asemeni de forma precedentă. Am semnalat de altfel în *Mathesis*, 1935 — 160, curiosul patrat

$$7600^2 = 5\,\mathbf{7600}\,000.$$

*) După ce s'a dat la imprimat Nota D-lui S-LT. I. C. SAVIN, publicată la pag. 232, s'a primit o notă analoagă de la D-l I. ST. NICOLESCU asupra generalizării problemei 4457.

5°. Numerele

$$792^3 = 496\,\mathbf{793}\,088\ ^{1})$$

$$8772^3 = 6749\,\mathbf{8771}\,5648$$

sunt singurele numere de 9 şi de 12 cifre respectiv de formule

$$N^3 = A\,(N \pm 1)\,B$$

în care N, A, B sunt numere de 3 sau 4 cifre, după cum în paranteză avem semnul + sau —.

V. THÉBAULT.

22. *Complectarea soluţiei problemei 4031.* Soluţia dată problemei 4031 la pag. 125, Vol. XL, este exactă ca rezultate, dar nu este complectă pentrucă nu examinează toate cazurile posibile.

Reluăm acea problemă pentru a nu lăsa să se treacă cu vederea o scăpare în coloanele revistei noastre. In problema 4031 se cerea să se determine cifrele *a* şi *b* aşa încât

$$E_{1,2} = 1931a\ 1929^3 \pm 1929b\ 1931^3$$

să se dividă prin 1930.

Observ dela început că cifra unimilor celor 2 părţi ale expresiunilor E este respectiv 9 şi 1, deci în cazul diferenţei expresiunea E se va termina cu 8 şi *nu va fi divizibilă prin 1930 pentru nicio valoare a lui* **a** *şi* **b.**

Rămâne de examinat numai cazul sumei.

După ce se caută resturile diviziunei părţilor prin 1930 se găseşte că e destul a determina pe *a* şi *b* aşa încât

$$E = (1569 + 35a)^3 + (361 + 35b)^3$$

să se dividă prin 1930.

Dacă se ţine seamă de identitatea

$$x^3 + y^3 = (x + y)\,(x^2 + y^2 - xy)$$

suma E devine

$$E = A \times B$$

---

1) Acest număr formează obiectul problemei 2194, **G. M.,** Vol. XX, la care încă nu s'a primit nici o soluţie.

în care

$$A = 1930 + 35(a + b) = 5[2 \times 193 + 7(a + b)]$$

$$B = 2.025.673 + 35(2777a - 847b) + 1225(a^2 + b^2 - ab).$$

Pentru ca E să se dividă prin $1930 = 2 \times 5 \times 193$ e necesar şi suficient să avem una din sistemele de egalităţi:

(1) $A = 1930d$; (2) $B = 1930d'$

(3) $\begin{cases} A = 5d \\ B = 2 \times 193d' \end{cases}$; (4) $\begin{cases} A = 2 \times d \\ B = 5 \times 193 \times d' \end{cases}$

(5) $\begin{cases} A = 2 \times 193 \times d \\ B = 5 \times d' \end{cases}$; (6) $\begin{cases} A = 5 \times 193 \times d \\ B = 2 \times d' \end{cases}$

(7) $\begin{cases} A = 2 \times 5 \times d \\ B = 193 \times d' \end{cases}$; (8) $\begin{cases} A = 193 \times d \\ B = 2 \times 5 + d' \end{cases}$

dintre care ultimele 6 simultane.

Se observă însă că B este prim cu 5, deci egalităţile (2), (4), (5), (8) nu sunt posibile. Rămân de examinat numai celelalte 4 cazuri.

Egalitatea (1). Trebue ca $a + b$ să se dividă prin 2×193 ceeace nu se poate decât dacă

$$a = b = 0$$

căci a şi b sunt mai mici ca 10.

Cazul (3). A este multiplu de 5 oricare ar fi a şi b. Trebue ca B să se dividă prin 2×193. Se găseşte uşor că:

$$B = m \times 193 + 138 + 116(a - b) + 67[a^2 + b^2 - ab].$$

Dând lui $a - b$ şi b toate valorile posibile şi făcând calculele, nici unul din numerele B obţinute nu se divide prin 193. Deci (3) nu dă soluţie.

Examinând la fel cazurile (6) şi (7) nu se mai găsesc alte soluţii în afara celor dela (1).

In soluţia dela pag. 225, **Vol. XL,** s'au examinat numai cazurile (7) şi (2) fără a se observa că pentru semnul minus problema nici nu trebue examinată.

G-L GH. BUICLIU.

23. *Asupra problemei 457, G. M. Vol. VII, p. 84.* In această problemă, propusă de D-l Prof. G. ȚIȚEICA, se cerea să se determine constantele a, b și c astfel ca din egalitățile

$$\frac{x'}{ax+by+cz}=\frac{y'}{ay+bz+cx}=\frac{z'}{az+bx+cy}$$

să rezulte

$$\frac{x}{ax'+by'+cz'}=\frac{y}{ay'+bz'+cx'}=\frac{z}{az'+bx'+cy'}.$$

Vom rezolva problema mai generală:

Să se determine constantele $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ *astfel ca din egalitatea rapoartelor*

$$\frac{y_i}{a_0 x_i + a_1 x_{i+1} + \ldots + a_{n-i-1} x_{n-1} + a_{n-i} x_0 + \ldots + a_{n-1} x_{i-1}}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

să se deducă egalitatea rapoartelor

$$\frac{x_i}{a_0 y_i + a_1 y_{i+1} + \ldots + a_{n-i-1} y_{n-1} + a_{n-i} y_0 + \ldots + a_{n-1} y_{i-1}}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Presupunem bine înțeles că $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sunt variabile independente și că lăsăm la o parte cazul $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ când problema nu are sens.

Se vede imediat că a_i sunt determinate de condiția ca pătratul matricei circulante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} \; a_0 \end{vmatrix}$$

care este tot o matrice circulantă, să fie egal cu k. E unde k este o constantă, iar E matricea unitate.

Să considerăm polinomul

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

şi să efectuăm produsul

$$f^2(x)(1 + x^n) = f(x)[f(x) + x^n f(x)]$$
$$= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{3n-2} x^{3n-2}.$$

Proprietatea de mai sus ne arată că

(1) $$A_{n+1} = A_{n+2} \ldots = A_{2n-1} = 0.$$

Pe de altă parte faptul că acest polimon se divide cu $1 + x^n$ se traduce prin egalităţile

(2) $$A_i - A_{n+i} + A_{2n+i} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-2,$$
$$A_{n-1}, = A_{2n-1}.$$

Din (1) şi (2) se vede că

$$f^2(x) = (1 - x^n)(A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-2} x^{n-2}) + A_n x^n$$

ceeace ne arată că *polinomul* $f^2(x)$ *ia aceeaşi valoare pentru rădăcinile ecuaţiei binoame* $x^n - 1 = 0$.

Cum pe noi nu ne interesează un factor comun de proporţionalitate a constantelor a_i, trebue să luăm

$$f(\alpha^j) = \varepsilon_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

unde α e o rădăcină primitivă de ordinul n a unităţii şi $\varepsilon_j = \pm 1$.

Formula de interpolare a lui LAGRANGE ne dă

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j \alpha^j \frac{x^n - 1}{x - \alpha^j}$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j \alpha^j (\alpha^{(n-1)j} + \alpha^{(n-2)j} x + \ldots + \alpha^j x^{n-2} + x^{n-1})$$

aşa dar valorile constantelor a_i — afară de un factor constant comun — sunt

$$a_l = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j \alpha^{(n-i)j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

sau

$$(3) \qquad a_i = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j \alpha^{ij}, \quad i = 0,1,\ldots,n-1$$

deoarece α fiind o rădăcină primitivă şi α^{-1} este o rădăcină primitivă.

Formulele (3) ne dau toate soluţiunile problemei — afară de un factor constant comun — dând lu ε_j valorile $+1$ şi -1 în toate modurile posibile. Pentru a avea toate soluţiile distincte e suficient a lua $\varepsilon_0 = 1$. Vedem astfel că avem în total 2^{n-1} soluţii distincte. Pentru ca constantele a_i să fie toate reale trebue ca $\varepsilon_j = \varepsilon_{j'}$ când $j + j' - n$ şi vedem deci că problema admite $2^{\frac{n}{2}}$ sau $2^{\frac{n-1}{2}}$ soluţii reale după cum n este par sau impar. In particular pentru n impar avem soluţia simplă

$$a_0 \neq 0, \; a_i = 0, \; i > 0,$$

iar pentru n par avem, pe lângă aceasta, şi soluţia simplă

$$a_{\frac{n}{2}} \neq 0, \; a_i = 0, \; i \neq \frac{n}{2}.$$

Observaţia I. Proprietatea care ne-a permis determinarea polinomului $f(x)$ se poate puţin generaliza.

Fie $Q(x) . R(x) = x^{q+r} + a$, unde $Q(x)$ şi $R(x)$ *sunt polinoame de grad* q *şi* r *respectiv. Dacă în polinomul* $P(x)$ *de gradul* $2q + r$ (adică de grad efectiv cel mult egal cu $2q + r$) *coeficienţii lui* $x^{q+1}, x^{q+2}, \ldots, x^{q+r-1}$ *sunt nuli şi dacă acest polinom se divide cu* $Q(x)$ *atunci câtul ia aceeaşi valoare pentru rădăcinile ecuaţiei* $R(x) = 0$.

Demonstraţia se bazează pe formula de împărţire

$$P(x) = Q(x)\,[U(x) . R(x) + V(x)] = U(x)\,(x^{q+r} + a) + V(x) . Q(x)$$

unde $U(x)$ şi $V(x)$ sunt polinoame de gradul q şi $r - 1$ respectiv. Se vede imediat că $V(x)$ trebue să se reducă la o constantă.

Reciproca e adevărată căci dacă câtul ia aceeaşi valoare pentru rădăcinile polinomului $R(x)$ restul $V(x)$ se reduce la o constantă.

Observaţia II. Problema D-lui G. ŢIŢEICA se poate generaliza şi mai mult. Să considerăm un sistem de m grupuri de câte n variabile $x_i^{(k)}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $k = 1, 2, \ldots, m$ şi să punem

$$F_{i,k} = a_0 x_i^{(k)} + a_1 x_{i+1}^{(k)} + \ldots + a_{n-i-1} x_{n-1}^{(k)} + a_{n-i} x_0^{(k)} + \ldots + a_{n-1} x_{i-1}^{(k)} .$$

Se cere să se determine constantele a_i astfel că dacă avem

$$\frac{x_0^{(k)}}{F_{0,k+1}} = \frac{x_1^{(k)}}{F_{1,k+1}} = \ldots = \frac{x_{n-1}^{(k)}}{F_{n-1,k+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1$$

să avem şi

$$\frac{x_0^{(m)}}{F_{0,1}} = \frac{x_1^{(m)}}{F_{1,1}} = \ldots = \frac{x_{n-1}^{(m)}}{F_{n-1,1}} .$$

Angajăm pe cititori să facă această generalizare care constitue un bun exerciţiu şi o frumoasă aplicaţie a teoriei substituţiilor.

TIBERIU POPOVICIU.

24. *Asupra problemei 4033.*

In afara soluţiei date în G. M., Vol. XXXIX, 152, această problemă se mai poate rezolva, observând cum că ecuaţia ei de condiţie

$$AB = k(A + B)$$

arată că numerele întregi A şi B sunt rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 - hx + hk = 0$$

în care întregul trebue astfel determinat încât rădăcinile acestei ecuaţii să fie întregi, adică astfel încât să avem în primul rând

$$x^2 - 4hk = m^2$$

m fiind deasemeni întreg.

Pentru o asemenea determinare a lui h, n'avem decât să observăm cum că punctele de coordonate raţionale situate pe iperbola

$$X^2 - 4XY = 1$$

sunt toate date de a doua intersecție a acestei iperbole cu dreapta

$$Y = \frac{p}{q}(X - 1)$$

și că deci coordonatele unor astfel de puncte sunt

$$\frac{-q}{q-4p} \; ; \; \frac{2p(2p-q)}{q(q-4p)}$$

cu p și q întregi arbitrari.

Voiu avea prin urmare în mod evident

$$h = -q^2 n$$

$$k = 2p(2p-q)n$$

$$m = q(q-4p)n$$

astfel încât numerele cerute de problemă, vor fi

$$-2pqn \text{ și } (2p-q)qn$$

cu p, q și n întregi arbitrari.

G. G. CONSTANTINESCU.

BIBLIOGRAFIE

Matematica. Volumul XI. Cluj 1935. (Omagiu *Gazetei Matematice* pentru Jubileul de 40 de ani). Sur le potentiel logarithmique d'une couche elliptique, par PIERRE DIVE. Sur l'extension aux espaces (V) les plus généraux des propriétés simples des espaces (V) vérifiant la condition $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$, par ANTOINE APPERT. Sur une propriété fonctionelle de certaines surfaces, par G. JUGA. Ricerche sulle cubiche gobbe in contatto tripunto o quadripunto con le assintotiche di una data superficie, memoria del Prof. RENATO CALAPSO, Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites, par CAIUS JACOB. Apolare und überapolare simplexe, von D. BARBILIAN. Sur les diverses extensions de l'inégalité de BESSEL, par MAURICE FRÉCHET. Quelques propriétés des équations algébriques dont les équations dérivées ont toutes leurs racines réelles, par TIBERIU POPOVICIU. Sur une propriété des ensembles dénombrables denses dans un intervalle, par W.

SIERPINSKI. Sur quelques notions susceptibles d'être prises comme terme primitif dans la théorie des espaces abstraits, par ANTOINE APPERT. Sur une condition suffisante pour qu'un polynome soit positif, par TIBERIU POPOVICIU. Solutions nouvelles de l'équation $\Delta_3 U = O$, par PIERRE HUMBERT. Sur le minimum du module des fonctions entières d'ordre inférieur à un, par G. VALIRON.

Gazeta Matematică. 1895—1935. Istoric-Învățăminte. (Volum jubilar). București 1935. Prefața, de G. ȚIȚEICA. Constituirea, administrarea și redactarea *Gazetei Matematice*, de I. IONESCU. Viața materială a *Gazetei Matematice*, de AL. BUNESCU. Rolul *Gazetei Matematice* în desvoltarea științei matematice în România, de G. ȚIȚEICA. Matematicile și ingineria, de A. G. IOACHIMESCU. Rolul *Gazetei Matematice* în desvoltarea activității inginerești în România, de I. I. CHIȚULESCU. Rolul *Gazetei Matematice* în formarea militarilor, de Maior I. LINTEȘ. Cuprinsul *Gazetei Matematice*, de C. IONESCU-BUJOR. Suplimentele *Gazetei Matematice*, de I. IONESCU. Concursurile *Gazetei Matematice*, de CRISTEA MATEESCU. Premiile *Gazetei Matematice*, de CRISTEA MATEESCU. Corespondenții *Gazetei Matematice*, de O. ȚINO. Sărbătoriri în decursul celor 40 de ani de existență a *Gazetei Matematice*, de Lt.-Comandor Av. GR. ZAPAN. Publicațiile *Gazetei Matematice*, de IOAN BUȘILĂ. Tabla de materii pentru primele 40 de volume ale revistei *Gazeta Matematică:* A. Articole; B. Chestiuni în legătură cu redacția; C. Note matematice; D. Chestiuni de examen; E. Bibliografii; F. Cereri; G. Diverse; H. Probleme propuse și rezolvate; I. Exerciții; J. Suplimente; K. Publicațiuni în afară de *Gazeta Matematică*, de G-ral G. BUICLIU.

Știință și Progres. Anul II. No. 7—8. 15 Decemvrie 1935. Târgul Mureș. Condițiuni ca rădăcinile unei ecuații de gradul al 2-lea să aibă o anumită situație față de numere date, de V. ALACI. Asupra adevăratei valori a unei fracțiuni, de R. BĂDESCU. Asupra numerelor A, de N. O. ZAHARIA.

Journal de Mathématiques élémentaires. Anul 60. No. 5. Decemvrie 1935. Paris.

Numerus. Volumul I. Caietul 6. 15 Decemvrie 1935. București LEONARD EULER (1707—1783). (Extras din Conferința ținută la Societatea Politehnică la 30 Martie 1910, de I. IONESCU). La géométrie du triangle, par TR. LALESCO (urmare).

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXIX. Fascicola VI. Iunie 1935. Buenos Aires.

Idem. Tomul CXIX. Fascicola VII. Iulie 1935. O nouă analiză elastică a structurilor derivată din metode mecanice, de OTTO GOTTSCHALK. Teorema lui ABEL prin serii duble, de J. C. VIGNAUX. Asupra funcțiunilor poligene de una și de diferite variabile complexe, de J. C. VIGNAUX.

Idem. Tomul CXX. Fascicola II. August 1935. Asupra unei teoreme a lui PRINGSHEIM și extensiunea sa la integrale de J. C. VIGNAUX.

Idem. Tomul CXX. Fascicola III. Septembre 1935.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 8. Octomvrie 1935. Buenos Aires. Concepţia generală a puterii, de J. GONZALEZ PERERA. Asupra unor şiruri de W. LEWICKY.

Idem. Anul VIII. No. 9. Noembre 1935. Buenos Aires. Ecuaţii de congruenţe, de M. O. GONZALEZ. Asupra unor şiruri (urmare), de W. LEWICKY.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciţii. Anul II. No. 4. 1 Ianuarie 1936.

Journal de Mathématiques Elémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 60. No. 6. 15 Decemvrie 1935. Paris.

Mathesis. Tomul XLIX. No. 9, Noembre 1935. Gembloux. Asupra afinităţii complexe, de R. GOORMAGHTIGH. Corecţie adusă clasificării suprafeţelor raţionale de ordinul patru făcută de NOETHER, de D-ra LILA GUSSENHOVEN. Asupra tetraedrului isodinamic, de NATHAN ALTSHILLER-COURT. Reducerea la ordinul minimum a sistemelor lineare de curbe algebrice plane, de P. DEFRISE. Asupra descompunerii numerelor într'o sumă de două pătrate, de G. LAMBERT. Supliment oferit de D-l G. FISTIÉ: Chestiunea numerelor ciclice.

Pitagora. Anul I. No. 2. Decembre 1935. Craiova. Linia dreaptă. Suprafaţa triunghiului, de N. BALABAN. Quadraturi, de E. CRĂCIUNESCU. Despre diviziunea expresiilor aritmetice, de N. PAVEL. Teorema lui PTOLOMEU de P. BOLDESCU.

RAMON G. LOYARTE (DR). *Fisica General.* Tomo IV. Universidad Nacional de La Plata. Publicaciones de la Faculdad de Ciencias Fisico-Matematicas. La Plata. 1935. Casa Editora „Tomás Palumbo", La Madrid 321—325. Buenos Aires.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XV. No. 10. 15 Decembre 1935. Dare de seamă despre o lucrare a D-lui Prof. C. O. OAKLEY, (Haverford College), de V. ALACI.

The Mathematical Gazette. Vol. XIX. No. 236. Decembre 1935. London. Invăţământul Analizei Matematice în şcoli, de N. R. C. DOCKERAY. Noţiunea de diferenţială în invăţământ, de J. HADAMARD. Teoreme asupra tetrahedronului, de R. T. ROBINSON.

I. S. ANTONIU. *Méthode de construction graphique de la courbe représentative de la dérivée d'une fonction.* Extras din „Revue Générale de l'Electricité" din 9 Novembre 1935.

CERERI

253. Posed o aritmetică franceză cu 280 pagini în 8°, căreia îi lipseşte pagina cu titlul şi autorul. Fracţiile ordinare încep la pagina 68, sistemul metric la 105, extragerea rădăcinilor la 131, logaritmii la 186, teoria aproximaţiilor la 123, şi asupra proprietăţilor numerelor la 274. Nu are capitole speciale pentru regulile de trei, dobânzi, etc. Asemenea chestiuni sunt tratate printre probleme.

Care este autorul acestei cărţi şi în ce an a apărut?

I. IONESCU.

DIVERSE

In cursul lunii Decemvrie, *Societatea Română de Matematici* a ţinut următoarele şedinţe:

1°. *2 Decemvrie,* au comunicat D-nii: D. BARBILIAN, *«Comentar la problema deformării suprafeţelor tetraedrale»* şi N. CIORĂNESCU, *«Proprietăţi ale funcţiilor analitice de două variabile reale».*

2°. *16 Decemvrie,* au comunicat D-nii: M. GHERMĂNESCU, *«Involuţii excepţionale»* şi M. NICOLESCU, *«O aplicaţie a teoriei familiilor normale la funcţiunile poliarmonice».*

Sporirea Bibliotecii.

Festschrift zur Feier des 200 Geburtstades LEONHARD EULERS. Lipsca 1907.

Donată de I. IONESCU, Inginer.

A. GUTZMER, Geschichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. Lipsca 1904.

Donată de I. IONESCU, Inginer.

* * *

Cărţile ce urmează au fost donate de *Institutul Naţional Român pentru studiul amenajării şi folosirii isvoarelor de energie. (I. N. R.)* prin D-l C. BUŞILĂ, Inginer.

1. — DORIN PAVEL. Râul Sebeş din punctul de vedere al amenajării energiei hidraulice. Bucureşti 1927.

2. — DORIN PAVEL. Problema cavitaţiunilor şi a coroziunilor. Bucureşti 1928.

3. — DORIN PAVEL. Consideraţiuni asupra turbinelor cu apă. Bucureşti 1929.

4. — DORIN PAVEL. Forţele hidraulice disponibile ale României. Bucureşti 1929.

5. — DORIN PAVEL. Capacitatea energetică a României. Bncureşti 1931.

6. — DORIN PAVEL. Plan général d'aménagement des forces hydrauliques en Roumanie. Bucureşti 1933.

7. — DORIN PAVEL. Die Ausbaumöglichkeit der Rumänischen Wasserkräfte. Bucureşti 1934.

8. — DORIN PAVEL. Contribuţie la calculul castelului de apă cel mai economic. Bucureşti 1934.

9. — G. PETRESCU. Considérations sur l'auto-excitation des alternateurs branchés aux lignes de hautes tensions. Bucureşti 1927.

10. — G. PETRESCU. Condiţiunile tehnice ale electrificării liniei Câmpina-Braşov, Bucureşti 1932.

11. — G. PETRESCU. Electrificarea liniei Câmpina-Braşov în cadrul programului de lucrări C. F. R. Bucureşti 1933.

12. — B. POPOVSKY. Alegerea celei mai avantagioase frecuenţe în metalurgie. Bucureşti 1931.

13. — EM. RADOVICI. Raţionalizarea mijloacelor de tracţiune în aplicare la reţeaua C. F. R. Bucureşti 1933.

14. — VLAD RĂDULESCU. Tendinţe actuale în calculul şi construcţia suporţilor metalici pentru linii aeriene. Bucureşti 1932.

15. — C. RARINCESCU. Electrificarea României. Bucureşti 1930.

16. — R. RUDENBERG. Die Influenzwirkung von Blitzschlägen auf benachbarten Freileitungen. Bucureşti 1934.

17. — GH. SAVA. Utilizarea procedeului „Craking" şi prelucrarea derivatelor de petrol. Bucureşti 1929.

18. — GR. SCHILERU. Normalisation de la fréquence dans la centrale électrique et le complexe d'installations d'une entreprise minière. Bucureşti 1932.

19. — D. SERBESCU. Locomotiva electrică din punctul de vedere tehnic. Bucureşti 1933.

20. — V. STARK. La nouvelle centrale electrique de Constantza. La construction et les essais de réception. Bucureşti 1933.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 2861. *Se dă ecuaţia:*

$$x^3 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\,x^2 + px + q = 0,$$

şi se cere să se rezolve în funcţie de q *ştiind că rădăcinile sale* x_1, x_2, x_3 *satisfac relaţiei*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2.$$

GH. ZAPAN.

Soluţie dată de D-nii: M. ADAM, I. CONSTANTINESCU, A. FINŢESCU, I. B. FLORESCU, V. M. FLORESCU, FL. GEORGESCU, V. HARET, ŞT. FL. LĂZĂRESCU, E. MANOLESCU, I. D. PETROVICI, GH. D. POPESCU, T. POPOVICIU, I. RIZESCU şi M. SĂVESCU.

Ţinând seamă de relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii şi de relaţia dată, problema revine la găsirea a trei numere x_1, x_2, x_3 care satisfac relaţiilor

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2),$$

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2,$$

$$(3) \qquad x_1 x_2 x_3 = -q.$$

(Relaţia a doua între rădăcini şi coeficienţi nu o vom folosi deoarece rezultatele nu trebuesc să conţină pe *p*).

Relaţia (1) se mai scrie

$$(1') \qquad \frac{3}{2}(x_1 + x_2) = -x_3$$

care ne dă

$$(4) \qquad (x_1 + x_2)^2 = \frac{4x_3^2}{9}.$$

Relaţia (2) o scriem sub forma

$$(x_1 + x_2)^2 + x_3^2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2,$$

unde ţinând seamă de (4) se găseşte, după ce facem toate calculele,

$$4x_3^2 = 3x_1 x_2.$$

Cu ajutorul lui (3) această relaţie devine

$$x_3^3 = -\frac{3}{4}q,$$

de unde scoatem pentru x_3 valorile

$$(5) \qquad x_3 = -\sqrt[3]{\frac{3q}{4}} \cdot \varepsilon$$

ε fiind una din rădăcinile cubice ale unității.

Pentru a găsi pe x_1 și x_2 vom ține seamă de (1') și (3) unde vom înlocui pe x_3 prin valorile găsite. Avem

$$x_1 + x_2 = \sqrt[3]{\frac{2q}{9}} \cdot \varepsilon ,$$

$$x_1 x_2 = \sqrt[3]{\frac{4q^2}{3}} \cdot \varepsilon^2 ,$$

în loc de $\frac{1}{\varepsilon}$ am pus ε^2 deoarece: $\varepsilon^3 = 1$. Rezultă că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației

$$z^2 - \sqrt[3]{\frac{2q}{9}} \cdot \varepsilon z + \sqrt[3]{\frac{4q^2}{3}} \cdot \varepsilon^2 = 0 .$$

Rezolvând această ecuație găsim după ce am făcut toate calculele

$$(5') \qquad x \ , \ x_2 = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{q}{36}} \left(1 \pm i\sqrt{11}\right) .$$

Rădăcinile ecuației sunt date de (5) și (5'). Avem trei serii de soluții deoarece ε are trei valori.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3045. *Fie* α, β, γ *proiecțiile pe laturile* BC, CA, AB *ale centrului* ω *al cercului celor nouă puncte al triunghiului* ABC. *Să se determine relațiile dintre elementele triunghiurilor* ABC *și* $\alpha\beta\gamma$. *Să se construiască triunghiul* ABC, *când se cunoaște triunghiul* $\alpha\beta\gamma$.

A. CLUJANU.

1°. Fie A_m, B_m, C_m și A_h, B_h, C_h vârfurile triunghiului median și al triunghiului ortic, O centrul cercului circumscris de rază

R, H ortocentrul, G centrul de greutate, S suprafaţa şi θ unghiul lui BROCARD al unui triunghiu ABC.

Se observă pe figură că

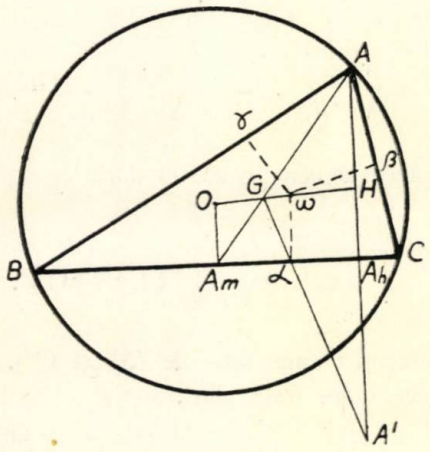
$$\omega\alpha = \tfrac{1}{2}(OA_m + HA_h) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(AA_h - HA_h) + HA_h]$$
$$= \tfrac{1}{4}(AA_h + HA_h).$$

La fel

$$\omega\beta = \tfrac{1}{4}(BB_h + HB_h), \quad \omega\gamma = \tfrac{1}{4}(CC_h\, HC_h)$$

şi dacă A', B', C' sunt simetricele lui A, B, C faţă de laturile triunghiului ABC, atunci relaţiile precedente dau

$$\omega\alpha = \frac{HA'}{4}, \quad \omega\beta = \frac{HB'}{4}, \quad \omega\gamma = \frac{HC'}{4}.$$



Fiindcă

$$\frac{G\omega}{GH} = \frac{1}{4} = \frac{\omega\alpha}{HA'}$$

rezultă că A'α trece prin G şi că triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ şi A'B'C' se corespund în omotetia $(G, \tfrac{1}{4})$ [1]).

Acest rezultat identifică problema 3045 cu problema cunoscută sub numele *The problem of three images,* care a ocupat mulţi geometri [2]).

---

1) V. THÉBAULT. *Mathésis.* 1922 — 401.

2) A se vedea *Mathésis* 1922 — 328 pentru o bibliografie a problemei.

Iată câteva relaţiuni între elementele triunghiului ABC şi ale triunghiului A'B'C', elementele acestuia din urmă fiind notate prin litere cu accent.

$$S' = S(3 + 8\cos A \cos B \cos C)$$

$$a'^2 = a^2 + 8S \sin 2A$$

$$\frac{a'^2}{a^2} + \frac{b'^2}{b^2} + \frac{c'^2}{c^2} = 11 + 8\cos A \cos B \cos C$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 4S \operatorname{cotg}\theta + 16\frac{S^2}{R^2}\ ^{1})$$

$$\frac{a'}{a \,.\, Aw} = \frac{b'}{b \,.\, Bw} = \frac{c'}{c \,.\, Cw} = \frac{2}{R}\ ^{2}) \,.$$

Toate aceste relaţiuni se aplică cu uşurinţă triunghiurilor ABC, $\alpha\beta\gamma$, acesta din urmă fiind, după cum s'a văzut, omotetic cu A'B'C'.

2^0. Construcţia triunghiului ABC, atunci când se cunoaşte $\alpha\beta\gamma$ se aduce deci la *construcţia lui* ABC *atunci când se cunoaşte* A', B', C', care este *problema celor trei imagini,* propusă de WAFFELBAKKER în *Intermédiaire des Mathématiciens* 1900 pag. 356.

G. ESPANET [3]) a arătat că această problemă depinde de o ecuaţie de gradul 7, în general nereductibilă, şi deci nu poate fi rezolvată geometric cu rigla şi compasul.

D-l P. HENDLÉ a dat în *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1918 pag. 40 aceleiaşi probleme următoarea soluţie :

Notând cu x, y, z, valorile laturilor BC, CA, AB avem

$$AB' = z \quad , \quad AC' = y \quad , \quad \sphericalangle B'AC' = 2\pi - 3A$$

$$\therefore \quad y^2 + z^2 - 2yz\cos^3 A = a'^2. \qquad (1)$$

Dar

$$\cos^3 A = \cos A(4\cos^2 A - 3)$$

$$2yz\cos A = -x^2 + y^2 + z^2$$

aşa că

$$(-x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4y^2z^2(y^2 + z^2) + a'^2y^2z^2 = 0. \qquad (2)$$

---

1) *Intermédiaire des Mathématiciens,* 1900 — 356.

2) *Mathésis,* 1922 — 38 şi 1932, (V. THÉBAULT, supliment).

3) DAVIS *Educational Times,* 1815 — 305 şi V. THÉBAULT, *Gazeta Matematică* XXXIII — 283.

Insemnând, pentru a simplifica calculele,

$$x^2 = x \quad , \quad y^2 = y \quad , \quad z^2 = z$$
$$a'^2 = 4a \quad , \quad b'^2 = 4b \quad , \quad c'^2 = 4c$$

unde a, b, c nu sunt laturile lui ABC, vom avea:

$$(-x+y+z)^3 - 4yz(y^2+z^2) + 4ayz = 0 \qquad (3)$$

şi încă 2 ecuaţii analoage. Acest sistem admite soluţia

$$x = y = z = 0$$

străină problemei geometrice. Adunând ecuaţiile (3) două câte două se obţine sistemul

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-6yz-2zxy-2xy+2cy+2bz=0 \\ x^2+y^2+z^2-6zx-2xyz-2yz+2az+2cx=0 \\ x^2+y^2+z^2-6xy-2yzx-2zx+2bx+2ay=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Aceste ecuaţii reprezintă 3 hiperboloizi cu o pânză care trece prin origine şi mai dau 7 puncte de intersecţie, reale sau imaginare, dând 7 grupe de valori pentru x, y şi z.

Remarcăm că aceste puncte sunt de asemeni şi pe cuartica ce se obţine adunând ecuaţiile (4), cuartică care este o suprafaţă de revoluţie în jurul unei paralele la dreapta

$$x = y = z.$$

Să punem

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy = -\frac{abc}{t} \qquad (5)$$

$$T = t(t-a)(t-b)(t-c). \qquad (6)$$

Din (4), (5) şi (6) se deduce

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{T}}{t(t-a)}\right] \\ y &= \frac{b}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{T}}{t(t-b)}\right] \\ z &= \frac{c}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{T}}{t(t-c)}\right] \end{aligned} \qquad (7)$$

Ducând aceste valori în una oarecare din ecuațiile (4) se găsește

$$(2A_2t^4 + A_3t^3 + A_4t^2 + A_5t + A_6)^2$$
$$- 4t(t-a)(t-b)(t-c)(A_2t^2 + A_1)^2 = 0 \qquad (8)$$

ecuațiile de gradul 7 în care A_i sunt funcții simetrice de a, b, c.

Pentru ca triunghiul căutat să poată fi construit trebue ca o rădăcină reală să facă pe x, y, z pozitivi și $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{z}$ să răspundă condițiilor de neegalitate între laturile unui triunghiu ceeace conduce la neegalități complicate între a', b', c'.

Odată determinați x, y, z se va construi un triunghiu $A_1B_1C_1$ egal cu ABC căutat, vârfurile succedându-se în ordinea și în sensul de rotație A'B'C'.

Aceasta e soluția D-lui P. HENDLÉ.

Acum pentru a situa triunghiul $A_1B_1C_1$ față de $\alpha\beta\gamma$ dat în problema 3045, se va construi triunghiul $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ corespunzător lui $A_1B_1C_1$ și se aduce $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ prin o tranzlație și o rotație peste $\alpha\beta\gamma$.

Noua poziție a lui $A_1B_1C_1$ va fi triunghiul ABC ce se cere a fi construit.

V. THÉBAULT.

PROBLEMA 4046. *Se cer toate valorile întregi și pozitive ale lui* **x** *pentru care suma*

$$S = 51x^3 - 72x^2 + 342x + 39$$

se divide prin 360.

G-L GH. BUICLIU.

Suma dată se mai poate scrie sub formele:

$$S = 3\{(x-1)[(x-1)(18x+9)+117]+120-(x-1)^3\}. \qquad (1)$$

$$S = 3\{(x-1)[5(3x^2-x+21)+2(x^2-x+1)]+120\}. \qquad (2)$$

Avem $320 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Se vede din (1) că S se divide prin 9 numai dacă $x-1$ se divide prin 3.

Dacă se dau lui x valori de forma $5m \pm 1$ și $5m \pm 2$ se găsește că $x^2 - x + 1$ este prim cu 5 și atunci, se deduce din (2) că S se divide prin 5 numai dacă $x-1$ se divide prin 5.

Apoi, de oarece 120 se divide prin 8, iar

$$5(3x^2 - x + 21) + 2(x^2 - x + 1)$$

este totdeauna nepereche, rezultă de asemeni că S se divide prin 8 numai când $x - 1$ se divide prin 8.

Am ajuns la concluzia că $x - 1$ trebue să se dividă prin 8, 9 şi 5, deci

$$x - 1 = 120p \quad \therefore \quad x = 120p + 1$$

unde p este un întreg pozitiv oarecare.

Au rezolvat foarte bine problema pe diferite căi, D-nii: N. N. ALDEA, H. P. IONESCU-BISS, N. N MIHĂILEANU, ST. E. OLTEANU şi I. C. PAREPEANU.

PROBLEMA 4332. *Care sunt numerele întregi divizibile prin rădăcina cubică a lor cu aproximaţie de o unitate?*

Care sunt acelea la care această rădăcină este cel mai mic divizor superior unităţii?

V. THÉBAULT.

1°. Fie N numărul căutat, a şi r rădăcina sa cubică cu aproximaţie de o unitate în minus şi restul. Conform enunţului

$$N = \text{mult. } a = a^3 + r \tag{1}$$

$$\therefore \quad r = ka \tag{2}$$

unde k este un întreg. — Se ştie apoi că

$$a^3 \leqslant N < (a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

şi ţinând seamă de (1) şi (2)

$$r = ka \leqslant 3a^2 + 3a + 1$$

$$k \leqslant 3(a+1) + \frac{1}{a} \cdot \tag{3}$$

Deci numerele N care se divid prin rădăcina lor cubică cu aproximaţie de o unitate în plus sunt date de formula

$$N = a(a^2 + k) \tag{4}$$

în care a este un întreg oarecare, iar k ia valorile $0, 1, \ldots 3(a+1)$.

Se vede că la o valoare dată pentru a sunt $3(a+1)+1$ numere care răspund primei părți a problemei. Aceste numere formează o progresie aritmetică cu rația a, primul și ultimul termen fiind respectiv a^3 și $(a+1)^3$.

2^0. Pentru ca numărul

$$N = a(a^3 + k)$$

dat de (4) să aibă pe a ca cel mai mic divizor > 1 trebue ca:

a) **a** *să fie prim*

b) $\mathbf{a^2 + k}$ *să nu aibă divizori mai mici decât* **a.**

Fie **a** *pereche.* Cel mai mic și singurul număr prim pereche fiind 2, avem $a = 2$ și după *b*) rezultă că vom lua pentru k numai valorile neperechi (cu excepția lui zero) din șirul 0, 1, 2, . . . , 9 al valorilor pe care le poate avea k după (4). — Avem prin urmare următoarele 6 soluțiuni perechi pentru N

$$2^3 = 8\ ;\ 2(2^2+1) = 10\ ;\ 2(2^2+3) = 14\ ;\ 2(2^2+5) = 18$$

$$2(2^2+7) = 22 \quad \text{și} \quad 2(2^2+9) = 26.$$

Fie **a** *nepereche* și prim; rezultă k pereche căci altfel $a^2 + k$, ar avea divizorul $2 < a$. Pentru ca a să fie cel mai mic divizor al lui $a(a^2 + k)$ trebue ca $a^2 + k$ să nu aibă divizori mai mici decât a. Nu se poate da o formulă generală a numerelor neperechi $a^2 + k$ care să nu aibă divizori mai mici ca a. Se vor examina diferitele cazuri în parte după valorile lui a. De exemplu pentru $a = 3$ sunt soluții ale problemei toate numerele $3(3^2 + k)$ pentru $k = 0$ și pereche, căci divizor nepereche mai mic ca 3 nu există. Deci soluțiile:

$$3^3 = 27;\ 3(3^2+2) = 33;\ 3(3^2+4) = 39;\ 3(3^2+6) = 45;$$

$$3(3^2+8) = 51;\ 3(3^2+10) = 57 \quad \text{și} \quad 3(3^2+12) = 63.$$

Pentru $a = 7$, se elimină numerele $7^2 + k$, divizibile prin 3 și prin 5, și rămân soluțiile

$$7^3 = 343;\quad 7(7^2+4) = 371;\quad 7(7^2+10) = 413;$$

$$7(7^2+12) = 427;\quad 7(7^2+18) = 469;\quad 7(7^2+22) = 497;$$

$$7(7^2+24) = 511$$

și așa mai departe.

Problema este foarte nedeterminată pentru cazul 2^0 și a nepereche.

Notă. 1°. D-l V. THÉBAULT propunătorul problemei, a trimis o soluţie în care dă numai numerele

$$a^3 \; ; \; a^3 + a \; ; \; a^3 + 3a, \; a^3 + a^2 + a \quad \text{şi} \quad a^3 + 3a + 3a^2$$

pentru partea întâi şi soluţiile 10 şi 14 pentru partea a doua. D-sa îşi pune aceleaşi întrebări pentru pătrate şi indică metoda de urmat pentru rezolvarea problemei.

3°. S'a primit şi o soluţie cu totul parţială, din care cauză nu citez numele autorului.

4°. Pe o cale absolut identică soluţiei ce am dat mai sus se poate rezolva problema pentru cazul când s'ar considera rădăcina cubică cu aproximaţie de o unitate în plus sau pentru rădăcini de un ordin superior lui 3.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4382. *Să se rezolve problema următoare, pe care o extrag din o aritmetică pentru clasele inferioare ale şcoalelor profesionale de fete:*

«Un cablu electric compus din 48 de fire de câte 3 mm. diametru a fost înfăşurat de 73 de ori neîntrerupt dintr'un capăt într'altul al unui drug. Care-i lungimea drugului?»

I. IONESCU.

Considerând o secţiune dreaptă în cablul circular, prima chestiune care se pune este modul de aranjare a 48 de cercuri egale astfel ca să poată fi închise într'un alt cerc de diametru cât mai mic şi să formeze un tot indeformabil. Aranjamentul este următorul:

In jurul primului cerculeţ (Fig. 1) se aşează alte 6 tangente lui.

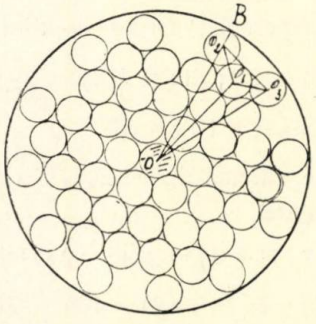


Fig. 1.

După proprietăţile exagonului regulat fiecare din aceste 6 cerculeţe, va mai fi tangent şi la cerculeţele între care se află. Se duc dreptele care unesc centrul cercului central cu centrele celor 6 construite.

Se descriu 6 cercuri noi cu centrele pe aceste drepte şi tangente celor 6 cercuri construite mai înainte. Între două din aceste cercuri încap alte două, tangente lor şi între ele, precum şi la două din cercurile primei serii de 6. Obţinem astfel un exagon format din 12 cercuri. Până acum avem 19 cercuri. In acelaşi mod circumscriem acestui exagon un alt exagon de 18 cercuri, deci în total am obţinut 37 de cercuri. In jurul fiecăruia din cercurile de vârf de exagon se descriu câte două cercuri tangente la el şi la câte un cerc vecin. Se obţin 12 cercuri; deci în total 49 de cercuri. Se scoate cercul din centru şi ne rămân 48.

Spaţiile libere sunt minime, căci afară de mijloc şi margini, trei cercuri, ale căror centre sunt vârfurile unui triunghiu echilateral, închid între ele un triunghiu curbiliniu de suprafaţă minimă. Se vede apoi că poziţiunea relativă a cercurilor nu se deranjează dacă le strângem cu un alt cerc.

Pentru calculul razei interioare a cablului OB avem:

$$OB = OO_2 + O_2B,$$

unde $O_2B = r = 1{,}5$ mm, căci este raza secţiunii unui fir. In triunghiul OO_1O_2 avem $OO_1 = 6r$, $O_1O_2 = 2r$, $\sphericalangle OO_1O_2 = 120^0$.

Deci:

$$\overline{OO_2^2} = \overline{OO_1^2} + \overline{O_1O_2^2} - 2 \cdot \overline{O_1O_2} \cdot \overline{OO_2} \cdot \cos \widehat{OO_1O_2}$$

$$= 36r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 6r \cdot 2r \left(-\tfrac{1}{2}\right) = 52r^2,$$

$$\therefore \quad OO_2 = 2r\sqrt{13}, \quad OC = r(1 + 2\sqrt{13}).$$

Raza R a cablului se compune din OC şi din *e*, grosimea peretelui cablului. Vom presupune, pentru simplificare, că neglijăm la calcul contracţiile firelor ce vin în spre drug şi dilataţiile celor opuse şi vom considera că axa cablului se înfăşoară pe elicea înfăşurată pe cilindrul cu diametrul (D + 2R) în care D este diametrul drugului. Fie *p* pasul elicei (Fig. 2) egal cu EH. Dacă desfăşurăm elicea pe un plan, ea devine o dreaptă înclinată cu α pe desfăşurarea secţiunilor plane. Se vede că avem:

$$p = \pi (D + 2R) \operatorname{tg}\alpha.$$

Fie FH perpendiculara dusă din H pe EC. Ea măsoară depărtarea între axele a două spire consective ale cablului înfăşurat pe drug, şi deci este cât 2R. Triunghiul EFH ne dă atunci:

$$FH = 2R = CH \sin\alpha = \pi (D + 2R) \sin\alpha,$$

$$\therefore \quad \sin\alpha = 2R/\pi (D + 2R),$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha / \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 2R / \sqrt{\pi^2 D (D + 4R) + 4R^2 (\pi^2 - 1)}.$$

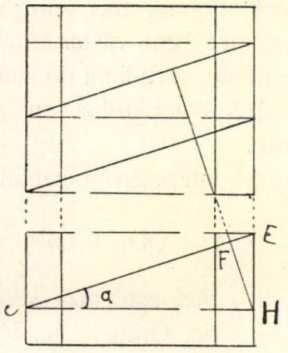


Fig. 2.

Fie acum L lungimea drugului, şi n numărul învârtiturilor cablului pe el (dat 73 în enunţul problemei). Avem $L = (n + 1) p$. Deci:

$$L = 2\pi (n + 1) R (D + 2R) / \sqrt{\pi^2 D (D + 4R) + 4R^2 (\pi^2 - 1)}.$$

Prin enunţ ni s'a dat $r = 1{,}5$ mm, $n = 73$. Nu cunoaştem pe e şi pe D. Enunţul problemei este prin urmare incomplect.

Notă. Felul cum am aranjat firele în cablu ne arată că mai putem introduce 7 fire în cablu fără a-i mări diametrul D, mai punând un fir la mijloc şi 6 pe de mărgini. Pentru orice alt aranjament problema se poate trata la fel. Am încercat să le aşez în dreptunghiuri concentrice, servindu-mă de piesele unui joc de table, dar nu am reuşit să găsesc un sistem indeformabil. Am găsit soluţia dată, bine înţeles nu fără multe încercări.

MAZILU C. PANAIT.
(Elev inginer).

Observare. — Foarte mulți părinți mi s'au plâns că se dau copiilor din Liceu și Școli profesionale probleme pe care nu le pot face pentru că le lipsesc date sau cunoștințele necesare pentru a le rezolva. Problema de față este un asemenea exemplu. La alte probleme răspunsurile nu sunt exacte și copiii se muncesc mult ca să găsească o soluție care să-i ducă la rezultatele neexacte din carte! Leacul ar fi ca profesorii să nu dea să se facă probleme pe care nu le-au deslegat ei mai înainte.

. I.

PROBLEMA 4493. *In orice triunghiu există relația :*

$$\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C \geqslant 4.$$

AL. A. ROȘU.

I. *Soluție* dată de D-nii: PETRU P. COJOCARU (Piatra-Neamț), EMIL DE HERBAY (Liceul Militar Iași) și TUDOR STOICESCU.

Dacă în inegalitatea cunoscută

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$$

facem

$$a = \operatorname{cotg} A \quad ; \quad b = \operatorname{cotg} B \quad ; \quad c = \operatorname{cotg} C$$

obținem:

$$\operatorname{cotg}^2 A + \operatorname{cotg}^2 B + \operatorname{cotg}^2 C \geqslant \Sigma \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B.$$

Observând că

$$\Sigma \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B = 1$$

inegalitatea devine:

$$\operatorname{cotg}^2 A + \operatorname{cotg}^2 B + \operatorname{cotg}^2 C \geqslant 1$$

sau adunând în ambii membri 3 și ținând seamă de relațiile

$$1 + \operatorname{cotg}^2 A = \operatorname{cosec}^2 A, \text{ etc}$$

obținem tocmai inegalitatea din enunț:

$$\operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 B + \operatorname{cosec}^2 C \geqslant 4.$$

Egalitatea având loc în cazul când $a = b = c$, adică

$$\text{cotg}A = \text{cotg}B = \text{cotg}C$$

care are loc în cazul triunghiului echilateral.

Observații. 1. Au verificat inegalitatea din enunț D-nii: BOGDAN GR., BUZINCU I. I., ENACHE IORDACHE, ENĂȘESCU D. V., (Liceul Militar Iași), FLORESCU L. V., (Liceul Militar M. D.), MIHALCEA ȘT. D., STREDER I., (Liceul Militar Iași).

2. D-nii COTESCU S. CONST., (Bacău) și BUCUR N. VIRGIL (elev clasa VI, L. M. Iași), au adus inegalitatea din enunț sub forma:

$$\text{cotg}^2 A + \text{cotg}^2 B + \text{cotg}^2 C \geqslant 1$$

demonstrând această inegalitate prin identitatea

$$\text{cotg}^2 A + \text{cotg}^2 B + \text{cotg}^2 C = 1 + \tfrac{1}{2} \sum (\text{cotg}A - \text{cotg}B)^2.$$

3. Inegalitatea

$$\text{cotg}^2 A + \text{cotg}^2 B + \text{cotg}^2 C \geqslant 1$$

se găsește în Culegere de Probleme I. T. I. C. Aritmetica XVII.

4. D-l TUDOR STOICESCU demonstrează și

$$\text{cosec}^2 mA + \text{cosec}^2 mB + \text{cosec}^2 mC \geqslant 4.$$

5. D-l BELLOIU N. COSTICĂ, student Școala Politehnică București transformând cosec . în cos . cu ajutorul formulei

$$\frac{1}{1 - \cos^2 A} = \text{cosec}^2 A$$

ajunge după laborioase calcule la inegalitatea

$$\cos^2 A \cos^2 B + \cos^2 B \cos^2 C + \cos^2 C \cos^2 A \leqslant \cos^4 A + \cos^4 B + \cos^4 C$$

pe care o consideră evidentă, căci dându-i câteva valori o găsește verificată !!.

6. O soluție cu ajutorul unei teoreme de Minim este următoarea:

M fiind maximum lui $\sum_1^n x_i$, atunci minimum lui $\sum_1^n \frac{1}{x_i}$, dacă va avea loc în același timp cu acel maxim (pentru

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n \quad ; \quad \text{și } x_i > 0)$$

va fi

$$m = \frac{n^2}{M} .$$

Aplicând această teoremă la Maximum lui $E = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ care este $M = \frac{9}{4}$ (G. M. XVII. Problema 1606) minimum lui

$$\text{cosec}^2 A + \text{cosec}^2 B + \text{cosec}^2 C$$

va fi $m = 4$ și va avea loc pentru triunghiul echilateral.

AL. A. ROȘU.

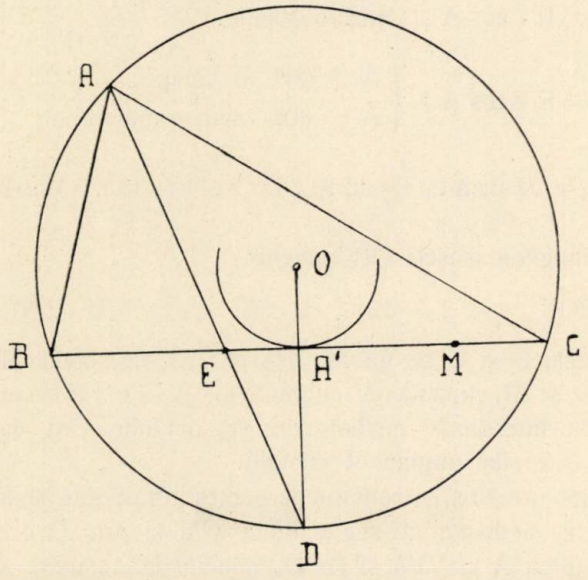
PROBLEMA 4538. *Să se construiască un triunghiu înscris într'un cerc dat, cunoscând raportul a două laturi, unghiul lor şi un punct oarecare* M *depe latura a treia (sau prelungirea ei).*

PETRE TROFIMOV.

Soluţia I dată de D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila), RADU V. APOSTOL (lic. mil. «N. Filipescu»), VILHELM CSEKE (student Cluj), N. D. ŞTEFĂNESCU (lic. mil. «N. Filipescu), PANAIT C. MAZILU şi V. CEAUŞESCU.

Presupunem date cercul O, unghiul A, raportul $\frac{\gamma}{c} = K$ şi punctul M. Inscriem în cercul O un unghiu egal cu $\measuredangle A$, având vârful într'un punct A_1 pe cerc. Laturile acestui unghiu vor intersecta din nou cercul în B_1 şi C_1 şi vom avea:

$$\measuredangle A = \frac{\text{măs. arc. } B_1 C_1}{2}$$



Să ducem cercul (Γ) cu centrul în O, tangent la coarda $B_1 C_1$. Toate coardele cercului O, tangenta la (Γ) vor avea aceeaşi lungime ca $\overline{B_1 C_1}$ şi vor subîntinde arce egale cu arc. $B_1 C_1$.

Ca să construim triunghiul cerut, vom duce din M coardele tangente la cercul (Γ). Fie BC una din aceste coarde şi A' punctul

de contact cu cercul (Γ). OA' tae cercul O în D. Construim punctul E care împarte segmentul BC în raportul $\frac{CE}{EB} = K$ şi ducem dreapta DE care va tăia cercul O în A. Triunghiul ABC este cel căutat căci: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle A$ şi AD fiind bisectoare avem:

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{CE}{EB} = K.$$

Observaţie. Dreapta OA' tae cercul O în două puncte. Dacă unghiul A e ascuţit vom lua punctul D de aceeaşi parte cu A' faţă de centrul O; dacă $\sphericalangle A$ e obtuz vom lua punctul D opus lui A' faţă de O.

Discuţie. După numărul tangentelor ce se pot duce din M la cercul (Γ) putem avea următoarele cazuri:

$OM > R \mid \cos A \mid$ două soluţii simetrice faţă de OM

$OM < R \mid \cos A \mid$ nici o soluţie.

$OM = R \mid \cos A \mid \begin{cases} \hat{A} \neq 90^0 & \text{o soluţie} \\ \hat{A} = 90^0 & \text{nedeterminare.} \end{cases}$

Soluţia II dată de D-nul AL. D. STOICA (lic. «Marele Voevod Mihai»).

In triunghiul isoscel OBC avem:

$\sphericalangle BOC = \sphericalangle 2A$ deci: $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = 90^0 - \hat{A}$.

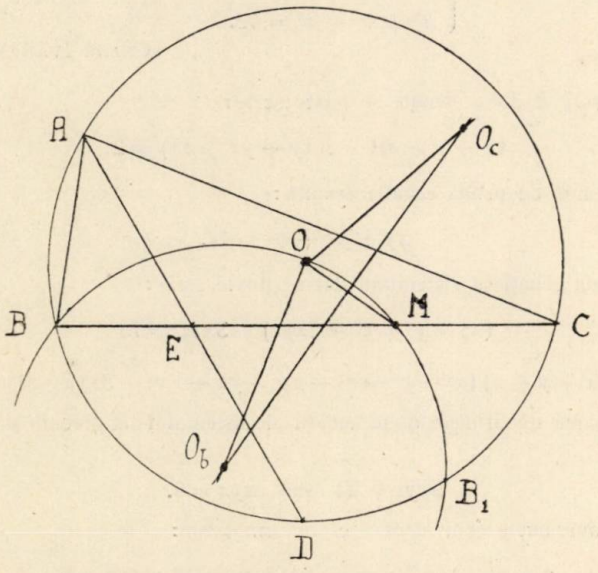
Punctele B şi C se găsesc aşa dar pe segmentele de cerc ce trec prin O şi M, capabile de unghiul $90^0 - A$, ale căror centre O_b şi O_c vor fi la intersecţia mediatoarei segmentului OM cu dreptele duse prin O ce fac unghiul A cu OM.

Rezultă următoarea construcţie pentru a găsi poziţia laturei BC.

Ducem mediatoarea segmentului OM şi prin O dreapta OO_b ce face unghiul A cu OM şi fie O_b punctul lor comun. Construim cercul ce trece prin O şi M cu centrul în O_b, care va tăia cercul O în 2 puncte B şi B_1. Dreptele BM şi B_1M vor tăia din nou cercul O în C şi C_1, iar coardele BC şi B_1C_1 sunt laturile opuse unghiului A în cele două soluţii ale problemei. Ca verificare cercul de centru O_c trecând prin O şi M trebue să treacă prin C şi C_1.

Restul construcției ca la soluția I.

Observație. La această soluție discuția se poate face observând că poziția limită dela care nu mai avem soluții este când cercul (O_b) e tangent la cercul O.



Raza cercului (O_b) este $R_b = \frac{OM}{2\cos A}$. Regăsim discuția dela soluția I după cum $R \gtrless 2R_b = \frac{OM}{\cos A}$.

G. D. S.

EXERCIȚII

8. Cercurile ce trec prin vârfurile A, B, C ale triunghiului de referință, prin mijloacele laturilor opuse și tăind diametral cercul circumscris O, întâlnesc a doua oară laturile corespunzătoare, în trei puncte α, β, γ coliniare pe inversul axului ortic al triunghiului.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Cevienele AO, Aα sunt conjugate armonic.

9. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 73. \end{cases}$$

CEZAR IVĂNESCU.

Soluţie: A doua ecuaţie se poate scrie:

$$(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 21$$

şi ţinând seamă de prima ecuaţie rezultă:

$$xy + yz + zx = 14. \tag{1}$$

A treia ecuaţie a sistemului dat se poate scrie:

$$(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) + 3xyz = 73$$

sau

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz + 73$$

şi ţinând seamă de primele două ecuaţii ale sistemului dat precum şi ecuaţia (1) avem:

$$3xyz = 24 \quad \text{sau} \quad xyz = 8.$$

Sistemul dat e echivalent deci cu următorul:

$$x + y + z = 7 \; ; \; xy + yz + zx = 14 \; ; \; xyz = 8,$$

x, y, z sunt rădăcinile ecuaţiei

$$t^3 - 7t^2 + 14t - 8 = 0 \tag{2}$$

adică respectiv 1, 2, 4 căci ecuaţia de mai sus se poate scrie

$$(t - 1)(t - 2)(t - 4) = 0.$$

Avem deci $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ şi fiindcă sistemul dat e simetric în raport cu x, y, z putem permuta circular valorile găsite.

PROBLEME PROPUSE

4615. Un poligon convex este înscris într'un dreptunghiu, astfel că pe laturile dreptunghiului se găseşte cel puţin un vârf al poligonului. In aceste condiţiuni, care este poligonul înscris cu perimetrul cel mai mic?

I. IONESCU.

4616. Să se rezolve în numere întregi şi pozitive ecuaţia:

$$x^2(x^2+y^2)+x^2(2xy+z)+xyz=1.$$

GH. VASILIU.

4617. Să se reconstruiască triunghiul ABC măsurându-i înălţimile AA' , CC' şi unghiul ABC.

O. N. ŢINO.

4618. Se dă triunghiul ABC dreptunghic isoscel cu catetele AB , AC egale cu 1. Fie O mijlocul lui AB şi M un punct mobil pe BC. Se proectează M în P pe AC şi P în Q pe OM. Să se găsească locul lui Q şi să se separe curba locului după poziţiile lui M pe ipotenuza BC sau pe prelungirile ei.

G-L GH. BUICLIU.

4619. Fie T_1 triunghiul format prin întâlnirea laturilor corespunzătoare a două triunghiuri egale şi înscrise în acelaş cerc O; T_2 triunghiul format de dreptele ce unesc vârfurile corespunzătoare ale celor două triunghiuri.

Să se arate că triunghiurile T_1 şi T_2 sunt omologice, iar axa de omologie e perpendiculară pe dreapta ce uneşte cercul circumscris triunghiului T_1 cu centrul cercului O.

C. IONESCU-BUJOR.

4620. Cevienele unui punct P al cubicei lui DARBOUX, a triunghiului ABC întâlnesc cercul circumscris O în punctele A_1, B_1, C_1. Triunghiul format de ortopolurile laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$ faţă de ABC şi triunghiul ABC sunt izolineare.

N. BOTEA.

4621. Perpendiculara dusă din piciorul uneia din înălţimile triunghiului, pe dreapta care uneşte ortocentrul cu mijlocul laturei corespunzătoare, formează împreună cu celelalte două laturi, un triunghiu, al cărui cerc circumscris taie cercul circumscris triunghiului de referinţă, după simediana vârfului respectiv.

N. N. MIHĂILEANU.

4622. *a, b, c* fiind laturile unui triunghiu, să se arate că avem, oricare ar fi unghiul φ, inegalitatea

$$a^2 \leqq \frac{b^2}{\cos^2\varphi} + \frac{c^2}{\sin^2\varphi} \cdot$$

N. CIORĂNESCU.

4623. Știind că x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației

$$x^2 - mx + 2 = 0,$$

să se determine m astfel încât să avem:

$$x_1^3 + x_2^3 > m^2.$$

MAIOR I. LINTEȘ.

4624. Să se calculeze suma:

$$1 + 2(1 + 2) + 3(1 + 2 + 3) + \ldots + n(1 + 2 + 3 + \ldots + n).$$

V. THÉBAULT.

4625. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 X = \sin\frac{2X}{3} \cdot$$

ION C. SCHILERU-DILI.

4626. Intr'un triunghiu ABC se consideră dreapta AM așa fel ca:

$$\text{Supr. } ABM = m \text{ supr. } AMC.$$

In mod analog se determină dreptele BN și CP. Să se arate că:

$$1^0. \quad \overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 + \overline{CP}^2 = \frac{m^2 + m + 1}{(m+1)^2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$2^0. \quad \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{m-1}{m+1}(\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C),$$

unde α este unghiul ce AM face cu BC, etc.

GH. TH. GHEORGHIU.

Erată. In enunțul problemei Nr. 4607 apărută în numărul precedent să se citească „isoscele asemenea" la începutul rândului 2.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu Marcel (4524, 41, 57, 70); *Antonescu E.* (4600); *Apostol V. R.* (4570); *Begu Şt.* (4570); *Blaga Em.* (4507, 20, 24); *Bogdan I.* (4387, 507, 70); *Boian I.* (4379); *Boiangiu Gh.* (4570); *Bucur N. Virgiliu* (4507, 20, 24, 70); *Bursan Călin* (4570); *Buzincu I.* (4507, 20, 70); *Caraman V.* (4520); *Ceauşescu V.* (4520, 24, 70); *Cercelaru D.* (4565, 70); *Chiriţă M.* (4308, 86, 410, 506, 24, 43, 57, 70, 99, 611, P); *Cioc D.* (4520); *Ciucă I.* (4570); *Cojocaru P.* (4387, 460, 506, 18, 24, 43, 56, 57, 70, P); *Constantinescu G.* (3650, 75); *Cornăţeanu Aurel* (4507); *Cotescu C.* (4375, 78, 460, 507, 20, 24, 43, 70); *Cseke W.* (4557); *Dobrescu P.* (4524); *Enache I.* (4458, 507, 70); *Florescu Victor* (4524, 70); *Ghişoiu Cornel* (4507, 68, 70); *Grabovschi E.* (4520, 70); *Grumăzescu Mircea* (4456, 71, 544, 45, 49, 56, 68); *Hortopan G.* (1405); *Ianculescu I. Octav* (4557, 70); *Jipa A.* (4507, 20, 72, 82); *Lebădă D.* (4520, 24, 57); *Litinski I.* (4611); *Mănac M.* (4570); *Marcovici E.* (4563, 65, 70); *Marin Dan* (4570); *Marteş Gr.* (4308, 85, 410, 543, 57); *Mazilu P.* (4520, 57); *Moisovici Şt.* (4519, 20, 70, 72, 610); *Năstase Marin* (4520, 70); *Neagu V. Valentin* (4507, 24, 41, 57); *Negrea A. Mircea-Leonte* (4075, 96, 557, 70, 94, 99); *Nicolescu Şt. I.* (4520); *Petrescu I.* (4557, 68, 70, 608, 10); *Popleşeanu I.* (4520); *Popovici I. Gavril* (4570); *Postelnicescu C. M.* (4355, 570, 608); *Roşculeţ N.* (4597); *Şabac I.* (4418, 32); *Săndulache C.* (4579); *Silaş G.* (4425, N); *Ştefănescu D. N.* (4570). *Ţighiliu Radu* (4570); *Ţiţeica I. Ilie* (4568, 70); *Visarion V.* (4594);

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă*, împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală*, iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică**, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICA", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 . . . . . Lei 30

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 40164

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 6. — FEBRUARIE 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOC... SIBIU

SUMARUL

1. Sărbătorirea celor 40 ani ai „Gazetei Matematice".
Cuvântarea D-lui inginer *A. Ioanovici.*
Cuvântarea D-lui rector *Vasilescu-Karpen.*
Cuvântarea D-lui profesor *Gh. Ţiţeica.*
Cuvântarea D-lui profesor *Dr. Hurmuzescu.*
Cuvântarea D-lui profesor *P. Sergescu.*
Cuvântarea D-lui profesor *Miron Niculescu.*
Cuvântarea D-lui rector *C. Teodorescu.*
Cuvântarea D-lui general *Dumitrescu.*
2. Concursul „Gazetei Matematice" . . . *Delegaţia Societăţii.*
3. Terminaţiunile cuburilor perfecte şi a rădăcinilor lor . . . . . *Ioan V. Mătieş.*
4. Note Matematice: 25 — 27.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 254.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 3290, 4213, 4436, 4553, 4572.
9. Exerciţii: 10 — 14.
10. Probleme propuse: 4627 — 4638.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **I. Buşilă**, Inginer Inspector General, Ministerul Lucrărilor Publice; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 41, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 42, 45, 49, 52, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 98, 500, 03, 05, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 30, 31, 33, 34, 46, 47, 50, 58, 59, 61, 64, 66, 69, 71, 76, 78, 79, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 96, 98, 601, 02, 03, 04, 05, 07, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

SĂRBĂTORIREA CELOR 40 ANI AI „GAZETEI MATEMATICE“

In continuarea articolului cu acelaşi titlu publicat în *Gazeta Matematică* No. 5 din anul XLI, dăm mai jos cuvântările ţinute la «şedinţa festivă» dela Şcoala Politehnică din Bucureşti.

Cuvântarea D-lui inginer A. Ioanovici

Domnule Rector,

Domnilor Profesori,

Doamnelor şi Domnilor,

Intru cât la şedinţa solemnă începută azi dimineaţă şi onorată cu Inalta prezenţă a Majestăţei Sale Regelui, din motive protocolare nu s'au putut spune decât un număr restrâns de cuvinte, s'a luat hotărîrea, ca şedinţa să fie continuată în acest amfiteatru.

In calitate de membru al Delegaţiei *Societăţei Gazeta Matematică,* am fost însărcinat să iau cuvântul pentru a face o scurtă cronică a acestei reviste.

Activitatea *Gazetei Matematice* se poate compara cu acea a unui stup, în care fiecare membru, fiecare colaborator, şi fiecare corespondent chiar, îşi are partea lui la propăşirea revistei, — dar asemănător unui far care luminează puternic calea; activitatea stâlpilor ei conducători a călăuzit tot timpul mersul Gazetei.

Despre activitatea prodigioasă a acestor stâlpi, cari timp de 40 de ani, zi de zi, ceas de ceas, s'au străduit cu munca lor neobosită, cu inteligenţa lor aleasă, şi cu cheltuiala lor personală, pentru a susţine Gazeta, şi al căror nume stă pe buzele D-voastră ale tuturora: D-nii ION IONESCU, ANDREI IOACHIMESCU, GHEORGHE ŢIŢEICA şi regretatul V. CRISTESCU, alţii mai bine ca mine vor şti să vă vorbească aşa cum trebue.

Eu mă voiu mulţumi să evoc numai un scurt istoric al *Gazetei Matematice.*

Gazeta Matematică şi-a început apariţia la 15 Sept. 1895, prin entusiasmul plin de abnegaţie al câtor-va tineri ingineri, cărora li s'a alăturat imediat şi D-l Prof. ŢIŢEICA, căutându-se ca prin

editarea ei să se desvolte dragostea de matematici şi să se dea o pregătire mai serioasă tinerilor ce aveau aptitudini în această direcţie.

Am zis entusiasm plin de abnegaţie pentru că fondatorii Gazetei nu s'au gândit nici un moment ca prin editarea revistei să-şi creieze un beneficiu material, ci din contră s'au legat să contribuie cu o sumă importantă din salariul lor, pentru a asigura regulata apariţie a Gazetei.

Pentru a ne da seama la ce contribuţie importantă au consimţit fondatorii Gazetei la începuturile ei, e destul să spunem că ea ar echivala în valuta actuală cu o sumă de 6 — 700 lei lunar, şi aceasta în afară de cealaltă contribuţie care consta din timpul şi munca depusă pentru redactarea revistei.

De altfel contribuţia materială a membrilor Gazetei, a rămas constant pozitivă în tot decursul vieţii ei de până acum.

In toţi aceşti 40 de ani *Gazeta Matematică* a avut de învins în afară de greutăţile materiale şi pe acelea inerente lipsei unui local propriu, fiind din această cauză silită la o veşnică pribegie.

Cu toate aceste greutăţi, Gazeta poate spune acum că a avut şi multe satisfacţii; astfel:

In anul 1903 cu ocaziunea Expoziţiei Ştiinţifice organizată de D-rul ISTRATI, *Gazeta Matematică* a expus volumele apărute până atunci, care arătau activitatea ei. Juriul acelei Expoziţiuni a decernat Gazetei cea mai înaltă distincţiune — Medalia de aur.

Tot în acel an REGELE CAROL I, sesizat de activitatea Gazetei, a cerut să vadă această revistă, ea fiindu-I prezentată de către D-l Prof. ŢIŢEICA.

Redactorii Gazetei au văzut cu mulţumire în decursul timpului, cum revista lor s'a răspândit din ce în ce mai mult printre elevii liceelor noastre, stimulându-le şi desvoltându-le gustul pentru aprofundarea acestei ştiinţe şi pentru cercetări originale; dând tinerilor prilejul, ca ei singuri să-şi poată cunoaşte din vreme aptitudinele, fiind în măsură să păşească în mod sigur la o carieră în care prima probă era deja făcută.

O altă satisfacţie a avut *Gazeta Matematică* în timpul războiului, când lipsurile şi chiar descurajarea ce însoţeau dese ori acele vremuri, n'au avut priză asupra ei, — căci redactorii au reuşit să învingă cele mai mari dificultăţi, — Gazeta a putut fi redactată şi tipărită la Iaşi, ea fiind expediată chiar pe frontul de luptă, unde

era primită ca cel mai bun augur, prevestită de vremuri noi şi libere în care avea să trăiască ţara noastră.

Pentru a împlini mai bine rolul ei educativ *Gazeta Matematică* a creat o bibliotecă tehnică în care s'au publicat o serie de cărţi de specialitate: culegeri de probleme, tratate de matematici, precum şi cărţi tehnice.

Un alt îndemn la muncă au fost concursurile anuale ale Gazetei şi premiile acordate celor clasificaţi printre cei mai buni la aceste concursuri.

In urmă, prin diverse donaţiuni făcute, s'a înfiinţat o altă serie de premii, cari deşi din cauza deprecierii monedei au ajuns la o valoare în numerar mică, totuşi prin valoarea morală a lor, răsplătesc pe corespondenţii Gazetei, fie pentru o activitate pronunţată în anumită direcţie, fie pentru lucrări originale.

In fine, *Gazeta Matematică* a văzut realizându-se în al 40-lea an de existenţă Căminul ei propiu, care constituia de mulţi ani un vis scump nouă tuturora.

Printre numeroasele ajutoare cari ne-au fost spontan oferite cu această ocazie, nu pot să nu scot în relief, sprijinul larg şi generos acordat de D-l M. MANOILESCU, pe atunci sub-secretar de stat la Ministerul de Finanţe şi al D-lui GH. FILIPESCU, Director G-l al Soc. de Tramvaie Bucureşti.

Termin prin exprimarea dorinţei mele ca peste 10 ani să sărbătorim marele jubileu al împlinirei a unei jumătăţi de veac, având ca şi astăzi, în mijlocul nostru pe toţi colaboratorii şi iubitorii *Gazetei Matematice,* în frunte cu cei trei stâlpi neclintiţi: D-nii ION IONESCU, A. IOACHIMESCU şi G. ŢIŢEICA; şi în prezenţa D-voastră a tuturora, care ne-ţi făcut cinstea de a participa la serbarea noastră, şi pentru care, în numele «Soc. Gazeta Matematică» vă mulţumesc din toată inima.

Cuvântarea D-lui rector Vasilescu-Karpen

Şcoala Politechnică este bucuroasă să adăpostească în localul ei, aniversarea *Gazetei Matematice,* local de unde a pornit acum 40 de ani această — poate unică — în orice caz, admirabilă mişcare ştiinţifică.

Dar Politechnica şi întreg învăţământul technic, are multe motive să se bucure de această aniversare.

Ne mândrim mai întâi că întemeetorii Gazetei sunt ingineri, foşti elevi ai Şcolii Naţionale de Poduri şi Şosele, astăzi Politechnica.

Continuitatea unui efort atât de rodnic, susţinut fără sgomot şi promisiuni, dar fără întrerupere chiar în timpurile cele mai grele ale războiului, această continuitate constitue — o rară, dacă vreţi — dar desigur cea mai strălucită desminţire a zicătoarei «Românului îi este greu să se apuce de lucru, că de lăsat se lasă uşor»; şi ne mândrim că acest efort îndelung susţinut, într'o cauză binecuvântată şi demn exemplu pentru toată activitatea românească, este datorit în bună parte, tot inginerilor eşiţi din instituţia noastră.

Suntem apoi recunoscători Gazetei pentru interesul şi dragostea de matematică ce a ştiut să deştepte în numeroasele generaţii de candidaţi, în urmă elevi şi apoi absolvenţi ai S. N. P. S. şi ai Politechnicei.

Matematica pentru învăţământul ingineriei, are o îndoită înfăţişare.

Matematica constitue în primii ani de învăţământ politechnic, cel mai bun mijloc de formare a cugetărei technice, ea dă viitorului inginer, dragostea şi obiceiul preciziunei şi al logicei; al simplicităţei şi eleganţei în rezolvirea problemelor ce se pun inginerului.

Prin regularitatea apariţiei la data fixă, *Gazeta Matematică* ilustrează în chipul cel mai sugestiv, ordinea şi disciplina gândirei şi acţiunei.

In ultimii ani de studiu şi în cariera inginerească, matematica este cel mai preţios instrument de investigaţie, cel mai preţios instrument de perfecţionare a operilor inginerilor.

Dar pe lângă atingerea cât mai perfectă a obiectivelor ce urmăreşte technica, este şi o latură economică foarte însemnată, aceea a folosirei cât mai judicioase a materialelor, în toate înfăptuirile technice; latură care coincide şi cu înfăţişarea cea mai plăcută a acelor înfăptuiri.

Perfecţionarea şi în această direcţie, se realizează prin studiul din ce în ce mai amănunţit al proectelor, studiu în care matematica are primul rol.

Cu prilejul acestei aniversări, Şcoala Politechnică din Bucureşti, felicită pe conducătorii *Gazetei Matematice* şi în special pe

aceia cari au purtat-o pe umerii lor încă dela întemeerea ei, pe D-nii : ION IONESCU, GH. ŢIŢEICA, ANDREI IOACHIMESCU, şi le mulţumeşte pentru serviciile aduse învăţământului.

Gazeta Matematică, în trecutul ei a fost bine condusă şi suntem încredinţaţi că actualii ei conducători se îngrijesc să-şi pregătească succesorii, cari vor duce opera lor mai departe în acelaş spirit de muncă, continuitate şi sacrificiu.

Cuvântarea D-lui profesor Gh. Ţiţeica

Onorat Auditor,

Sărbătoarea de astăzi a *Gazetei Matematice* este pentru lumea profană un eveniment cu adevărat sensaţional. Pentru întâia oară iese la lumina publică faptul neaşteptat şi nebănuit că o revistă ştiinţifică, de o specialitate temută dar respectată, a putut să apară, în linişte şi regulat, timp de 40 de ani. Dar, lucru şi mai rar şi mai minunat, această revistă, care, după ideea unora, ar fi trebuit să producă groază, a avut şi are succes, a provocat dragoste şi entusiasm printre elevi şi studenţi pentru o ştiinţă grea şi rece cum e Matematica, în cât fiecare număr al Gazetei e aşteptat cu nerăbdare şi neastâmpăr.

Care e explicarea acestui fenomen extraordinar dar real, căci reale sunt cele 40 de volume ale revistei apărute dela 1895 şi până la 1935, iar volumul jubilar povesteşte cu documente şi amănunte reale vasta şi variata activitate desfăşurată în jurul *Gazetei Matematice?*

De asemenea, se mai ridică o a doua întrebare : Care sunt elementele esenţiale care au asigurat acestei reviste şi lunga durată a apariţiei şi acţiunea ei binefăcătoare ?

Explicarea cea mai potrivită a succesului *Gazetei Matematice* mi se pare că stă în reunirea fericită a două elemente cu totul deosebite, unul de natură permanentă, altul de natură întâmplătoare.

* * *

Elementul permanent e însăşi firea ştiinţei matematice, fire cu aparenţă severă şi despre care lumea în general are o părere greşită.

Născută sub forma pe care o cunoaştem astăzi, în acelaş timp cu arta grecească, matematica a păstrat în ţesătura ei, în structura

ei intimă, o oarecare afinitate cu arta. E aceeaş armonie în Geometria lui EUCLIDE ca şi-n templele antice. E aceeaşi linişte, acelaş echilibru în demonstraţia unei teoreme ca în coloanele admirabile de pe Acropolă.

Mi s'a întâmplat, acum un an, să admir templul lui NEPTUN dela capul Sunion şi am avut impresia puternică şi reală că în bătaia razelor piezişe marmora rece şi rigidă a coloanelor se încălzeşte şi vibrează. Aşa se încălzeşte şi vibrează Matematica în bătaia razelor de inteligenţă ale tineretului, care la rândul lui simte o plăcere înaltă, limpede, aproape mistică.

Aci stă marea putere educativă a ştiinţelor matematice pentru tineret: ştiinţă curată pentru suflete curate, ştiinţă cristalină pentru suflete cristaline. Atingerea sinceră cu matematica lasă urme adânci. Lasă înclinarea permanentă de a urma în orice împrejurare linia dreaptă. Lasă năzuinţa către ideal şi către perfecţiunea desăvârşită. In orice caz aceia cari s'au iniţiat cât de puţin în tainele ştiinţelor matematice rămân cu o disciplină intelectuală, cu acel simţ deosebit al măsurii care a caracterizat şi gândirea şi scrisul clasic al lui DESCARTES şi al lui PASCAL.

E aşa de adevărată această putere, aş putea zice, această virtute educativă a ştiinţelor matematice, în cât matematica era în antichitate temelia oricărei educaţii filosofice, iar în evul mediu ea constituia partea principală a învăţăturii superioare.

Se poate vorbi, prin urmare, cu drept cuvânt de un *umanism matematic,* cu aceeaş vechime şi cu aceeaş valoare educativă ca umanismul limbilor clasice şi care poate sta cu toată cinstea şi cu toată demnitatea alături de aceasta.

Cultivarea cu grijă, cu dragoste şi cu stăruinţă a acestui umanism matematic a fost scopul de căpetenie al *Gazetei Matematice.*

* * *

Oricare ar fi valoarea acestui umanism, *Gazeta Matematică* n'ar fi reuşit, dacă n'ar fi existat, dela început, unele elemente întâmplătoare, dar hotărîtoare, mai ales, dacă la înfiinţarea Gazetei nu s'ar fi întâmplat să se strângă împreună un grup de tineri cu spirit temeinic de organizare, cu spirit hotărît de realizare şi cu spirit larg de jertfă.

E, fără îndoială, un fapt minunat şi dătător de mare încredere, că s'au putut găsi acum 40 de ani zece tineri ingineri, cu aceste

mari şi rari însuşiri, care să pornească cu avânt la o muncă aşa de grea. Dintre tinerii de atunci, care au aşezat temeliile sufleteşti ale *Gazetei Matematice,* avem fericirea să numărăm printre noi numai trei, pe D-nii: ION IONESCU, ANDREI G. IOACHIMESCU şi TANCRED CONSTANTINESCU. Lor le aducem astăzi mulţumirea şi recunoştinţa noastră pentru deschiderea drumului, pentru munca depusă şi pentru pilda de statornicie şi de jertfă dată celor cari au venit în urmă.

Tineretul care face astăzi ştiinţă matematică, elementară sau superioară, trebue să ştie că actuala atmosferă ştiinţifică, favorabilă cercetărilor lui a fost formată în mare parte de *Gazeta Matematică.* Această atmosferă, creată cu multă trudă, trebue întreţinută. E sarcina celor tineri s'o facă.

De aceea sărbătoarea de astăzi nu e numai o admiraţie meritată faţă de trecutul care s'a dus, ci e în acelaş timp o înălţare a sufletelor spre un viitor pe care-l dorim şi mai strălucit şi mai frumos.

Cuvântarea D-lui profesor Dr. Hurmuzescu

Mulţumesc comitetului organizator pentru invitaţia de a participa a sărbătorirea celor 40 de ani de rodnică activitate a *Gazetei Matematice.*

Chemarea mea la această manifestaţie, cu toate că Facultatea noastră de Ştiinţe este reprezentată prin eminenţi colegi, dintre cei mai de seamă conducători, îndrumători şi colaboratori ai Gazetei, răspunde, cred, la dorinţa şi chiar la trebuinţa de a lega întreaga Facultate prin toate secţiile ei de sărbătoarea de astăzi, şi de activitatea acestei discipline.

Educaţia matematică prin logica strânsă a deducţiilor sale este într'adevăr deosebit de *necesară* pentru formarea spiritului ştiinţific tuturor ramurilor de ştiinţă şi *indispensabilă* multor activităţi.

Ea devine astăzi şi mai importantă prin încercările ce se fac pentru a aplica formulele matematice la fenomenele complexe sociale şi chiar la ştiinţa fiziologiei.

O bună pregătire matematică va împiedica unele abuzuri în aceste din urmă aplicaţiuni.

Gazeta Matematică a adus mare serviciu pentru pregătirea tineretului şi studenţilor în această direcţiune, a dat impuls şi a

îndrumat dispoziţii naturale pentru această disciplină atât de importantă pentru educaţie şi formarea dreptei judecăţi. Studiul matematicei în sine, nețărmurit în cazul diferitelor probleme posibile, devine o înaltă satisfacţie pur spirituală; aplicată la trebuinţele omeneşti în diferite ramuri de activităţi inginereşti şi altele, devine reală, se umanizează şi constitue o altă sursă de satisfacţiuni, pentru autorul care îşi vede gândul său îmbrăcând forma unei realităţi.

Mi-aduc aminte de interesul învăţatului matematician PICARD, când venea la Laboratorul de Cercetări pentru a-şi da seama de-a-dreptul despre unele teoreme de electrostatică.

Bine aplicate formulele matematice în multe cazuri pot da sugestiuni şi provoca noui cercetări şi noui descoperiri.

Cu toate că formulele, după expresiunea lui POINCARÉ nu ne dau decât ceeace s'a pus la stabilirea lor, înfăţişările lor însă pot să desvălue un adevăr care fără a fi fost enunţat în mod clar se găsea implicit în ecuaţiile primitive.

In numele Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti, aduc cele mai calde felicitări comitetului pentru straja şi îndrumarea bunului mers al revistei pe timpul celor 40 de ani de activitate şi doresc *Gazetei Matematice* o propăşire continuă cu strălucitoare radiare asupra tineretului nostru şi a întregei vieţi ştiinţifice.

Cuvântarea D-lui profesor P. Sergescu

Universitatea din Cluj socoteşte ca una dintre cele mai mari mândrii ale ei faptul că din şase profesori de matematici, cinci sunt membri ai *Gazetei Matematice.*

Aceasta se datoreşte împrejurărei că noi ne-am format la şcoala Gazetei. Ne aducem aminte cu emoţie şi plăcere de fiecare 15 al lunei de pe când eram elevi: când ne întorceam dela liceu acasă, găseam *Gazeta* pe masă. In afară de cristalizarea a nenumărate vocaţii spre cariera ştiinţifică — şi deci spre crearea şcoalei româneşti de matematică — *Gazeta Matematică* a fost pentru noi şcoala educaţiei energiei şi a caracterului. Ea ne-a învăţat cum să desvoltăm însuşirile bune şi cum să înfrânăm pornirile mai puţin lăudabile.

Prin exemplul regularităţii, rigoarei, dreptăţei, omeniei, publicaţiei, prin tonalitatea sufletească înaltă şi prin cuvântările morale

dela concursuri, simţeam în mod nedesluşit, dar imperativ, în inimile noastre de copii care era drumul de urmat. Aceasta a decis de toată viaţa noastră.

Iar când am intrat în lume, după terminarea studiilor, am început să înţelegem tot mai desluşit şi mai adânc, directivele *Gazetei.* Am înţeles că nimic nu se poate face trainic fără sacrificii, ca în simbolica operă a Meşterului Manole. Am simţit că singura adevărată avere ce poate agonisi cineva *e numai ceeace poate da,* Această avere stabileşte averea indisolubilă între generaţii şi cimentează pentru veacuri operele înfăptuite. Trecători cu toţii ca oameni, numai părticica infimă de bine ce a izbutit fiecare din noi să lase în urmă, constitue singurul nostru rost pe pământ. Acest bine constă în primul rând în îndeplinirea strictă a datoriei, oricât de umilă ar fi şi în închinarea tuturor puterilor noastre pentru consolidarea sufletului neamului nostru.

Gazeta Matematică, cu mersul ei senin în linie dreaptă, în ciuda tuturor obstacolelor, ne aducea siguranţa că munca cinstită, îndârjită şi adesea plină de greutăţi, *trebue* să-şi facă drum spre idealul desinteresat ce ţinteşte. Intr'o societate în care adesea cele mai curate gânduri sunt suspectate, în care intrigi şi răstălmăciri de cuvinte aduc atâta durere, mulţi din noi ne-am pus uneori. însângeraţi, întrebarea dacă suntem pe drumul cel bun. Venirea lui 15 al lunei, cu *Gazeta* iubită, ne readucea liniştea şi sufletul din copilărie: fă-ţi datoria şi nu te precupa de urmări. Ele vor venit

Şi astfel la văpaia curată a *Gazetei Matematice,* ne-am oţelit caracterele.

Exemplul vieţei D-tră, al stâlpilor, I. IONESCU, A. IOACHIMESCU, G. ŢIŢEICA şi al neuitatului V. CRISTESCU, a fost farul care ne-a luminat în noaptea îndoelei sau a desamăgirilor. Mai ales la Cluj, unde avem de îndeplinit şi un rol naţional, am evocat înfăptuirea D-tră în multe nopţi de veghe. Venim azi sărbătoreşte, să vă mulţumim pentru tot ceeace a-ţi făcut pentru mintea şi pentru sufletul nostru.

Fiindcă omul rămâne totdeauna egoist, chiar dacă e cel mai bun, îngăduiţi-ne să ne spunem şi noi dorinţa egoistă: Să ne ajute Dumnezeu să vă avem multe decenii între noi ca ţintă de urmărit şi ca resort al caracterului. Şi, să ne îngădue Dumnezeu să ne desfăşurăm toată viaţa în direcţia sufletului *Gazetei Matematice,* înfrângând tentaţiunile şi toate îndoelile.

Din văpaia *Gazetei* s'au aprins nenumărate făclii pentru cultivarea minței și întărirea sufletului la noi în țară, și până în depărtata Argentină. Ingăduiți-ne ca în această zi mare să vă prezentăm ca omagiu sărbătoresc rodul străduințelor dela Cluj, inspirate de marea D-tră operă. Primiți, ca o dovadă a admirației și recunoștinței noastre acest al unsprezecelea volum al revistei „*Mathematica*", apărut azi la Cluj în cinstea *Gazetei Matematice*.

Cuvântarea D-lui profesor Miron Niculescu

Domnilor Delegați,

Doamnelor și Domnilor,

Facultatea de Științe a Universității Caroline se asociază, prin glasul delegatului său, la această serbare a Matematicilor Românești.

Știința Matematică este, prin natura ei, o știință ermetică; descoperirile ei cele mai importante nu trezesc ecou de emoție sau de simpatie, sau numai de simplă curiozitate în publicul profan, pentru care această știință ia aspectul unui cult, riguros limitat la numărul oficianților săi.

Și totuși, nu se mai găsește nimeni să nege astăzi serviciile imense pe care matematicile le aduc nu numai lumii gânditoare, dar și întregii omeniri.

In prîmul rând, Matematicele au o considerabilă însemnătate filosofică, ele constitue cel mai important capitol al teoriei cunoașterii; atât de adevărat este acest lucru, încât la început cele două noțiuni, Matematică și Filosofie se confundau.

In al doilea rând, pentru științele experimentale, Matematicile constitue astăzi limbajul ideal, pe care tind să și-l însușească și să și-l adapteze nu numai aceste științe, dar și alte discipline ale activității omenești. Este suficient să numesc Sociologia: *Mecanica Socială* a lui SPIRU HARET, a cărui pomenire a coincis aproape cu această sărbătorire, constitue una dintre primele încercări de acest gen.

Insfârșit, rolul educator al Matematicilor este recunoscut astăzi de toți pedagogii. Știința raționamentului este, desigur, Logica, dar

nu există Știință în care silogismul și raționamentul să aibă o realitate mai plastică și mai frumoasă decât în Matematici. Matematicile constitue cea mai bună școală pentru formarea judecății riguroase: din acest punct de vedere, o anumită cultură matematică trebue să se afle totdeauna la baza unei educațiuni complete.

Aceste diverse virtuți ale Matematicilor, aplicabile omenirii în genere, sunt în particular aplicabile țării noastre. Emulația, această lege psihologică, ordonatoare a activității individuale, se aplică și unităților superioare pe care le constitue națiunile. Trebuia ca afirmării noastre politice, prin independența Statului Român, să-i urmeze afirmarea noastră ca unitate culturală, nu numai pe tărâmul *literar,* ci și pe cel *științific,* nu numai *sporadic* și *întâmplător,* ci în mod *continuu* și *organizat.*

Acest lucru l-au înțeles cu o minunată intuiție a realității, o seamă de tineri ingineri români, acum patruzeci de ani, în timp ce desăvârșeau una din cele mai impozante lucrări tehnice românești. Și astfel, odată cu punerea stâlpilor celui mai mare pod din lume, s'au constituit și stâlpii acelui minunat edificiu spiritual al Științei românești, pe care îl constitue *Gazeta Matematică.* La munca de lungă durată și de sacrificiu și-au asociat și pe un foarte tânăr profesor de Matematici.

Rezultatele acestei activități de patruzeci de ani se văd astăzi de toți cei cari au urmărit-o; pentru cei ce le ignorează încă, volumul jubilar al *Gazetei Matematice* le poate sta mărturie, cu date și cu cifre.

Cea mai mare parte a corespondenților *Gazetei Matematice* datorează acestei reviste cariera lor, unii dintre ei aici și-au descoperit vocația...

...lar dintre fondatorii în viață, doi dintre tinerii ingineri de atunci, D-nii: I. IONESCU și A. IOACHIMESCU sunt astăzi o mândrie a învățământului și a corpului tehnic românesc, în timp ce tânărul profesor de acum patruzeci de ani, D-l G. ȚIȚEICA, este astăzi Geometrul de reputație universală și unul din cei mai autentici reprezentanți ai Științei Românești peste hotare.

In numele Facultății de Științe din Cernăuți, aduc Societății *Gazeta Matematică,* fondatorilor și colaboratorilor ei din prima zi, cu prilejul acestui moment de privire înapoi, urările cele mai calde de viață lungă și rodnică pentru strălucirea Științei Românești.

Cuvântarea D-lui rector C. Teodorescu

Doamnelor şi Domnilor,

Am urmat şi eu la şcoala *Gazetei Matematice,* căci în adevăr o înaltă şcoală de cunoştinţe şi de formare sufletească a fost aceasta. Infiinţată de un grup de idealişti, la baza ei s'a pus mult suflet şi din această înjghebare la care an de an s'au adăogat noi elemente sufleteşti, a ieşit clădirea frumoasă pe care o admirăm astăzi.

Am călcat şi eu, elev de liceu, pe făgaşul pe care şi alţii fuseseră înaintea mea, am lucrat în atmosfera frumoasă creată de «Gazetă» şi acuma pot să văd roadele acestei atmosfere. Stărue în mintea mea amintiri din această viaţă, căci Gazeta era o familie mare, care unea într'o strânsă legătură sufletească pe conducătorii şi tinerii colaboratori.

Gazeta ne învăţa să ne concentrăm sforţările, să ne disciplinăm judecata, să ne ordonăm gândul şi scrisul. Şi atrăgându-ne cu recompensa publicării la lista rezolvitorilor pe copertă, în problemele rezolvate, în tabla de materii unde ambiţionam să luăm un loc cât mai mare, ne conducea treptat la o stăpânire de sine. Prin concursurile ţinute ea punea faţă în faţă diferitele serii de elevi, dădea ocazia unor confruntări şi verificări, care întăreau cunoştinţele şi relevând golurile sau slăbiciunile, le dădea putinţa unei remedieri.

Pe lângă cunoştinţe făcea însă şi educaţie. Şi în activitatea «Gazetei» văd caracteristicile de cumpănire şi măsură inginereşti. Deşi pornită la probleme în legătură cu învăţământul matematicei în cursul secundar, ea nu a anunţat programe, nu a arătat lipsuri, nu a votat moţiuni, nu a urmărit pe nimeni. Ea a stăruit pentru ridicarea nivelului acelor cari doreau să se ridice. Şi după patruzeci de ani poate să numere atâtea succese după care nu a umblat.

La unul din concursurile «Gazetei», un elev din clasele inferioare se înscrie cu algebra superioară, şi la tablă arată în adevăr cunoştinţe de derivate, ba chiar integrale. Toţi concurenţii erau emoţionaţi în faţa hotărîrii ce urmau să ia examinatorii, căci tinereţea este gata să se entuziasmeze. Şi sentinţa a venit, căci unul din stâlpii Gazetei care examina la algebră, a tăiat zelul tânărului, îndemnându-l să se ocupe cu materia anului său, la nivelul său, căci problemele mai grele vin odată cu maturitatea de gândire. Admirabil exemplu de măsură. Nu realizarea unui record cu orice preţ, ci o desvoltare

sănătoasă, bazată pe realitate, capabilă să fie utilă şi productivă la rândul ei.

Când în anul 1920 s'a înfiinţat Şcoala Politehnică din Timişoara, TRAIAN LALESCU, unul din valoroşii membri ai *Gazetei Matematice,* a fost acela care i-a pus bazele şi i-a dat direcţiunea. Şi răspunzând unei trebuinţe asemănătoare celor de acum 40 ani LALESCU a înfiinţat *Revista Matematică din Timişoara,* după modelul Gazetei, având în primul număr, la probleme rezolvate, patru probleme propuse de cei patru stâlpi ai Gazetei.

Iată de ce un omagiu din partea noastră la serbarea Gazetei, este tocmai alegerea ei ca model, şi înfăptuirea realizată în colţul de Vest al ţării.

Cuvântarea D-lui General Dumitrescu, Directorul Şcoalelor Militare din Ministerul Apărării Naţionale

Doamnelor şi Domnilor,

Sărbătorirea a 40 de ani de existenţă a *Gazetei Matematice* a dat un îndoit prilej de mulţumire membrilor Societăţii. Pe de o parte, bucuria de a fi ajuns, împotriva atâtor greutăţi, pe culmea de unde viitorul se poate privi cu linişte şi încredere, iar, pe de altă parte, ocaziunea de a încheia un bilanţ, asupra activităţii Societăţii, ilustrată prin cea mai curată solidaritate spirituală.

Sentimentele de mulţumire şi bucurie, ale membrilor Societăţii, au fost întruchipate în măreaţa manifestare de astăzi dimineaţă, încurajată şi onorată de prezenţa Celui mai strălucit animator al culturii româneşti: Majestatea Sa Regele Carol al II-lea. Bilanţul activităţii Societăţii pe timp de 40 de ani este sintetizat în volumul jubilar, care este şi va rămâne, în acelaş timp, şi un «îndreptar moral».

Doamnelor şi Domnilor,

In această epocă de confuzie a valorilor şi de instabilitate, noi ofiţerii şi profesorii învăţământului militar sărbătorim astăzi cu adâncă bucurie Societatea *Gazeta Matematică,* născută din avânt, întreţinută din desinteresare şi sacrificiu, pentru progresul ştiinţei matematice.

Intre lumea militară şi Societatea *Gazeta Matematică* sunt strânse şi vechi legături, deoarece arta şi ştiinţa militară folosesc şi pun la contribuţie toate cuceririle cugetului modern; iar dacă, altădată, la şcoala lui PLATON nu putea intra decât cine era geometru, astăzi nimeni nu poate intra în intimitatea marilor descoperiri, fără a-şi fi apropiat şi însuşit gândirea matematică.

Astfel se explică faptul că, printre dintinşii membrii şi colaboratori ai *Gazetei Matematice*, figurează numeroşi ofiţeri, iar unele premii oferite de Gazetă sunt acordate pentru lucrări cu caracter matematic, aplicate în câmpul ştiinţelor militare.

Camaradul meu, Generalul BUICLIU va arăta activitatea ofiţerimii ţării, în sânul Societăţii şi *Gazetei Matematice,* precum şi marea influenţă a Gazetei asupra pregătirii ofiţerilor de arme speciale şi, cu deosebire, a corpului technic al armatei.

In ce mă priveşte, permiteţi-mi, în calitate de Director al Invăţământului Militar, care am în pază şi îndrumare micul ogor de cultură al liceelor militare, ca, după ce am verificat folosul obţinu de pe urma Societăţii şi *Gazetei Matematice,* să omagiem, la rândul nostru, rodnica activitate şi influenţa ei binefăcătoare, asupra învăţământului şi educaţiei în şcolile noastre militare.

Preţuim folosul pe care l-am avut, sub înrâurirea *Gazetei Matematice,* dintr'un întreit punct de vedere: general, intelectual şi moral.

Din punct de vedere general:

Matematica este un minunat mijloc de disciplinare intelectuală. Ea ne dă deprinderea de a distinge esenţialul de amănunt în epoca noastră aglomerată de amănunte; ea ne învaţă să deosebim permanenţele de cele trecătoare, în zilele noastre asfixiate de efemer; ea ne ascute spiritul de observaţie şi ne îndrumează în analiza obiectivă a fenomenelor, astăzi când avem mai mult nevoe de stăpânire şi calm.

Virtutea izolării în mijlocul tumultului şi puterea concentrării în vâltoarea tentaţiunilor, le stăpâneşte acela care s'a învăţat să urmărească ore întregi o problemă şi să simtă mulţumirea negrăită a rezolvării ei.

Superficialul şi vagul afirmaţiilor necontrolate, repugnă aceluia pentru care o formulă de matematică este o distilare superioară de gândire.

Disciplina matematică nu îngădue o propoziţiune nediscutată; ea insuflă o adevărată oroare de mistificare, obişnueşte cu spiritul critic, oferă mai ales acea onestitate de gândire, care ar trebui să fie cel mai căutat titlu de nobleţă al omului.

Caracterul însăşi este o echivalenţă, un acord, între cuget şi faptă, şi putem afirma, fără ezitare, că studiul ştiinţelor matematice este, în acelaş timp, o înaltă şcoală de formarea caracterelor.

Din punct de vedere intelectual :

Gazeta Matematică a creiat şi desvoltat atmosfera necesară unei prielnici activităţi matematice în şcolile militare. Elevii corespondenţi au fost şi sunt un permanent stimulent pentru restul camarazilor lor de clasă, difuzând, prin activitatea lor, dragostea pentru spiritul matematic. In acest fel, am ajuns la clase cu un nivel de pregătire mai ridicat decât la acele clase unde nu există corespondenţi ai Gazetei. Lucrul acesta a îndemnat pe profesorii de matematici să ţină legătura continuă cu Gazeta, fapt care a determinat sporirea numărului elevilor corespondenţi.

Ca urmare, dacă răsfoim volumele Gazetei, găsim, în mod obişnuit, numeroşi corespondenţi dintre elevii liceelor militare : la început numai dela liceul militar Iaşi, mai târziu şi dela liceul militar Craiova, cu începere din anul 1913 dela liceul militar Mânăstirea Dealu, iar după războiu, dela liceele militare Tg.-Mureş, Cernăuţi şi Chişinău.

Această rodnică activitate, împletită cu existenţa Gazetei încă dela începuturile sale, a fost continuată neîntrerupt până astăzi, chiar în perioada critică a liceului cu 7 clase, cu program analitic redus la matematici, de pe urma căreia s'a resimţit atât învăţământul cât şi *Gazeta Matematică*. Sub acest raport, este cazul să semnalăm că, dela 1928 şi până astăzi, am menţinut, în liceele militare, la matematici, programul analitic al secţiei reale din legea HARET dela 1898, şi în scopul de a păstra legătura spirituală cu *Gazeta Matematică*.

Astăzi, această legătură este o tradiţie în liceele militare, şi este o tradiţie sănătoasă şi rodnică în rezultate, căci pentru corespondenţi profitul nu se rezumă la simpla rezolvare de probleme, ci, mai ales, în necesitatea complectării cunoştinţelor din programa oficială, prin lecturi particulare şi prin trezirea interesului pentru munca de creaţie proprie.

Din punct de vedere moral:

După părerea noastră, folosul, din acest punct de vedere, este netăgăduit, şi mai interesant de cât cel intelectual, deşi scopul acesta nu este prevăzut în nici un articol din statutele Societăţii.

Conducerea armatei apreciază mai cu seamă folosul obţinut în liceele militare, sub acest raport, cu atâta mai mult cu cât el corespunde şi Inaltelor cuvinte ale Majestăţii Sale Regelui, rostite cu prilejul depunerii jurământului elevilor şcoalei de ofiţeri, din acest an, asupra chemării ofiţerimii, şi anume:

„Aveţi de învăţat aci cum să mânuiţi armele. Va trebui să învăţaţi aci şi cum să mânuiţi oamenii, căci rolul vostru de ofiţeri este înainte de toate un rol de instructori, un rol de educatori".

Vom arăta pe scurt modul în care *Gazeta Matematică* a înfăptuit şi opera educativă, alături de cea ştiinţifică.

După părerea noastră, educaţia morală a tineretului nu se face prin vorbe, ci prin fapte şi, în special, prin puterea exemplului.

Sub acest raport, *Gazeta Matematică* a fost înfiinţată pe o temelie morală, fapt, care explică puterea ei de viaţă, cu toate momentele critice prin care a trecut, timp de 40 de ani, şi mai ales în timpul războiului şi în perioada de criză, provocată de restrângerea învăţământului ştiinţiflc din liceele statului.

Acest suport moral îl găsim în prevederile de ordin material ale statutului Societăţii în primul paragraf, care are următorul cuprins:

„Pentru atingerea scopului său, Societatea va dispune de munca voluntară şi desinteresată a membrilor săi, cari vor voi, conform tradiţiei Gazetei Matematice, *să se ocupe cu redactarea Gazetei şi cu administrarea Societăţii"*.

Acesta a fost şi va fi cel mai mare capital al *Gazetei Matematice,* capital moral, nesupus la fluctuaţii valutare, căci chiar în mijlocul societăţii actuale devalorizate, îşi menţine *valoarea aur.*

Dobânda realizată de capitalul moral al Societăţii *Gazeta Matematică* a fost mare: parte s'a capitalizat în forţele noui sosite în sânul Societăţii, iar altă parte a intrat în tezaurul moral al Ţării.

Intre aceştia sunt şi vechii corespondenţi, cari nu sunt membri ai societăţii, ca şi acei cari au îmbrăţişat cariere fără legătură cu matematica, dar care se resimt şi astăzi de influenţa morală a *Gazetei Matematice.*

In afară de acestea: Elevii își dau seama de sarcinile cu care se menține *Gazeta Matematică;* asemenea de armonia care există între membrii Societății. Ei știu foarte bine că și concursurile anuale — adevărate sărbători intelectuale — că și banchetul care urmează, sunt susținute de aceiași membrii, care-și jertfesc timpul lor de odihnă bine meritată, pentru a examina pe elevi, coborîndu-se la mintea lor. Preocuparea membrilor — tineri și bătrâni — de a descoperi ce știe fiecare concurent și a întrezări posibilități de viitor, îi face pe elevi să se simtă mândri că participă la concurs și mai ales mândri că reprezintă școala respectivă. E prima ocaziune ce li se dă de a reprezenta o colectivitate și faptul acesta le stimulează demnitatea personală.

Banchetul în sine, cu atmosfera sa de înaltă spiritualitate, îi înalță. Cuvântarea morală a D-lui Profesor ȚIȚEICA face ca sufletul tuturor să fie pătruns de deviza Gazetei, concretizată în: entusiasm, armonie, muncă desinteresată și sacrificii continui.

Doamnelor și Domnilor,

Din cele expuse, ne dăm seama ce minunat instrument reprezintă matematica pentru educația viitorilor ofițeri și câte cuvinte de recunoștință avem pentru Societatea care mânuește această disciplină.

Opera săvârșită de Societatea și *Gazeta Matematică,* în legătură cu rostul liceelor militare este covârșitoare. Deșteptarea interesului pentru gândirea matematică și integrarea sufletească a elevilor noștri în spiritul disciplinei matematice se concretizează în rezultate practice dintre cele mai fericite. Este de ajuns să menționăm că, în ultimii ani, elevii celor 6 licee militare au activat la Gazetă, după cum urmează:

1932/33		35	corespondenți . . .	152	probleme
1933/34		64	» . . .	261	»
1934/35	Gazeta	111	» . . .	419	»
	Suplim.	37	» . . .	140	»
1935/36	Gazeta	111	» . . .	287	»
	Suplim.	610	» . . .	4310	»

La concursurile ținute în ultimii ani, liceele militare au participat în mod constant, obținând în anul școlar trecut următoarele rezultate:

Din cele 8 premii instituite de *Gazeta Matematică,* 7 premii au fost luate de către elevii liceelor militare.

Pe deasupra, în tradiția liceelor noastre militare s'a înfiltrat adânc necesitatea intelectuală de a ține contactul strâns cu *Gazeta Matematică*. In această ordine de idei, amintesc pe profesorii membri ai Societății, printre cari citez pe D-nii: V. TEODOREANU (fost și membru în delegația Societății), V. ALACI, O. ONICESCU, G. I. DUMITRESCU, GH. SIMIONESCU; iar dintre foștii elevi, cari au colaborat la Gazetă citâm printre cei mai de seamă pe D-nii: Generali ALEVRA, OPRESCU GH., TĂNĂSESCU M. A., BĂDESCU ILIE, MEHEDINȚI D. I., Colonel IACOB FILIP, Locotenenții Comandori ZAPAN GRIGORE, MARCU V., NICOLESCU V., Maior LINTEȘ I., Domnii ZAPAN GHEORGHE, PERIEȚEANU DAN, GHERMĂNESCU M., LIVADA GR., SIMIONESCU GHEORGHE, etc.

Doamnelor și Domnilor,

Pentru neperitoarea operă înfăptuită de *Gazeta Matematică,* care a înrâurit atât de intens pregătirea științifică și morală a viitorilor ofițeri ai Țării, învățământul militar prezintă astăzi omagii de admirațiune și respect, *stâlpilor Gazetei Matematice* D-nii : Inginer A. GH. IOACHIMESCU, Inginer Inspector General ION IONESCU și Profesor Universitar GH. ȚIȚEICA, întemeetorii Societății și *Gazetei Matematice.*

Aducem omagiul nostru de recunoștință tuturor membrilor *Gazetei Matematice,* cari prin entusiasmul, munca desinteresată și sacrificiul continuu, au contribuit și contribuesc la ridicarea treptată a Societății și Gazetei.

Totodată ținem să vă asigurăm că atitudinea noastră omagială nu este numai expresiunea sentimentelor conducătorilor învățământului militar, a comandanților de școli, a profesorilor și a elevilor aci prezenți, ci și a tuturor elevilor, profesorilor și ofițerilor școlilor noastre cari, în clipa de față vă sărbătoresc, în cadrul unei ședători organizată ad-hoc, la reședința fiecărui liceu militar.

In plus vă rugăm să ne îngăduiți ca sentimentele și legătura noastră sufletească cu Societatea și *Gazeta Matematică* să le traducem și în fapt, prin solicitarea ce vă facem de a primi din partea Domnului Ministru al Apărării Naționale un ajutor de 20.000 lei, destinat să contribue la progresul Gazetei.

Cu aceste idei și sentimente urăm, să trăiască, să crească și să înflorească *Gazeta Matematică.*

CONCURSUL „GAZETEI MATEMATICE“

După cum s'a anunţat în numărul 1, din Septemvrie 1935, al *Gazetei Matematice*, anul acesta se va ţine un concurs de matematici între elevii liceelor din ţară şi elevii anului preparator al Şcoalei Politehnice REGELE CAROL II din Bucureşti.

Dintre candidaţii înscrişi au fost admişi a se prezenta la concurs:

Pentru Clasa IV: *Avram A. Traian, Crăciunescu I. Marcel, Ionescu Stelian, Jarechie V. Ion, Militaru P. Apolon, Mingea M., Moisiu Cornel, Paicu Mircea, Petrescu V. Mihai, Rohr I. Alexandru, Tănăsescu N. N., Vasilescu A. Mircea.*

Pentru Clasa V: *Anghelescu V. Elizel, Băjenaru G. V., Bodnărescu M. Horia, Burghelea Cezar, Dumitrescu V. Marius, Enescu D. Dumitru, Florescu L. Victor, Ion A. Ilie, Jipa C. Alexandru, Muraru P. Dumitru, Pântescu Constantin, Pasere S. E. Aurel, Rădulescu G. Octavian, Săndulescu I. Ion, Tătaru Nicolae.*

Pentru Clasa VI: *Andronache I. Virgil, Apostol G. Nicolae, Apostol V. Radu, Barbu A. Aurel, Boborodea I. Ioan, Boian D. Emanuel, Caraman Aurel, Cioc I. Dumitru, Cornăţeanu I. Aurel, Iacoby Marcela, Ionescu F. M. Cornelius, Marinescu D. Gh., Nadolu T. Andrei, Nedelcu V. Nicolae, Nistorescu V. Dan, Niţescu Ç. Gheorghe, Odobescu M. Simona, Pădureţ Vasile, Popescu-Zorica N. Al., Popescu M. Gheorghe, Poşoi N. Mircea, Preciado I. Teodor, Romaşcanu G. Georgeta, Şaichin O. Adolf, Sechel T. Mircea, Ştefănescu D. N., Streder Ioan, Toma N. Nicolae.*

Pentru Clasa VII: *Bogdan Gr. Ioan, Bucur N. Virgil, Buzescu P. A. Valentin, Buzincu S. Ion, Cojocaru P. Petre Dimitriu C. Călin Ion, Enache D. Iordache, Galan I. Nicolae, Metea Virgil, Năstase Gr. Marin, Nedelescu F. Anton, Postelnicescu Mircea, Stoian S. Ioan, Tanasiciuc V. Claudius, Ţiţeica I. Ilie.*

Pentru Clasa VIII: *Amăreşteanu F. Marcel, Ceauşescu Vasile, Cehan Aristide, Cercelaru Gr. Dumitru, Ciucă I. I., Comănescu A. Toma, Deceanu G. G., Dobrescu D. Paul, Florescu H., Gavrilescu N. Constantin, Georgescu G. Alexandru, Grigorescu A. Vintilă, Lebădă I. Dumitru, Martac V. Radu, Moisovici*

M. Ştefan, Neagu I. Tudor, Petrescu C. Octavian, Roman I. Nicolae, Şabac G. Ioan. Stănescu M. Em., Ţarălungă G. Dumitru, Varlam M. C. şi Zgârcea T. G.

Adică: 12 candidaţi pentru clasa IV-a, 15 pentru clasa V-a, 28 pentru clasa VI-a, 15 pentru clasa VII-a şi 23 pentru clasa VIII-a.

Fiecare candidat va da câte o teză din ambele materii la care s'a înscris. Tezele sunt eliminatoare.

Prima teză va avea loc Joi 16 Aprilie 1936, dela ora 8^{30} până la 11^{30}, iar a doua teză, în aceeaşi zi, între orele 15 şi 18, la Şcoala Politehnică, Calea Griviţei 132.

Oralul va începe Vineri 17 Aprilie, ora 8^{30}.

Candidaţilor înscrişi la concurs, cari nu dispun de mijloace materiale pentru venirea şi întreţinerea lor în Bucureşti (după cum au arătat în cererile lor), li se vor trimete în vacanţa de Paşti sumele necesare transportului la Bucureşti şi li se va comunica locul unde vor fi găzduiţi în tot timpul concursului.

DELEGAŢIA SOCIETĂŢII.

TERMINAŢIUNILE CUBURILOR PERFECTE ŞI A RĂDĂCINILOR LOR.

Ca o extindere la cuburile perfecte a celor ce am stabilit relativ la pătrate în *Gazeta Matematică, Vol. XXXVII, pag. 366,* voiu da în cele ce urmează terminaţiunile cuburilor perfecte, alături de forma generală a rădăcinilor lor, folosindu-mă de următoarele două teoreme.

Teorema 1. *Terminaţiunea de* p *cifre a unui cub derivă numai din cubul terminaţiunii de* p *cifre a numărului corespunzător acelui cub.*

In adevăr pot scrie:

$$N = 10^p . M + N_p \qquad \therefore \quad N^3 = \text{Mult } 10^p + N_p^3$$

N_p fiind de p cifre.

Teorema 2-a. *Dacă* a_p *şi* b_p *numere întregi de* p *cifre, unul complimentul aritmetic al celuilalt faţă de* 10^p, *au cubul terminat respectiv cu* A_p *şi* B_p, *de* p *cifre, atunci* A_p *şi* B_p *vor fi tot complimente aritmetice faţă de* 10^p.

In adevăr:

$$a_p^3 = \text{Mult } 10^p + A_p \quad \text{şi} \quad b_p^3 = \text{Mult } 10^p + B_p .$$

Pe de altă parte

$$a_p^3 + b_p^3 = (a_p + b_p)^3 - 3a_p b_p (a_p + b_p) = \text{Mult } 10^p .$$

$$\therefore \quad A_p + B_p = \text{Mult } 10^p .$$

Dar A_p şi B_p fiind de p cifre,

$$A_p + B_p < 2 \cdot 10^p$$

$$\therefore \quad A_p + B_p = 10^p .$$

Consecinţă. *Numerele de forma:*

$N = \text{Mult } 10^p + a_p$ şi $M = \text{Mult } 10^p + b_p = \text{Mult } 10^p + 10^p - a_p$ *putându-se scrie sub forma* $\text{Mult } 10^p \pm a_p$, *vor avea cubul de forma*

$$(n \cdot 10^p \pm a_p)^3 = \text{Mult } 10^p \pm a_p^3 = \text{Mult } 10^p \pm A_p ,$$

semnele corespunzându-se.

1°. Unităţile cuburilor şi forma generală a rădăcinilor lor. Un număr întreg se poate scrie:

$$N = 10m \pm u ; \; (u = 0, 1, 2, 3, 4, \text{şi } 5)$$

punându-i în evidenţă unităţile lui. Ridicându-l la cub, constat că se termină respectiv cu: $0 ; \pm 1 ; \mp 2 ; \mp 3 ; \pm 4$ şi 5, semnele corespunzându-se.

2°. Terminaţiunile de două cifre (*zu*) ale cuburilor şi forma generală a rădăcinilor lor, le-am dat în *„Ştiinţă şi Progres“*, Tg. Mureş, *Anul I pag. 98,* dar în baza teoremei 2, le pot restrânge astfel:

N	N^3 / *zu*	N	N^3 / *zu*	N	N^3 / *zu*	N	N^3 / *zu*
$10n$	00	$50n \pm 8$	± 12	$20n \pm 5$	± 25	$100n \pm 33$	± 37
$100n \pm 1$	± 01	$100n \pm 17$	± 13	$100n \pm 3$	± 27	$100n \mp 21$	± 39
$100n \mp 13$	± 03	$50n \pm 6$	± 16	$50n \pm 12$	± 28	$100n \mp 19$	± 41
$50n \mp 16$	± 04	$100n \mp 27$	± 17	$100n \pm 9$	± 29	$100n \pm 7$	± 43
$100n \pm 43$	± 07	$100n \pm 39$	± 19	$100n \pm 11$	± 31	$50n \pm 14$	± 44
$50n \pm 2$	± 08	$100n \pm 41$	± 21	$50n \pm 18$	± 32	$100n \mp 37$	± 47
$100n \mp 31$	± 09	$100n \pm 47$	± 23	$100n \mp 23$	± 33	$50n \pm 22$	± 48
$100n \mp 29$	± 11	$50n \pm 24$	± 24	$50n \mp 4$	± 36	$100n \pm 49$	± 49

în care semnele se corespund, n putând fi orice număr întreg.

După cum se vede, nu există cuburi terminate cu $\pm 02; \pm 05; \pm 06; \pm 10; \pm 14; \pm 15; \pm 18; \pm 20; \pm 22; \pm 26; \pm 30; \pm 34; \pm 35; \pm 38; \pm 40; \pm 42; \pm 45; \pm 46$ şi 50.

Acest lucru se poate arăta şi rezolvând probleme de felul următor:

Să se caute cuburile terminate cu $\pm \overline{z4}$ $(z = 0, 1, 2, \ldots, 9)$.

Aceste cuburi sunt printre cele terminate cu ± 4. Rădăcinile lor sunt de forma

$$N = 10n \pm 4 \qquad \therefore \quad N^3 \pm 64 + 80n + \text{Mult } 100.$$

Pun condiţia ca N^3 să se termine cu $\pm \overline{z4}$, deduc

$$\pm 64 + 80n = \pm \overline{z4} + \text{Mult } 100$$

$$\therefore \quad 8n = \pm (z - 6) + \text{Mult } 10$$

$$\therefore \quad 4n = \pm \left(\frac{z}{2} - 3\right) + \text{Mult } 5.$$

Condiţia $z = 2 \,.\, z'$ exclude valorile impare ale lui z, deci nu sunt cuburi terminate cu $\pm 14; \pm 34; \pm 54; \pm 74; \pm 94$ (ultimele trei, putându-le scrie astfel: $\pm 46; \pm 26; \pm 06$).

Valorile $z = 0, 2; 4; 6; 8$ dau soluţiile:

$$n = \pm 3 + 5m; \pm 2 + 5m; \pm 1 + 5m; 5m; \mp 1 + 5m$$

care introduse în expresia lui N, dau respectiv numerele:

$$N = 50m \mp 16; \; 50m \pm 24; \; 50m \pm 14; \; 50m \pm 4; \; 50m \mp 6$$

ale căror cuburi se termină respectiv cu:

$$\pm 04; \pm 24; \pm 44; \pm 64 \text{ (sau } \mp 36) \text{ şi } \pm 84 \text{ (sau } \mp 16).$$

La fel se poate proceda şi cu alte grupuri $\pm \overline{zu}$, regăsindu-se toate terminaţiunile de două cifre ale cuburilor, precum şi forma numerelor corespunzătoare acelor cuburi şi chiar şi grupuri de două cifre, ce nu constitue terminaţiuni de cuburi.

3°. Forma generală a numerelor, având cuburile terminate cu un anumit grup de trei cifre. Luând din tabloul precedent pe fiecare formă generală a lui N, ridicând-o la cub şi punând condiţia să se termine cu un oarecare $\pm \overline{szu}$, voiu determina pe n depinzând de un parametru şi apoi forma lui N.

Iată un exemplu: *Care sunt cuburile terminate cu* $\pm \overline{s32}$?

Aceste cuburi se află printre cele terminate cu ± 32. Rădăcina lor e de forma: $50n \pm 18$, pe care o mai pot scrie $100n_1 \pm 18$ şi $100n_2 \pm 68$. Le ridic la cub şi găsesc:

$$N_1^3 = (100n_1 \pm 18)^3 = \pm 832 + 200n_1 + \text{Mult } 1000$$

şi

$$N_2^3 = (100n_2 \pm 68)^3 = \pm 432 + 200n_2 + \text{Mult } 1000$$

$$\therefore \quad \pm 832 + 200n_1 = \pm \overline{s32} + \text{Mult } 1000$$

şi

$$\pm 432 + 200n_2 = \pm \overline{s32} + \text{Mult } 1000$$

$$\therefore \quad 2n_1 = \pm (s - 8) + \text{Mult } 10 \quad \text{şi} \quad 2n_2 = \pm (s - 4) + \text{Mult } 10$$

$$\therefore \quad n_1 = \pm \left(\frac{s}{2} - 4\right) + \text{Mult } 5 \quad \text{şi} \quad n_2 = \pm \left(\frac{s}{2} - 2\right) + \text{Mult } 5.$$

Valoriile $s = 1, 3, 5, 7,$ şi 9 nu convin deci nu există cuburi terminate cu:

± 132; ± 332; ± 532 (sau ∓ 468); ± 732 (sau ∓ 268) şi ± 932 (sau ∓ 068).

Pentru valorile $s = 0, 2, 4, 6$ şi 8, găsesc respectiv:

$$n_1 = \mp 4 + 5m'; \mp 3 + 5m'; \mp 2 + 5m'; \mp 1 + 5m'; 5m'$$

şi

$$n_2 = \mp 2 + 5m''; \mp 1 + 5m''; 5m''; \pm 1 + 5m''; \pm 2 + 5m''$$

care introduse respectiv în:

$$N_1 = 100n_1 \pm 18 \quad \text{şi} \quad N_2 = 100n_2 \pm 68,$$

găsesc:

$$N_1 = 500m' \mp 382 \quad \text{şi} \quad N_2 = 500m'' \mp 132$$

sau concentrat:

$$N = 250m \pm 118$$

precum şi:

$$250m \mp 32; \quad 250m \pm 68; \quad 250m \mp 82; \quad 250m \pm 18,$$

care au cubul lor terminat respectiv cu:

± 032; ± 232; ± 432; ± 632 (sau ∓ 368) şi ± 832 (sau ∓ 168).

Procedând la fel şi pentru alte valori ale lui *szu,* voiu găsi forma generală a lui N, precum şi grupele ce sunt sau nu sunt, terminaţiuni de cuburi. Rezultatul acestor cercetări este dat în tabloul ce urmează în care în coloana N^3/szu sunt grupul de 3 cifre cu care se termină cubul lui N a cărui formă este dată în coloana lui N:

N	*szu*	N	*szu*	N	*szu*	N	*szu*	N	*szu*
$10n$	000	$1000n \mp 299$	± 101	$1000n \pm 401$	± 201	$1000n \pm 101$	± 301	$1000n \mp 199$	± 401
$1000n \pm 1$	± 001	$1000n \mp 113$	3	$1000n \pm 187$	3	$1000n \pm 487$	3	$1000n \mp 213$	3
$1000n \mp 413$	3	$250n \mp 116$	4	$1000n \pm 143$	7	$250n \pm 34$	4	$1000n \mp 257$	7
$1000n \mp 457$	7	$1000n \mp 157$	7	$250n \pm 102$	8	$1000n \pm 443$	7	$250n \mp 48$	8
$250n \pm 2$	8	$1000n \pm 269$	9	$1000n \mp 31$	9	$1000n \mp 331$	9	$1000n \pm 369$	9
$1000n \mp 431$	9	$1000n \pm 471$	± 111	$1000n \pm 171$	± 211	$1000n \mp 129$	± 311	$1000n \mp 429$	± 411
$1000n \mp 229$	± 011	$250n \pm 58$	2	$1000n \mp 83$	3	$250n \mp 92$	2	$1000n \mp 483$	3
$1000n \pm 317$	3	$1000n \mp 383$	3	$250n \pm 6$	6	$1000n \pm 217$	3	$250n \mp 94$	6
$250n \pm 106$	6	$1000n \pm 373$	7	$1000n \mp 327$	7	$1000n \mp 27$	7	$1000n \pm 273$	7
$1000n \pm 73$	7	$1000n \mp 361$	9	$1000n \pm 339$	9	$1000n \pm 39$	9	$1000n \mp 261$	9
$1000n \mp 61$	9	$1000n \pm 441$	± 121	$1000n \pm 141$	± 221	$1000n \mp 159$	± 321	$1000n \mp 459$	± 421
$1000n \mp 259$	± 021	$1000n \mp 53$	3	$1000n \pm 247$	3	$1000n \mp 453$	3	$1000n \mp 153$	3
$1000n \mp 353$	3	$40n \pm 5$	5	$250n \pm 74$	4	$1000n \mp 97$	7	$250n \mp 26$	4
$250n \mp 76$	4	$1000n \pm 303$	7	$1000n \mp 397$	7	$250n \pm 62$	8	$1000n \pm 203$	7
$1000n \pm 3$	7	$250n \mp 38$	8	$1000n \mp 491$	9	$1000n \pm 209$	9	$1000n \mp 91$	9
$1000n \pm 109$	9	$1000n \mp 191$	9	$1000n \pm 311$	± 231	$1000n \pm 11$	± 331	$1000n \mp 289$	± 431
$1000n \mp 89$	± 031	$1000n \mp 389$	± 131	$250n \mp 32$	2	$1000n \pm 477$	3	$250n \pm 68$	2
$250n \pm 118$	2	$1000n \mp 123$	3	$1000n \pm 177$	3	$250n \pm 46$	6	$1000n \mp 223$	3
$1000n \mp 423$	3	$250n \mp 104$	6	$1000n \mp 67$	7	$1000n \pm 233$	7	$1000n \mp 467$	7
$1000n \pm 333$	7	$1000n \mp 367$	7	$1000n \pm 479$	9	$1000n \pm 179$	9	$1000n \mp 121$	9
$1000n \pm 79$	9	$1000n \mp 221$	9	$1000n \mp 319$	± 241	$1000n \pm 381$	± 341	$1000n \pm 81$	± 441
$1000n \pm 281$	± 041	$1000n \mp 19$	± 141	$1000n \mp 293$	3	$1000n \pm 7$	3	$1000n \pm 307$	3
$1000n \pm 107$	3	$1000n \pm 407$	3	$1000n \mp 337$	7	$250n \mp 36$	4	$1000n \pm 263$	7
$1000n \pm 63$	7	$250n \pm 64$	4	$250n \pm 72$	8	$1000n \mp 37$	7	$250n \mp 78$	8
$250n \mp 28$	8	$1000n \pm 363$	7	$1000n \pm 249$	9	$1000n \mp 51$	9	$1000n \mp 351$	9
$1000n \mp 151$	9	$1000n \mp 451$	9	$1000n \pm 251$	± 251	$1000n \mp 49$	± 351	$1000n \mp 349$	± 451
$1000n \mp 149$	± 051	$1000n \mp 449$	± 151	$1000n \mp 163$	3	$250n \mp 22$	2	$1000n \pm 437$	3
$1000n \pm 237$	3	$250n \mp 122$	2	$250n \mp 14$	6	$1000n \pm 137$	3	$250n \mp 114$	6
$250n \pm 86$	6	$1000n \mp 463$	3	$1000n \mp 207$	7	$1000n \pm 93$	7	$1000n \pm 393$	7
$1000n \pm 193$	7	$1000n \pm 493$	7	$1000n \mp 181$	9	$1000n \mp 481$	9	$1000n \pm 219$	9
$1000n \pm 419$	9	$1000n \pm 119$	9	$1000n \pm 21$	± 261	$1000n \mp 279$	± 361	$1000n \pm 421$	± 461
$1000n \mp 379$	± 061	$1000n \pm 321$	± 161	$1000n \mp 433$	3	$1000n \mp 133$	3	$1000n \pm 167$	3
$1000n \mp 33$	3	$1000n \pm 267$	3	$250n \mp 96$	4	$1000n \mp 377$	7	$250n \pm 54$	4
$250n \pm 4$	4	$1000n \pm 23$	7	$1000n \pm 323$	7	$250n \pm 82$	8	$1000n \mp 77$	7
$1000n \mp 277$	7	$250n \mp 18$	8	$1000n \pm 189$	9	$1000n \mp 111$	9	$1000n \mp 411$	9
$1000n \mp 211$	9	$1000n \pm 489$	9	$1000n \mp 9$	± 271	$1000n \mp 309$	± 371	$1000n \pm 391$	± 471
$1000n \mp 409$	± 071	$1000n \pm 291$	± 171	$250n \mp 12$	2	$1000n \pm 197$	3	$250n \pm 88$	2
$250n \mp 112$	2	$1000n \mp 403$	3	$1000n \mp 103$	3	$40n \mp 15$	5	$1000n \pm 497$	3
$1000n \pm 297$	3	$250n \mp 24$	6	$1000n \pm 253$	7	$250n \mp 124$	6	$1000n \mp 147$	7
$1000n \mp 347$	7	$1000n \mp 47$	7	$1000n \pm 359$	9	$1000n \mp 447$	7	$1000n \mp 241$	9
$1000n \mp 41$	9	$1000n \mp 341$	9	$1000n \pm 161$	± 281	$1000n \pm 59$	9	$1000n \mp 439$	± 481
$1000n \mp 239$	± 081	$1000n \pm 461$	± 181	$1000n \mp 173$	3	$1000n \mp 139$	± 381	$1000n \pm 427$	3
$1000n \pm 227$	3	$1000n \mp 473$	3	$1000n \mp 417$	7	$1000n \pm 127$	3	$1000n \pm 183$	7
$1000n \mp 17$	7	$250n \pm 44$	4	$250n \mp 108$	8	$250n \mp 56$	4	$250n \mp 8$	8
$250n \pm 42$	8	$1000n \pm 283$	7	$1000n \pm 329$	9	$1000n \mp 117$	7	$1000n \mp 271$	9
$1000n \mp 71$	9	$1000n \mp 371$	9	$1000n \mp 469$	± 291	$1000n \pm 29$	9	$1000n \mp 69$	± 491
$1000n \pm 131$	± 091	$1000n \mp 169$	± 191	$1000n \pm 357$	3	$1000n \pm 231$	± 391	$1000n \mp 43$	3
$1000n \mp 243$	3	$250n \pm 98$	2	$250n \mp 84$	6	$250n \mp 52$	2	$250n \pm 66$	6
$250n \pm 16$	6	$1000n \pm 57$	3	$1000n \pm 313$	7	$1000n \mp 343$	3	$1000n \mp 87$	7
$1000n \mp 287$	7	$1000n \pm 13$	7	$1000n \pm 99$	9	$1000n \mp 387$	7	$1000n \pm 499$	9
$1000n \mp 301$	9	$1000n \pm 399$	9	—	—	$1000n \mp 201$	9	—	—

In acest tabel semnele se corespund, iar n este un întreg oarecare.

4°. In mod analog se pot determina terminaţiunile de *4, 5,...,p* cifre ale cuburilor perfecte, precum şi forma generală a numerelor corespunzătoare acestor cuburi.

Ca aplicaţiune se poate da problema 4440 [1]) în care se cere *cel mai mic cub, care se termină cu 659659.*

Mai general, se naşte forma generală a numerelor care au cuburile terminate cu *659659.* Ele vor fi printre cele ale căror cuburi sunt terminate cu *659.* Aceste numere sunt trecute în tablou la terminaţiunea — *341,* deci:

$$N = 1000n - 381 \quad \therefore \quad N = 1000n + 619.$$

Prin trei ridicări la cub succesive şi prin impunerea condiţiilor ca cuburile să se termine succesiv cu *9659, 59659* şi *659659,* se găseşte:

$$N = 10^6 m + 1619 \ , \ (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

In cazul particular al *problemei 4440,* cel mai mic cub se vede că este:

$$1619^3 = 3.243.659.659.$$

II. Dacă însemnăm cu x şi y două numere întregi, ale căror cuburi se termină cu acelaşi grup de p cifre ($p = 1, 2, \ldots$), atunci

$$x^3 - y^3 = k \cdot 10^p$$

este o ecuaţie interesantă, ale cărei soluţii în numere întregi, sunt tocmai rezultatele date la punctele 1°, 2° şi 3° din prezentul articol.

Pentru cazul pătratelor, D-l G-L GH. BUICLIU a rezolvat în numere întregi ecuaţia:

$$x^2 - y^2 = 10^n \cdot c$$

---

1) Soluţia problemei 4440 s'a publicat, pe o cale puţin diferită de cea din articolul de faţă, la pag. 207, Vol. XLI. — Am trimis la imprimat soluţia problemei 4440 la 25 Septembrie 1935 iar articolul D-lui I. V. MĂTIEŞ l-am primit ceva mai târziu.

D-L I. V. MĂTIEŞ a dat în articolul său toate calculele pentru rezolvarea problemei 4440, faţă de soluţia dela pag. 207 nu a mai fost cazul să le repetăm aici.

G-L GH. B.

în care c, este un întreg de o cifră, în *Gazeta Matematică, Vol. XXXI, pag. 402,* şi ecuaţia:

$$x^2 - y^2 = 4 \cdot 10^n M$$

în *Revista Matematică, Timişoara, Vol. XII, pag. 97.*

Aceste ecuaţii sunt cazuri particulare ale formei generale:

$$x^m - y^n = k \cdot 10^p .$$

Rezolvarea în numere întregi a acestei ecuaţii, pentru cazuri particulare ale lui p, cred că nu ar întâmpina mari greutăţi.

Notă. Ţinând seama de criteriile stabilite în acest articol, se rezolvă cu uşurinţă *problema 4213* din *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVIII, pag. 198.

IOAN V. MĂTIEŞ
Prof. Blaj.

NOTE MATEMATICE

25. *Din proprietăţile triunghiurilor*[1]). 1°. Dacă centrul O_9 al cercului lui EULER al triunghiului ABC se află pe acest cerc, atunci proecţiile lui O_9 pe laturile lui ABC se află pe o dreaptă Δ, care *trece prin punctul lui* LEMOINE *al triunghiului complimentar relativ la triunghiul median al triunghiului* ABC.

Proprietatea corelativă pentru triunghiul ABC şi triunghiul cu vârfurile în simetricele lui A, B, C faţă de laturile lui ABC a fost dată de JOUNGMAN în *Educational Times,* 1915 — 238.

2°. La proprietăţile punctului ω, conjugatul izogonal al lui O_9, publicate în *Gazeta Matematică,* Vol. XXXIII, pag. 283, se poate adăuga că

$$\frac{\omega O}{\omega O_9} = \frac{2R}{OH} .$$

In adevăr, după o teoremă atribuită lui AIYOR (*Mathesis,* 1923 — 426), avem:

$$OO_9 \cdot O\omega = R \cdot O_9\omega \quad \text{şi} \quad OH \cdot O\omega = 2R \cdot O_9\omega .$$

V. THÉBAULT.

1) Aceste proprietăţi au fost date de D-l V. THÉBAULT ca observaţii în soluţia pe care a trimis-o la problema 3045 publicată la pag. 295, Vol. XLI.

G-L GH. B.

26. *Divizibilitatea progresiunilor aritmetice.*

Fie:

$$a,\ b,\ c,\ \ldots\ l$$

n termeni ai unei progresii aritmetice de rație r și

1) $$S_m = a^m + b^m + c^m + \ldots + l^m .$$

Imi propun să arăt următoarele:

I. *Dacă* m *este par,* S_m *nu este divizibil cu* S_1.

In adevăr S_m se mai poate scrie:

2) $$S_m = a^m + (a + r)^m + \ldots + [a + (n - 1)\, r]^m$$

iar:

3) $$S_1 = n\,[a + \tfrac{1}{2}\,(n - 1)\, r].$$

Anulând pe S_1 și scoțând valoarea lui a, obținem:

4) $$a = -\frac{(n - 1)}{2} . r.$$

Inlocuind pe a din 4) în 2), atunci restul diviziunii lui S_m prin S_1 va fi:

5) $$R_m = r^m . \left[\left(-\frac{n-1}{2}\right)^m + \left(-\frac{n-3}{2}\right)^m + \ldots + \left(\frac{n-3}{2}\right)^m + \left(\frac{n-1}{2}\right)^m\right]$$

care se mai poate scrie:

6) $$R_m = \alpha . r^m . \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^m + \left(\frac{n-3}{2}\right)^m + \ldots + \left(\frac{\beta}{2}\right)^m\right]$$

unde:

$$\alpha = 1 + (-1)^m \text{ și } \beta = \frac{3 + (-1)^n}{2} .$$

Ori, dacă m este par, atunci:

$$R_m > 0$$

prin urmare S_m nu se împarte exact prin S_1.

II. *Dacă* m *este impar, atunci* S_m *este divizibil cu* S_1.

Dacă *m* este impar, atunci observăm că

$$\alpha = 0$$

deci:

$$R_m = 0$$

prin urmare S_m se împarte exact prin S_1.

III. *Dacă* $a \neq r$ *şi* m *este prim cu* S_1 *şi impar, atunci* S_m *nu se împarte exact cu nici o putere a lui* S_1 *mai mare ca* 1.

Pentru ca S_m să fie divizibil cu o putere a lui S_1, ar trebui ca cel puţin prima derivată a lui S_m să fie divizibilă cu S_1. Ori, ştim că:

$$7) \qquad S'_m = m \cdot S_{m-1}$$

unde S'_m este prima derivată a lui S_m. Dar *m* este prim cu S_1 şi impar, deci $(m-1)$ fiind par, conform primei propoziţii, S_{m-1} nu este divizibil cu S_1, prin urmare nici S'_m nu se împarte exact cu S_1.

Observaţie: In cazul când $a = r$ avem:

$$S_m = a^m [1^m + 2^m + \ldots + n^m]$$

şi

$$S_1 = a \cdot \frac{n(n+1)}{2} .$$

Iar cum avem:

$$8) \qquad C_p^1 \cdot s_{2p-1} + C_p^3 \cdot s_{2p-3} + \ldots = \tfrac{1}{2} n^p \cdot (n+1)^p$$

şi

$$9) \qquad \frac{2p+1}{1} \cdot s^{2p} + \frac{2p-1}{3} \cdot C_p^2 \cdot s_{2p-2} + \ldots = \tfrac{1}{2} n^p \cdot (n+1)^p \cdot (2n+1)^p$$

(vezi „*Théorie des Nombres*“ par E. LUCAS, pag. 236), unde:

$$s_m = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$$

înseamnă că oricare ar fi *m*, avem:

$$10) \qquad s_m = \mathcal{M}\, s_1^{\mu}$$

unde μ reprezintă partea întreagă a lui $\left(\frac{m+1}{2}\right)$.

Aşa dar, dacă $a = r$, avem:

$$11) \qquad S_m = M \cdot S_1^{\mu} .$$

MAIOR I. LINTEŞ.

27. *Asupra unor serii.* Metodele prin care s'au însumat seriile de forma

$$S = \alpha^m + (\alpha + 1)^m x + (\alpha + 2)^m x^2 + \ldots + (\alpha + p)^m x^p + \ldots$$

în două articole anterioare, sunt evident cunoscute şi derivă dintr'o proprietate mai generală pe care o semnalez aci.

Fie de însumat seria

$$(1) \quad S(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots$$

în care $p + 1$ coeficienţi consecutivi sunt legaţi printr'o relaţie de forma

$$(2) \quad u_{n+p} + a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \ldots + a_p u_n = 0$$

şi fie polinomul

$$\varphi(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p \ .$$

Se constată uşor că produsul $\varphi(x)\, S(x)$ este un polinom $P_{p-1}(x)$ de grad cel mult egal cu $p - 1$, de unde

$$S(x) = \frac{P_{p-1}(x)}{\varphi(x)}$$

rezultat care le cuprinde pe cele particulare la care m'am referit.

M. G.

BIBLIOGRAFIE

Numerus. Vol. I. Caetul 7 — 8. Ianuarie 1936. ISAC NEWTON. (Portretul matematic este extras cu unele modificări dintr'o conferinţă a D-lui I. IONESCU). Corespondenţă matematică. Premiul „SPIRU HARET". Géométrie du triangle par T. LALESCU.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 8. Octomvrie 1935. Buenos Aires. Conceptul general de putere, de Y. GONZALES PERERA. Asupra unei succesiuni de numere, de W. LEWINSKY.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXX. Fasc. IV. Octomvrie 1935. Buenos Aires.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLI. No. 10. Octomvrié 1935. Discuţiune asupra calculului funcţional, de L. M. GRAVES. Asupra teoremei lui PLESSNER, de W. C. RANDELS. Observaţie asupra metodei în algebra transfinită, de MAX ZORN. Asupra celor două proprietăţi interne ale planului continuu, de R. E. BASYE. O nouă teoremă universală a lui WARING pentru puterile opt, de ALVIN SUGAR. Câteva teoreme asupra invariantelor tensor diferenţiale, de JACK LEVINE. Ceva despre cele trei dimensiuni continui. de W. T. REID. Asupra unei teoreme a planului continuu, de W. T. REID, Constantele în problema lui WARING la puteri nedefinite, de R. D. JAMES. Soluţia generală a probemlei elastostaticei solidului isotropic omogen n — dimensional în spaţiul n — dimensional, de H. M. WESTERGAARD. Câteva extinderi ale funcţiunii lui BESSEL, de W. H. WISE. Asupra aproximaţiei de polinoame la funcţiunea analitică într'o regiune simplu conexată, de O. J. FARRELL. Asupra generalizării relaţiei lui PARSEVAL, de E. S. QUADE. Asupra compoziţiei formelor cuadratice, de E. D. JENKINS. Asupra fracţiilor continui de forma $1 + K_1^{\infty} (b, z/1)$, de H. S. WALL. Asupra ecuaţiilor matrice $P(X) = A$ şi $P(A, X) = 0$, de E. T. BROWNE. Distribuţia masei pentru mediile funcţiunilor potenţiale newtoniene, de J. M. THOMPSON. Errata, de A. P. COWGILL.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciţii. Anul II. No. 5. 1 Februarie 1936.

Journal de Mathématiques Elémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul 60. No. 7. 1 Ianuarie 1936. Paris.

Idem. Anul 60. No. 8. 15 Ianuarie 1936.

Idem. Anul 60. No. 9. 1 Februarie 1936.

Mathesis. Tomul XLIX. No. 10. Decemvrie 1935. Gembloux. Asupra descompunerii numerelor în sume de pătrate (sfârşitul), de G. LAMBERT. Un procedeu grafic de interpolare prin aplicarea metodei pătratelor mai mici, de M. DEWECK. Asupra transformărilor semicombescuriene ale unei curbe strâmbe de R. DEAUX.

Supliment oferit de D-l V. THÉBAULT: *Tetraedru mărginit de prisme drepte.*

Pitagora. Anul I. No. 3. Ianuarie 1936. Craiova. O aniversare glorioasă de N. BALABAN. Transformarea expresiilor $\sqrt[m]{A} + \sqrt[n]{B}$, de G. G. CONSTANTINESCU. Două teoreme de geometrie, de ILIE IONESCU. Asupra unei note, matematice, de G. G. CONSTANTINESCU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XV. No. 11. 15 Ianuarie 1936. Sur le point de FEUERBACH, de V. THÉBAULT. Pătrate remarcabile, de GH. CONSTANTINESCU.

Ştiinţă şi Progres. Anul II. No. 9. 1 Februarie 1936. Târgu-Mureş. Jubileul *Gazetei Matematice*, de AUREL A. VICIU. Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, de prof. V. ALACI. Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni (urmare), de R. BĂDESCU.

LADISLAV SEIFERT. *Sur une surface de sixième degré.* Publications de la Faculté des Sciences de l'Université MASARYK. 1935. No. 205. Brno.

JOSEF ZAHRADNICEK. *Ueber die Erregung von ungedämpften mechanischen Schwingungen.* Publications de la Faculté des Sciences de l'Université MASARYK. 1934. No. 198. Brno.

Chestiuni de Examen propuse la secţia matematică a Facultăţii de Ştiinţe din Cluj. Publicaţiunea Societăţii Licenţiaţilor în Matematici dela Universitatea din Cluj. No. 3. 1935. Preţul lei 25.

ERNEST ABASON. *Geometrie Descriptivă.* Clasa VII-a secundară, secţia ştiinţifică. Ediţia I. Aprobată de Ministerul Instrucţiunii cu No. 672/935. Editura „Adevĕrul". S. A. Preţul lei 100.

ERNEST ABASON, AL. ANDRONIC, GH. DUMITRESCU. *Trigonometrie* cu aplicaţiuni la statică şi agrimensură. Clasa VI-a secundară. Ediţia I. Aprobată de Ministerul Instrucţiunii cu No. 309/935. Editura „Adevĕrul" S. A. Preţul lei 140.

CERERI

254. Care sunt Revistele nematematice române, care au publicat totuşi probleme sau chestiuni matematice?

I. IONESCU.

DIVERSE

La *«Institut des hautes Etudes»* din Bruxelles, D-l P. SERGESCU a făcut în seara zilei de 17 Ianuarie o conferinţă asupra lucrărilor recente în teoria ecuaţiilor algebrice, iar în seara zilei de 18 Ianuarie asupra liniilor caracteristice ale matematicilor moderne. La Societatea matematică Belgiană, D-sa a făcut o conferinţă asupra matematicei în *Journal des Savants* în secolul XVII, revistă creiată în 1665 şi care apare şi azi. Printre scriitorii din secolul XVII se întâlnesc numele lui LEIBNIZ, HUYGHENS, CASSINI, ROLLE, L'HOPITAL, LAGNY, ROLLE, VARIGNON, PARENT, REGIS, OZANAM, etc.

I. I.

In cursul lunii Ianuarie, *Societatea Română de Matematici* a ţinut următoarele şedinţe:

La 13 Ianuarie, au comunicat D-nii: S. STOILOV despre *«Conexiunea locală»* şi N. CIORĂNESCU despre *«Derivata polidimensională»*.

La 27 Ianuarie au comunicat D-nii: D. POMPEIU despre *«Relaţiile lui* CAUCHY *pentru polinoamele cu o variabilă complexă»* şi G. CĂLUGĂREANU despre *«Funcţiuni întregi cu cercul de convergenţă linie singulară»*.

S'a ales comitetul Societăţii pentru anul 1936 compus astfel:

Preşedinte: *Miron Niculescu,* Vice-Preşedinte: *N. Ciorănescu.*

Secretari: *I. Cârstoiu* şi *C. Ionescu-Bujor.*

Membri în Comitet: *I. Ionescu, M. Ghermănescu, G. Sudan* şi *Cr. Mateescu.*

Comitetul buletinului: *G. Ţiţeica, V. Vâlcovici, D. Pompeiu, O. Onicescu* şi *D. Barbilian.*

Sporirea Bibliotecii.

F. I. C. Elements d'Algèbre. Huitième édition. Tours.
Donată de I. IONESCU. Inginer.

M. BOURDON. Eléments d'Algèbre. Paris, 1828.
Donată de I. IONESCU. Inginer.

* * *

Cărţile ce urmează au fost donate de *Institutul Naţional Român pentru studiul amenajării şi folosirii isvoarelor de energie. (I. N. R.)* prin D-l C. BUŞILĂ, Inginer.

1. — C. DINCULESCU. Tracţiunea pe căile ferate prin locomotive Diesel, Bucureşti 1933.

2. — C. TĂNĂSESCU. Une méthode graphique pour déterminer les conditions du fonctionnement des lignes de transmission de l'énergie électrique. Bucureşti 1928.

3. — J. TRIHOT-LASPIERRE. Les superréseaux électriques Français. Production et répartition de l'énergie électrique en France. Bucureşti 1934.

4. — N. VASILESCU-KARPEN. Passage du courant dans les électrolytes sans électrolyse. Bucureşti 1934.

5. — G. M. VATAMANU. Păcura şi cărbunii. Bucureşti 1933.

6. — C. VOINESCU. Posibilitatea întreţinerii motoarelor trifazice compensate în industria modernă în legătură cu factorul de putere. Bucureşţi 1931.

7. — A. ZĂNESCU. Intrebuinţarea păcurii ca combustibil la căile ferate. Bucureşti 1928.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 3290. *Un film de cinematograf este adus, spre a fi proectat, înfăşurat strâns pe o grosime de 22 cm., pe un rulou, al cărui diametru este de 8 cm. Proecţiunea se face cu o iuţeală de 20 imagini pe secundă şi o imagine ocupă o lungime de film de 5 cm. Prin proectare, filmul se desfăşoară automat de pe ruloul pe care a fost adus şi se înfăşoară pe un altul, al cărui diametru este de 12 cm. Ştiind că grosimea filmului este de două zecimi de milimetru, se întreabă:*

1. Ce lungime are filmul?

2. Cât durează proecţia?

3. Pe ce grosime se înfăşoară filmul pe al doilea rulou?

4. Care sunt vitezele unghiulare ale celor două rulouri, după 10 minute de proectare?

GEORGE BORNEANU.

1. Notăm cu L lungimea filmului, cu d_0 diametrul ruloului, cu $(d_1, d_2, d_3, \ldots d_n)$ respectiv diametrele mijlocii pentru $(1, 2, 3, \ldots n)$ înfăşurări ale filmului pe ruloul d_0 adică:

$$d_m = \tfrac{1}{2}(d_i + d_e) \; ; \; m = 1, 2, 3, \ldots n, \text{ înfăşurări.}$$

unde am notat cu d_i diametrul interior şi cu d_e diametrul exterior al filmului pentru o înfăşurare oarecare. Fie n numărul de înfăşurări şi δ grosimea filmului pe ruloul d_0. Avem:

$$L = \pi(d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n) = \pi\{(d_0+\delta) + (d_0 + 3\delta) + (d_0 + 5\delta) + \ldots + [d_0 + (2n - 1)\delta]\} = \pi\{nd_0 + \delta[1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 3) + 2n - 1]\} = \pi[nd_0 + \delta \cdot n^2]$$

căci filmul fiind destul de subţire şi *strâns* înfăşurat, se poate considera că fiecare înfăşurare este un cerc exact.

Deci: $$L = \pi \cdot n(d_0 + n \cdot \delta). \qquad (1)$$

Notăm cu x_0 grosimea de înfăşurare pe ruloul d_0, deci numărul de înfăşurări n este:

$$n = \frac{x_0}{\delta} = \frac{220}{0{,}2} = 1100 \text{ înfăşurări} \qquad (2)$$

Inlocuind în (1) pe d_0, δ, n prin valorile lor, găsim:

$$L = \pi \cdot n(d_0 + n \cdot \delta) = \pi \times 1100(8 + 1100 \times 0{,}02) = 3{,}14159 \times 33000$$

$$= 103672{,}47 \text{ cm.}$$

$$\therefore \quad L = 1036{,}7247 \text{ m.}$$

2. Notăm cu t timpul cât durează proecția, cu V, viteza de proecție (care va trebui să rămână în tot timpul proecției constantă). Avem:

$$V = 20 \text{ imagini/sec.} = 20 \times 5 \text{ cm/sec.} = 1 \text{ metru/sec.}$$

Deci: $$t = \frac{L}{V} = \frac{103672{,}47}{100} = 1036{,}7247 \text{ secunde.}$$

$$\therefore \quad t = 0{,}25 \text{ ore } 2 \text{ min. } 16{,}7 \text{ sec.}$$

3. Notăm cu y_0 grosimea de înfășurare pe al doilea rulou $d_1 = 12$ cm. și cu n_1 numărul de înfășurări. Eliminând pe n_1 între (1) și (2), după ce mai întâi s'a înlocuit x_0 prin y_0, găsim:

$$y_0^2 + d_1 y_0 - \frac{\delta \cdot L}{\pi} = 0, \tag{3}$$

unde înlocuind:

$d_1 = 12$ cm., $\delta = 0{,}02$ cm., $L = 103672{,}47$ cm., $\pi = 3{,}14159$,

avem succesiv:

$$y_0 = \left(\frac{1}{2} - d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + \frac{4\delta \cdot L}{\pi}} \right)$$

$$= -\frac{12}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + \underbrace{\frac{1}{\pi} \times 4 \times 0{,}02 \times 103672{,}47}_{2640}}$$

$$= -6 \pm 0{,}5 \times \sqrt{2784} = -6 \pm 0{,}5 \times 52{,}7636 = -6 \pm 26{,}3818.$$

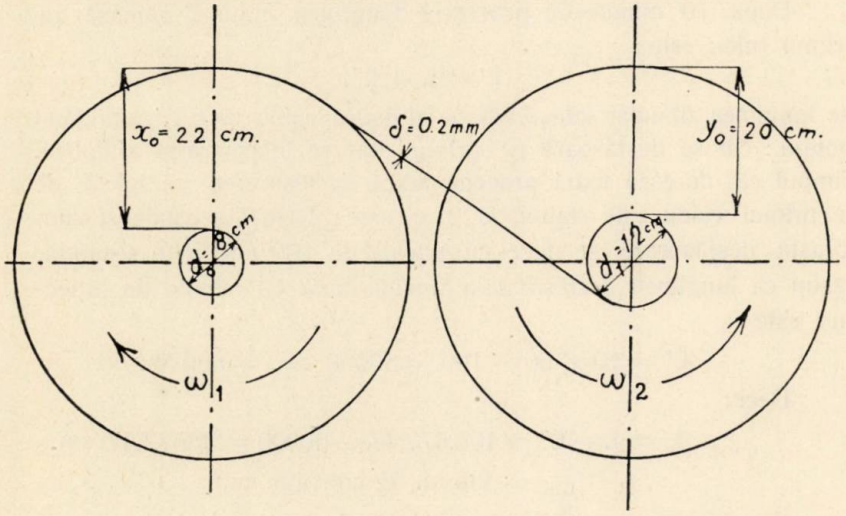
Rădăcina negativă n'are sens, avem deci:

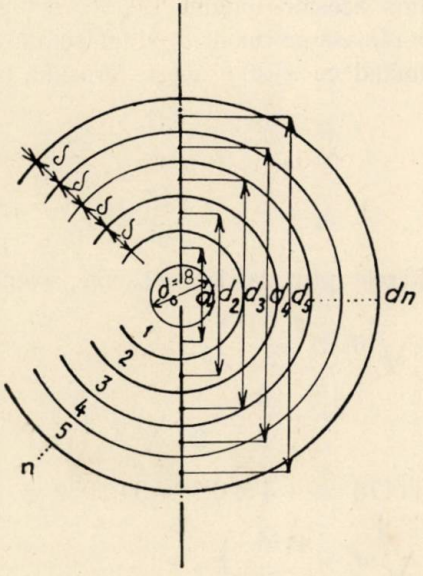
$$\therefore \quad y_0 = 20 \text{ cm. } 3{,}8 \text{ mm.}$$

Numărul de înfășurări pe ruloul $d_1 = 12$ cm este din:

$$_1 = \frac{y_0}{\delta} = \frac{20{,}38}{0{,}02} = 1019{,}09 \cong 1019 \text{ înfășurări.}$$

4. Notăm cu ω_1 şi ω_2 vitezele unghiulare de rotaţie ale celor două rulouri respectiv după 10 minute de proectare. Avem:





Sc. 1/10,

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{V}{\gamma_1} \cdot \dfrac{\gamma ad}{\sec} \\ \omega_2 = \dfrac{V}{\gamma_2} \cdot \dfrac{\gamma ad}{\sec} \end{cases} \qquad (4)$$

Unde : V = 1 metru/secundă, γ_1, γ_2 razele corespunzătoare ale lui ω_1 şi ω_2. Vom determina aceste raze în cele ce urmează.

După 10 minute de proectare lungimea filmului rămasă pe primul rulou este :

$$L' = L - L'',$$

iar lungimea filmului înfăşurată pe al doilea rulou este L'' admiţând ipoteza : cât se desfăşoară pe primul atât se înfăşoară pe al doilea. Timpul cât durează toată proecţia adică desfăşurarea completă de pe primul rulou este stabilit la 2, el este : 1036,7 secunde şi cum această desfăşurare se face cu iuţeala de 100 cm. în o secundă, găsim că lungimea desfăşurată a filmului după 10 minute de proectare este :

$$L'' = 10 \times 60 \times 100 = 60000 \text{ cm.} = 600 \text{ m.}$$

Deci :

$$L' = L - L'' = 103.672{,}47 - 60000 = 43672{,}47 \text{ cm.}$$
$$= 436 \text{ m. } 72 \text{ cm. } 4{,}8 \text{ mm.}$$

Corespunzător acestor lungimi L', L'' vom calcula grosimea filmului respectiv rămasă pe ruloul d_0 şi înfăşurată pe ruloul d_1 după relaţiunea (3). Notând cu x şi y aceste grosimi, avem :

$$x^2 + d_0 x - \frac{\delta . L'}{\pi} = 0,$$

$$y_2 + d_1 y - \frac{\delta L''}{\pi} = 0,$$

unde înlocuind literele prin datele cunoscute, avem succesiv :

$$x = \frac{1}{2}\left(-d_0 \pm \sqrt{d_0^2 + \frac{4 . \delta L'}{\pi}}\right)$$

$$= -\frac{8}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8^2 + \frac{4}{\pi} \times 0{,}02 \times 43672{,}47}$$

$$= -4 \pm 0{,}5 . \sqrt{1176} = -4 \pm 0{,}5 \times 34{,}2930 = -4 \pm 17{,}1465$$

$$y = \frac{1}{2}\left(-d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + \frac{4 . \delta L''}{\pi}}\right)$$

$$= -\frac{12}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12^2 + \frac{4}{\pi} \times 0{,}02 \times 60.000}$$

$$= -6 \pm 0{,}5 . \sqrt{1672} = -6 \pm 0{,}5 \times 40{,}8900 = -6 \pm 20{,}445.$$

De oarece rădăcinile negative nu au sens, avem:

$$\begin{cases} x = 13{,}1465 \text{ cm.} \\ y = 14,\ 445 \text{ cm.} \end{cases}$$

Razele sunt deci:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{d_1}{2} + x - \dfrac{\delta}{2} = \dfrac{8}{2} + 13{,}1465 - \dfrac{0{,}02}{2} = 17{,}1365 \text{ cm.} \\ \gamma_2 = \dfrac{d_1}{2} + y = \dfrac{\delta}{2} = \dfrac{12}{2} + 14{,}445 - \dfrac{0{,}02}{2} = 20{,}4350 \text{ cm.} \end{cases}$$

Deci vitezele unghiulare ω_1, ω_2, cerute sunt respectiv.

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{V}{\gamma_1} = \dfrac{100}{17{,}1365} = 5{,}84 \cdot \dfrac{\gamma ad.}{\text{sec.}} \\ \omega_2 = \dfrac{V}{\gamma_2} = \dfrac{100}{20{,}435} = 4{,}89 \cdot \dfrac{\gamma ad.}{\text{sec.}} \end{cases}$$

OCT. S. IANCULESCU
(Timişoara).

PROBLEMA 4213. *Cum se pot afla cuburile terminate cu* n *cifre identice ?*

Generalizare.

I. V. MĂTIEŞ.

Soluţia acestei probleme este cuprinsă în articolul ce se publică în numărul de faţă la pag. 332 cu titlul *„Terminaţiunea cuburilor perfecte şi a rădăcinilor lor"*.

In soluţia cu care D-l I. V. MĂTIEŞ a însoţit în 1932 problema sa de propus a dat rezultate care corespund cu acelea ce se publică în articolul său din acest număr.

GH. B.

PROBLEMA 4436. *Să se arate că dacă în triunghiul* ABC *medianele* BB' *şi* CC' *sunt perpendiculare între ele, aria triunghiului este dată de formula:*

$$S = a^2 \operatorname{tg} A.$$

Dintre toate triunghiurile ce se bucură de proprietatea de mai sus şi au aceeaşi bază BC *să se determine acelea pentru care unghiul* A *este maxim.*

N. C.

I. 1°. *Soluţie* dată de D-l AL. D. STOICA (Liceul «Marele Voevod Mihai» Bucureşti).

Fie AA' a treia mediană şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Triunghiul GBC având unghiul din G drept, vom avea:

$$\overline{GA'} = \frac{a}{2}$$

şi deci

$$\overline{AG} = 2\overline{GA'} = a.$$

Cercul BGC cu centrul în A' şi având diametrul BC trece prin piciorul B_1 al înălţimei BB_1. Insemnând cu M al doilea punct în care mediana AA' taie acest cerc, vom avea:

$$\overline{GM} = 2\overline{GA'} = a \quad , \quad \overline{AM} = \overline{AG} + \overline{GM} = 2a.$$

Puterea punctului A în raport cu cercul se poate scrie:

$$P = \overline{AB_1} \cdot \overline{AC} = \overline{AG} \cdot \overline{AM}.$$

Deci:

$$bc \cos A = 2a^2$$

sau

$$\frac{bc}{2} = \frac{a^2}{\cos A}.$$

Suprafaţa triunghiului este:

$$S = \frac{bc}{2} \sin A = a^2 \operatorname{tg} A.$$

2°. *Soluţie* dată de D-nii: VILHELM CSEKE (student Cluj), PANAIT MAZILU (elev inginer), AL. D. STOICA şi ILIE ION ŢIŢEICA (elev Liceul Mânăstirea Dealu).

Când latura a este constantă, mediana $\overline{AA'} = \frac{3}{2} a$ este de asemenea constantă şi vârful A descrie un cerc cu centrul în A'. Unghiul BAC este ascuţit deoarece:

$$\sphericalangle BAC < \sphericalangle BGC = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Maximul unghiului A are loc odată cu maximul lui tgA şi deci odată cu maximul lui $S = \frac{1}{2} a\, h_a$. Înălţimea h_a este maximă, când triunghiul BAC este isoscel. In acest caz:

$$\overline{GA'} = h_a = \frac{3}{2} a \ , \quad S = \frac{3}{4} a^2.$$

II. 1⁰. *Soluţie* dată de D-nii: MIRCEA NEGREA (Brăila), ION I. PETRESCU (student), FLORENTIN SAVOVICI (Şc. pregătitoare of. Geniu), N. BOITAN, GH. MÂGALĂ şi N. ROMAN (elevi Liceul Militar Cernăuţi), W. CSEKE, D. D. MAVRODIN, P. MAZILU şi I. I. ŢIŢEICA.

Cunoaştem relaţiunile care dau lungimile medianelor:

$$m_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} \quad , \quad m_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Aplicând teorema lui PITAGORA în triunghiul dreptunghic BGD vom avea:

$$(\tfrac{2}{3} m_b)^2 + (\tfrac{2}{3} m_c)^2 = a^2$$

sau

$$5a^2 = b^2 + c^2.$$

Rezultă de aci:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2a^2}{bc} \quad , \quad bc = \frac{2a^2}{\cos A}$$

$$S = \tfrac{1}{2} bc \sin A = a^2 \operatorname{tg} A.$$

2⁰. *Soluţie* dată de D-l DIMITRIE MAVRODIN (student).

Când a este constant, unghiul A fiind ascuţit, maximul său are loc odată cu minimul lui cosA, deci odată cu maximul produsului:

$$P = bc.$$

Acest produs e maxim în acelaşi timp cu patratul său

$$P^2 = b^2 c^2.$$

Maximul are atunci loc când factorii produsului sunt egali, deoarece suma lor este constantă.

Triunghiurile în care unghiul A este maxim sunt deci isoscele şi au lauturile:

$$b = c = \sqrt{\frac{5}{2}}\, a.$$

Observaţii. 1°. D-nii AMĂRĂŞTEANU (Craiova) şi IANCU N. SAGER au dat soluţiuni diferite.

2°. D-l D. D. MAVRODIN dă următoarea generalizare:

Dacă se consideră triunghiul ABC în care laturile satisfac relaţia:

$$b^2 + c^2 = na^2$$

n fiind un număr pozitiv, aria sa este dată de formula:

$$S = \frac{n-1}{4} a^2 \operatorname{tg} A.$$

Dintre toate triunghiurile, care se bucură de proprietatea aceasta, triunghiul isoscel face unghiul A maxim.

PROBLEMA 4553. *Ştiind că* a *şi* b *sunt rădăcinile ecuaţiei:*

$$x^2 + px + q = 0$$

în ce caz rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + ax + b = 0$$

sunt reale?

MAIOR I. LINTEŞ.

Rezolvând prima ecuaţie, avem:

1) $$a,\ b = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

iar din rezolvarea ecuaţiei a doua:

2) $$x_1, x_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Pentru ca x_1 şi x_2 să fie reali, trebue să avem:

$$a \text{ real şi } a^2 - 4b \geqslant 0.$$

Pentru ca a să fie real trebue să avem:

$$p \text{ şi } q \text{ reali şi } p^2 - 4q \geqslant 0,$$

sau:

$$p = \alpha_1 + \beta . i \text{ şi } \sqrt{p^2 - 4q} = \alpha_2 + \beta . i$$

ceeace ne dă:

$$q = \tfrac{1}{4} (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta i),$$

i fiind simbolul imaginarei.

De asemenea, pentru condiţiunea a doua, înlocuind pe a şi b obţinem:

$$\frac{p^2 - p\sqrt{p^2 - 4q} - 2q}{2} + 2p + 2\sqrt{p^2 - 4q} \geqslant 0,$$

sau:

$$p^2 + 4p - 2q - (p - 4)\sqrt{p^2 - 4q} \geqslant 0,$$

sau în sfârşit:

$$(p^2 + 4p - 2q)^2 \geqslant (p - 4)^2 (p^2 - 4q)$$

de unde deducem:

$$4p^3 - 12\, p . q + q^2 + 16\, q \geqslant 0$$

condiţie care se mai poate scrie:

3) $$q^2 - 4(3p - 4)\, q + 4p^3 \geqslant 0.$$

Ori dacă notăm membrul întâiu al acestei neegalităţi cu $f(q)$, şi dacă q_1 şi q_2 sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$f(q) = 0$$

atunci neegalitatea este satisfăcută pentru q în afara intervalului rădăcinilor.

I). Dacă p şi q sunt reali, atunci, avem:

4) $$q_{1,2} = 2\,(3p - 4 \pm \sqrt{(3p - 4)^2 - 4p^3})$$

înseamnă că trebue să avem cantitatea de sub radical nulă sau pozitivă, adică:

5) $$4p^3 - 9p^2 + 24p - 16 \leqslant 0.$$

Dar ecuația:

6) $$f(p) \equiv 4p^3 - 9^2p^2 + 24p - 16 = 0$$

nu are decât o singură rădăcină reală: $p_1 = 0{,}83\ldots$, prin urmare $f(p) < 0$ pentru $p < p_1$.

Așa dar pentru $p \leqslant 0{,}83\ldots$ avem satisfăcută condițiunea 3).

II). Dacă p și q sunt imaginari, atunci înlocuind valorile lor prin acele date mai sus, găsim că trebue să avem:

7) $$[\tfrac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta i)]^2 + 4(\alpha_1 + \beta i)^3 - 4[3(\alpha_1 + \beta i) - 4] \times [\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\beta i)] \geqslant 0.$$

Făcând calculele respective și grupând convenabil, găsim:

8) $$\begin{aligned} &\tfrac{1}{16}\cdot(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \tfrac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2\beta^2 \\ &+ 4\alpha_1(\alpha_1^2 - 3\beta^2) - 6\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &+ 8(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) + 12\beta^2(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &+ [\tfrac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2)\beta + 4\beta(3\alpha_1^2 - \beta^2) \\ &- 12\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)\beta + 16(\alpha_1 - \alpha_2)\beta \\ &- 6(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)\beta]i \geqslant 0. \end{aligned}$$

Trebue deci să avem partea reală de sub imaginară nulă, adică:

9) $$(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) - 24(\alpha_1 + \alpha_2) + 64 + \frac{16(3\alpha_1\alpha_2 - \beta^2)}{\alpha_1 - \alpha_2} = 0,$$

care, împreună cu condiția ce ne mai rămâne din 8), adică:

10) $$\begin{aligned} &(\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4(\alpha_1 - \alpha_2)^2\beta^2 \\ &- 96(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_1 + 128(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &+ 64\cdot\alpha_1(\alpha_1^2 - 3\beta^2) \geqslant 0, \end{aligned}$$

constituește posibilitățile de determinare pentru valorile lui α_1, α_2 și β în cazul când p și q sunt imaginari.

Notă. 1) Au rezolvat problema găsind numai condiţiunea 3) D-nii: M. AMĂRĂŞTEANU, P. COJOCARU şi V. ENĂŞESCU.

2) A trimis o soluţie puţin diferită D-l V. CEAUŞESCU.

D-nii: S. HORENŞTEIN şi V. VISARION au făcut greşeli de calcul în exprimarea condiţiunei 3).

3) Am mai primit o soluţie dela D-ra FILOFTEIA ANTONESCU.

4) Problema poate să fie desăvârşită în rezolvare prin determinarea completă a lui α_1, α_2 şi β. Vom publica bucuroşi o astfel de completare.

MAIOR I. LINTEŞ.

PROBLEMA 4572. *Să se găsească pătratele de 3 cifre* $N^2 = abc$, *astfel ca*

$$20a + b = 2k \,.\, N$$

k *fiind unul din numerele 1, 2, 3.*

ALEXANDRU V. NICULESCU.

Soluţie. Din enunţ deducem:

$$N^2 = 100a + 10b + c$$

$$2kN = 20a + b;$$

eliminând pe a rezultă ecuaţia:

$$N^2 - 10k \,.\, N - (5b + c) = 0$$

de unde scoatem pentru N numai valoarea

$$(1) \qquad N = 5k + \sqrt{25k^2 + 5b + c} \leqslant 31.$$

Cazul I. $k = 1.$

Cum $0 \leqslant b,\ c \leqslant 9$

avem $0 \leqslant 5b + c \leqslant 54$

şi $29 \leqslant 25 + 5b + c \leqslant 79.$

Numărul $(25 + 5b + c)$ fiind un pătrat perfect, trebue să considerăm pătratele cuprinse între 25 şi 79, adică 25, 36, 49, 64.

Vom avea următoarele ecuații în numere întregi:

$$5b + c = 0 \ , \ 5b + c = 11 \ , \ 5b + c = 24 \ , \ 5b + c = 39.$$

a) $5b + c = 0$ ne dă $b = c = 0$ $N^2 = 100 = 10^2$

b) $5b + c = 11$ » » $\begin{cases} c = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ sau $\begin{matrix} c = 6 \\ b = 1 \end{matrix}$ $N^2 = 121 = 11^2$

c) $5b + c = 24$ » » $\begin{cases} c = 4 \\ b = 4 \end{cases}$ sau $\begin{matrix} c = 9 \\ b = 3 \end{matrix}$ $N^2 = 144 = 12^2$

d) $5b + c = 39$ » » $\begin{cases} c = 4 \\ b = 7 \end{cases}$ sau $\begin{matrix} c = 9 \\ b = 6 \end{matrix}$ $N^2 = 169 = 13^2$.

Cazul II. $k = 2$.

Printr'un raționament analog, va trebui să căutăm pătratele cuprinse între 100 și 154, în virtutea relației

$$100 \leqslant 100 + 5b + c \leqslant 154;$$

rezultă ecuațiile:

$$5b + c = 0 \ ; \ 5b + c = 21 \ ; \ 5b + c = 44.$$

a) $5b + c = 0$ ne dă $b = 0$, $c = 0$ $N^2 = 400 = 20^2$

b) $5b + c = 21$ » » $\begin{cases} c = 1 \\ b = 4 \end{cases}$ sau $\begin{matrix} c = 6 \\ b = 3 \end{matrix}$ $N^2 = 441 = 21^2$

c) $5b + c = 44$ » » $\begin{cases} c = 4 \\ b = 8 \end{cases}$ sau $\begin{matrix} c = 9 \\ b = 7 \end{matrix}$ $N^2 = 484 = 22^2$.

Cazul III. $k = 3$.

Inegalitățile la care trebue să satisfacem sunt

$$225 \leqslant 225 + 5b + c \leqslant 279.$$

Pătratele cuprinse între aceste numere sunt 225, 256; vom avea deci ecuațiile

a) $5b + c = 0$ care ne dă $b = c = 0$ $N^2 = 900 = 30^2$

b) $5b + c = 31$ » » » $\begin{cases} c = 1 \\ b = 6 \end{cases}$ sau $\begin{matrix} c = 6 \\ b = 5 \end{matrix}$ $N^2 = 961 = 31^2$.

Așa dar problema are *9 soluții,* adică:

100 , 121 , 144 , 169 , 400 , 441 , 484 , 900 , 961.

Observaţiuni. 1) In cazul precizat de problemă, condiţia „$k = 1, 2, 3$" trebue înlocuită cu „k întreg şi pozitiv", ceeace se vede uşor din relaţia (1).

2) Se observă apoi că pentru $k \geqslant 5$ singurele soluţii sunt

$$N = 50 \ , \ 60 \ , \ \ldots \ 10k.$$

Au dat 8 soluţii D-nii: AMĂRĂŞTEANU F. M. (Lic. „Fraţii Buzeşti" Craiova), utilizând încercări şi urmând o cale mai greoaie — cu scăpări de calcul, ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE (Lic. „N. Filipescu" M-rea Dealu), şi MARCOVICI EUGEN (Iaşi).

Au dat 6 soluţii D-nii: ENĂŞESCU VICTOR (elev Botoşani),—prin încercări,—GABROWSCHI F. EUG. (Orhei),—o bună soluţie însă incompletă şi C-TIN N. GAVRILESCU (Bacău), utilizând încercări şi având oarecari greşeli de calcul.

ALEX. V. N.

EXERCIŢII

10. Să se rezolve ecuaţia:

$$(\cos x + 1)^2 [\cos^2 x + 4 \cos x + 1] - \sin^2 x = 0.$$

SUB-LT. ION C. SAVIN.

R. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$(\cos x + 1)^4 + 2 \cos x (\cos x + 1)^2 - \sin^2 x = 0.$$

De unde punând $\cos x + 1 = y$ avem

$$y^4 + 2 \cos x y^2 - \sin^2 x = 0$$

de unde

$$y^2 = -\cos x \pm \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\cos x \pm 1.$$

De unde

$$(\cos x + 1)^2 = -(\cos x + 1) \text{ ne dă } \cos x = -1$$

De asemeni

$$\cos x = -2.$$

$$(\cos x + 1)^2 = -(\cos x - 1) \text{ ne dă } \cos x = 0$$

$$\cos x = -3.$$

Valorile reale sunt

$$\cos x = 0 \quad \text{şi} \quad \cos x = -1.$$

De unde

$$x_1 = (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad x_2 = (2k+1)\pi.$$

11. Dacă

$$\frac{\sin 2a}{\sin 2b} = \frac{\sin 2c}{\sin 2d},$$

există egalitatea

$$\frac{\operatorname{tg}(a+b)}{\operatorname{tg}(a-b)} = \frac{\operatorname{tg}(c+d)}{\operatorname{tg}(c-d)}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

R. Condiţia conduce la

$$\frac{\sin 2a + \sin 2b}{\sin 2a - \sin 2b} = \frac{\sin 2c + \sin 2d}{\sin 2c + \sin 2d}$$

de unde,

$$\frac{\sin(a+b)\cos(a-b)}{\sin(a-b)\cos(a+b)} = \frac{\sin(c+d)\cos(c-d)}{\sin(c-d)\cos(c+d)}$$

şi egalitatea cerută urmează imediat.

12. Paralelele duse printr'un punct arbitrar P, la laturile triunghiului ABC, determină pe laturile triunghiului său podar, $P_a P_b P_c$, trei puncte α_a, α_b, α_c colineare.

N. N. MIHĂILEANU.

R. $$\frac{\alpha_a P_b}{\alpha_a P_c} = \frac{PP_b}{PP_c} \cdot \frac{\sin\alpha_a PP_b}{\sin\alpha_a PP_c}$$

$$= \frac{PP_b}{PP_c} \cdot \frac{\cos(PL_a, AC)}{\cos(PL_n, AB)} = \frac{PP_b}{PP_c} \cdot \frac{\cos B}{\cos C} \quad \text{etc...}$$

13. Fie O' simetricul centrului cercului I înscris în triunghiul ABC, în raport cu cercul circumscris O: fie N_a, N_b, N_c contactele cercului înscris I, pe laturile triunghiului; I_a, I_b, I_c centrele cercurilor exînscrise.

Dreptele $I_a N_a$, $I_b N_b$, $I_c N_c$ concură pe OI în Q şi

$$QI : QO' = 2 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. Se ţine seamă că ABC este triunghiul ortic al lui $I_a I_b I_c$ şi de problema 3265 [G. M. XXX. 354].

14. Două avioane sboară în acelaş timp din Bucureşti la Constanţa (227 km) cu iuţeli uniforme. Unul ajunge înaintea celuilalt cu 9'43", 30.

Ştiind că iuţeala primului avion este cu 30 km/oră mai mare, se cer iuţelile celor două avioane.

I. L.

R. Se găsesc ecuaţiile diferenţei şi produsului vitezelor, de unde se ajunge la iuţelile: 220 km/oră şi 190 km/oră.

PROBLEME PROPUSE

4627. Un proverb românesc zice: „*A te duce 9 ani de Duminici*". Ce interval de timp corespunde acestui blestem?

I. IONESCU.

4628. Să se găsească pătratele perfecte de cinci cifre *abcde*, astfel ca produsul dintre numărul *ab* şi numărul *de*, divizat cu cifra *c*, să dea un cub perfect. O. ORĂNESCU.

4629. In sistemul de numeraţie cu baza *6*, să se găsească un pătrat perfect de patru cifre, asfel încât acest pătrat şi rădăcina sa să aibă cele şase cifre toate diferite între ele.

V. THÉBAULT.

4630. Există o fracţiune continuă, ale cărei câturi incomplete să reprezinte, în ordine, anul înfiinţării şi anii în care *Gazeta Matematică* sărbătoreşte un multiplu de patruzeci de ani de existenţă?

M. GHERMĂNESCU.

4631. Se consideră un punct, o dreaptă şi un cerc. Să se construiască un triunghiu echilateral cu vârfurile pe aceste elemente.

PROF. GH. BASACOV.

4632. Fie D, D_1, D_2, D_3 patru semidrepte concurente în O şi formând trei unghiuri egale în această ordine; fie încă D, D', D'', D''' patru paralele echidistante. Dreptele D_1 şi D' se taie în M; se ia pe D_3, $OP = OM$; perpendicularele în M şi P pe D, taie pe D, respectiv D''' în N şi Q.

Avem relaţia:

$$\overline{PQ} \cdot \overline{OM}^2 = 4\,\overline{MN}^3 .$$

N. N. MIHĂILEANU.

4633. Pe o parabolă dată se consideră punctele B, C, D. Din B şi D se duc paralele la CD şi BC. Fie E, A punctele unde aceste paralele taie din nou parabola, iar I intersecţia lor. Să se demonstreze că:

$$\overline{IA} \cdot \overline{IE} = 4\,\overline{IB} \cdot \overline{ID}$$

şi să se deducă relaţia:

$$\left(\frac{AD}{BC} - 1\right)\left(\frac{BE}{CD} - 1\right) = 4.$$

E. CARAMAN.

4634. Să se arate că dacă $b^2 - 4ac = 0$ există identitatea:

$$4(2b - a - 4c)(2b - c - 4a) \equiv (5b - 4a - 4c)^2.$$

Să se se interpreteze rezultatul.

AL. A. ROŞU.

4635. Intre laturile a, b, c ale unui triunghiu ABC avem relaţiile:

$$a > b > c.$$

Să se demonstreze inegalităţile:

$$b^2 + 2ac\left[\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right] \leqslant a^2 \leqslant b^2 + 2ac\left[\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right]$$

$$c^2 + 2ab\left[\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right] \leqslant a^2 \leqslant c^2 + 2ab\left[\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right) + 1\right].$$

N. BOTEA.

4636. Un triunghiu ABC are vârful A fix, iar vârfurile B şi C mobile pe o sferă dată O.

Să se demonstreze că centrul de greutate al triunghiului ABC nu poate ieşi din interiorul unei suprafeţe Γ şi să se determine această suprafaţă.

Soluţiuni geometrice. ULPIU FLORESCU.

4637. Să se stabilească natura seriei:

$$u_n = a^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \mathrm{L}n},$$

când $n \to \infty$, şi să se arate că ea este independentă de valoarea lui a.

PETRE MIRESCU.

4638. Tangenta în M la curba (M) şi perpendiculara pe raza vectoare OM întâlnesc axele rectangulare O_x, O_y în T, T' şi P, P'. Dacă M', M'' sunt proiecţiile lui M pe aceleaşi axe, se cere să se găsească curba (M) pentru care avem una din egalităţile:

$$\pm \text{Supr. } OTT' \pm \text{Supr. } OPP' = \pm 2 \text{ Supr. } OM'MM''.$$

Semnele $\pm$ se vor lua în toate modurile posibile.

Să se compare rezultatele cu acelea găsite la *problema 886* rezolvată în *Gazeta Matematică*, Vol. XXXIV, la pag. 141.

G-L GH. BUICLIU.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Agrigoroaei I. (4520, 24); *Amărăşteanu M.* (4573); *Apostol Radu* (4526, 68); *Ardeleanu D.* (4544, 617); *Blaga Em.* (4543, 70, 85, 623); *Bogdan Gr. I.* (4435, 520, 24, 44, 45); *Boroş C. I.* (4407, 22, 539, 41, 45, 70, 84, 623); *Bucur N. V.* (4413, 543, 44, 45, 623, 24); *Buzincu I.* (4506, 18, 24, 42, 43, 44, 45, 56, 57, 85, 624, P); *Ceauşescu V.* (4459, 71, 525, 44, 45, 73); *Cercelaru D.* (4597, 610, 17, 23); *Chiriţă M.* (4506, 45, P); *Cioc D.* (4557, 99); *Ciucă I.* (4544); *Cojocaru P.* (4506, 44, 45, 56, 85, 623, 24, P); *Cornăţeanu A.* (4623, 24); *Dimitriu C. Ion* (4387, 506, 07, 20, 24, 45, 85); *Dumbrăvescu Dorel* (4519, 20); *Enache I.* (4413, 35, 520, 44, 45); *Florescu Victor* (4418, 43, 541, 52, 56, 60, 72, 85); *Gadidov Victor* (4507); *Gavrilescu C.* (4507, 42, 57, 70, 99, 617, 23); *Ghişoiu Cornel* (4556); *Goldemberg M.* (4407, 623, 24); *Ignatiu Tr.* (4572); *Ionescu D.* (4544); *Knall Al.* (4460, 524, 43); *Knall Sandy* (4506); *Lebădă D.* (4478); *Litinski I.* (4623, 26); *Manac M.* (4545); *Marcovici Eugen* (4585); *Marin Dan* (4544, 45); *Marteş Gr.* (4386, 545, 56); *Matei D.* (4570); *Mavrodin D.* (4419, 577, 85); *Mazilu P.* (4459, 545); *Mihalcea D.* (4506, 07, 20, 24, 44); *Moisovici Şt.* (4597, 617, 623); *Năstase Marin* (4518, 82, 617, 24); *Negrea Mircea* (4585, 95); *Petrescu I.* (4527); *Popescu M.* (4623); *Postelnicescu M.* (4306, 418, 32, 519, 75, 609); *Şabac I.* (4450, 55); *Săndulache C.* (4563, 70, 614); *Ştefănescu D. N.* (4573, 623, 24); *Stoica D. A.* (2536, 3824, 4422, 551, 74, 84, 609, 17, 23); *Streder I.* (4570, 623, 24); *Ţarina N.* (4624); *Tătaru N.* (4623); *Timiş I.* (4585); *Ţiţeica I.* (4387, 528, 52, 73, E); *Tudorel Gh.* (4459); *Vasilescu A. Alexandra* (4560, 70, 73, 86, 606, 11); *Vasilescu A. Alexandru* (4563); *Vişa E.* (4573, 624, A, N, P).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face pe dimensiunea cea mică, ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi St. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 . . . . . Lei 30

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

La aceste preţuri se vor adăogă taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN.**

C. 40469

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 7. — MARTIE 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Sărbătorirea celor 40 ani ai „Gazetei Matematice".
Cuvântarea D-lui profesor *Gr. G. Stratilescu.*
Cuvântarea D-lui doctor *Săvescu.*
Cuvântarea D-lui profesor *V. Alaci.*
Cuvântarea D-lui profesor *N. Abramescu.*
Cuvântarea D-lui profesor *Gh. Em. Filipescu.*
Cuvântarea D-lui *Gh. Th. Gheorghiu.*
Cuvântarea Elevului *Vintilă Grigorescu.*
Cuvântarea D-lui profesor *A. G. Ioachimescu.*
2. Sur une généralisation du théorème de Droz-Farny . . . . . *R. Goormaghtigh.*
3. Asupra unor configurații de puncte colineare . . . . . *C. Ionescu-Bujor.*
4. Asupra ecuațiunilor cu rădăcinile în progresie aritmetică . . . . . *Lt. C-dor Gh. Niculescu.*
5. Note Matematice: 28 — 30.
6. Bibliografie.
7. Cereri : 255.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate : 1576, 4341, 4424, 4454, 4519, 4537, 4539, 4543.
10. Exerciții : 15 — 18.
11. Probleme propuse : 4639 — 4650.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procura dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 300, 04, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 72, 89, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 42, 45, 49, 52, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 94, 98, 500, 03, 05, 09, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 30, 31, 33, 34, 47, 50, 58, 59, 61, 64, 76, 78, 79, 80, 83, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 96, 98, 601, 02, 03, 04, 05, 07, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 27, 28, 30, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

Avem plăcerea a anunţa că dela 27 Februarie a. c., mai fac parte din Societatea noastră şi Domnii: RADU BĂDESCU, doctor în matematici; GH. CARTIANU, inginer; ION COŞEREANU, inginer; IOAN G. DROSESCU, inginer; ION C. DUMITRESCU inginer; ADRIAN C. GHEORGHIU, licenţiat în matematici; AL. GUŢU, inginer; H. P. IONESCU-BISS, licenţiat în matematici; CONST. D. IONESCU-ŢIU, locotenent de geniu; CONST. ISTRATI, căpitan-inginer; PETRU LAMOTH, licenţiat în fizico-matematici; CORNELIU N. POPESCU, licenţiat în matematici; IOAN ST. TOMESCU, inginer şi AUREL A. VICIU, licenţiat în matematici.

SĂRBĂTORIREA CELOR 40 ANI AI „GAZETEI MATEMATICE“

In continuarea articolelor cu acelaşi titlu publicate în *Gazeta Matematică* No. 5 — 6 din anul XLI, dăm mai jos cuvântările ţinute la «şedinţa festivă» dela Şcoala Politehnică din Bucureşti.

Cuvântarea D-lui profesor Gr. G. Stratilescu

Doamnelor şi Domnilor,

Sărbătorim azi învăţământul ştiinţelor matematice în ţara noastră, învăţământ reprezentat atât de bine, atât de strălucit, în aceste din urmă patru decenii şi azi, de *Gazeta Matematică* şi de întemeietorii şi colaboratorii acestei gazete.

In numele *Societăţii Politehnice*, vechea noastră Societate Politehnică, prima societate românească de ingineri, întemeiată acum 54 de ani în ţara noastră şi care cuprinde în sânul ei şi oameni de alte ştiinţe, din acele ramuri ale ştiinţelor pure care au strânsă legătură cu ştiinţa inginerului, pe matematicieni în prima linie, — vorbesc deci aci în special în numele inginerilor români, privind lucrurile în deosebi din punctul de vedere al inginerului, — aduc valoroasei reviste *Gazeta Matematică* vii şi călduroase felicitări pentru împlinirea a 40 de ani de existenţă neîntreruptă şi rodnică, exprim sentimentele noastre de admiraţiune pentru această îndelungată, frumoasă şi utilă activitate şi aduc un omagiu de recunoştinţă acelor cari, înarmaţi numai cu entusiasmul lor, cu ştiinţa lor şi cu iubirea lor de ştiinţa matematică şi de cultura românească, au întemeiat această revistă acum 40 de ani şi apoi, cu munca lor, cu devotamentul lor, cu stăruinţa lor şi fără niciun ajutor din afară, i-au asigurat existenţa, — o valoroasă existenţă, — în tot acest timp de 40 de ani.

A contribuit *Gazeta Matematică* în tot acest timp de 40 de ani la răspândirea şi propăşirea ştiinţelor matematice în ţara noastră, trezind, în special în păturile tineretului nostru studios, interesul pentru studiul matematicilor şi gustul pentru acest studiu, reluând astfel, continuând, îmbunătăţind şi amplificând opera primilor pionieri ai studiului matematicilor la noi, în special al acelei vechi reviste

de matematici, «Recreații Științifice», întemeiată la Iași de un mic grup de profesori universitari și secundari, acum mai bine de 50 de ani, — primul număr al acelei reviste a apărut la 1 Ianuarie 1883, când noi cei bătrâni de azi eram în ultimii ani ai liceului, — revistă care și ea a trezit atunci în un înalt grad interesul pentru studiul matematicilor în păturile tineretului studios, care și ea propunea pentru tineri probleme și apoi publica soluțiile primite, cu numele celor cari dăduseră soluțiunile, dar care nu a putut dura decât șase ani.

Puternice legături sufletești ne leagă pe noi membrii Societății Politehnice de *Gazeta Matematică:* pe cei tineri, amintirea că s'au împărtășit și au profitat de învățăturile răspândite de această revistă; pe cei în vârstă, sentimentul de admirațiune pentru folositoarea operă a acestei reviste, pe care ei au primit-o întotdeauna cu o deosebită simpatie, chiar dacă nu se găseau printre colaboratorii ei.

Dar, în afară de acestea, corpul ingineresc datorește o deosebită recunoștință acestei Gazete, ca și tuturor acelor cari au cultivat științele matematice la noi, și pentru alte motive: pentrucă studiul matematicilor desvoltă în o largă măsură, în special la tineret, raționamentul strâns, precis, dă judecății o ascuțime, o disciplină, o ordonanță deosebită, calități foarte prețioase pentru profesiunea de inginer; de asemenea, pentrucă cunoștințele matematice sunt de cel mai mare folos inginerului, și aceste cunoștințe vor fi cu atât mai bine și mai complet câștigate, asimilate de cei ce studiază ingineria, cu cât ei vor fi început mai din vreme a se interesa de dânsele, a se îndeletnici cu dânsele, a trăi oarecum în o atmosferă cât mai impregnată de matematici. Matematicile constituesc o importantă parte din știința inginerului.

Inginerul e om de știință, de știință aplicată. Fără știință, el nu poate fi decât un practicant al cunoștințelor câștigate prin practică numai, un om al rutinei, incapabil a se ridica la concepțiuni mai înalte, incapabil de a contribui la progres, — afară doară de acel slab progres la care se ajunge pe dibuite prin rutină, — cu totul incapabil de a realiza progrese de mare anvergură.

De sigur, ingineria nu e matematică, sau, mai exact zis, nu e numai știință matematică, calcul matematic; ea e ceva mult mai vast, mai larg. De multe ori chiar, în opera inginerului, în

realizările lui, calculul nici nu e partea cea mai importantă; calculul matematic e însă pentru inginer un instrument din cele mai prețioase, pe care el trebue să știe să-l mânuiască cu ușurință, cu abilitate și, — trebue să adăugăm imediat, — cu discernământ.

In activitatea sa, inginerul dă, de multe ori, în unele chestiuni, soluțiuni dictate de considerațiuni cu totul altele decât calculul matematic; de foarte multe ori însă el are nevoie să verifice prin calcul dacă soluțiunea adoptată de dânsul satisface și altor condițiuni, indispensabile. Invers: uneori el găsește prin calcul unele rezultate, pe care apoi trebue să le verifice prin experiențe directe. Căci calculul, în problemele inginerești, se face pornind dela oarecari ipoteze, bazându-se calculul pe aceste ipoteze, care, dacă nu corespund exact realității, duc la aceea că rezultatul calculului e fals, deși calculul în sine ar fi bine făcut. Acest lucru e caracteristic în știința și arta inginerului: o foarte strânsă legătură, colaborare putem zice, între calculul matematic și experiența directă, care se verifică și controlează reciproc. Grație colaborării acestor doi factori, — calculul matematic și experiența directă, — s'au putut realiza imense progrese în diferitele ramuri ale ingineriei, din care cele mai multe au luat început fără nicio contribuție a calculului. In electrotehnică, în ingineria mecanică, în ingineria de construcțiuni, în ingineria militară, în special în balistică, în ingineria de construcțiuni navale, în construcțiunea avioanelor, etc. contribuțiunea calculului matematic a dus la progrese uimitoare. Astfel, s'a ajuns azi să se poată executa acele construcțiuni grandioase, — poduri sau alte construcțiuni, — care acum câteva decenii ar fi părut ne-realizabile. Cât progres, față de acele timpuri, — de acum un secol și ceva, — când unele poduri sau alte construcțiuni, deși executate de constructori cu reputațiune, se surpau după terminarea lor, dacă nu chiar în timpul construcțiunii! — In materie de căi ferate, cât progres, de asemenea! — De unde, pe timpul lui STEPHENSON, inventatorul locomotivei și constructorul primelor adevărate căi ferate, — acum o sută și câțiva ani, — atât calea ea însăși, cât și vehiculele ce circulau pe dânsa, inclusiv locomotiva se construiau în mod cu totul empiric, numai după rutină, astăzi calea ferată se studiază, se calculează, se construește în mod științific, avându-se în vedere condițiunile de circulațiune în care ea se va găsi, adică a sarcinilor ce va suporta și a viteselor la care trenurile vor circula pe dânsa.

Şi tot aşa se studiază şi se construesc şi vehiculele ce circulă pe calea ferată, în special locomotivele. Rezultatul e că, de unde pe vremea lui STEPHENSON, trenurile circulau cu vitese de cel mult 40 — 50 km pe oră, cu o siguranţă dubioasă, azi s'a ajuns a se circula pe calea ferată cu vitese de 200 şi chiar 250 km pe oră, în condiţiuni de siguranţă desăvârşită. — Iar în construcţiunea avioanelor, — cea mai nouă ramură a ingineriei, — progresele realizate sunt atât de mari, încât s'a ajuns azi a se sbura cu vitesele fantastice de peste 400 şi chiar peste 450 km pe oră, — vitese aproape egale cu vitesa unui glonte de revolver, — şi e multă probabilitate că aceste vitese vor fi cu mult întrecute.

Şi tot graţie contribuţiei calculului se vor putea rezolva şi problemele noui ce se pun în legătură cu aceste condiţiuni de sbor a avioanelor, în special chestiunea traiectoriei proiectilelor trase de pe un avion sburând la asemenea vitese.

Atât de mari sunt foloasele pe care ştiinţa şi arta inginerului le-a tras, în mare parte, dela contribuţia calculului matematic în lucrările ei. De aceea, cu drept cuvânt se cuvine omagiu din partea corpului nostru ingineresc tuturor acelor cari s'au ocupat şi se ocupă cu studiul ştiinţelor matematice la noi în ţară. Omagiu pios primilor pionieri ai studiilor matematice la noi; omagiu pios acelei vechi reviste matematice «Recreaţii Ştiinţifice» şi vrednicilor ei fondatori şi colaboratori; omagiu *Gazetei Matematice* şi acelor cari au întemeiat-o şi susţinut-o prin colaborarea lor până azi.

Urăm *Gazetei Matematice* viaţă lungă şi prosperitate continuă. Urăm colaboratorilor ei sănătate şi viaţă lungă, deocamdată ca să ajungă şi cei mai în vârstă dintre ei să-i serbeze cinquantenarul.

Fie ca opera tuturor să fie fecundă şi în viitor, spre binele şi progresul culturei în ţara noastră.

Cuvântarea D-lui Doctor Săvescu

Doamnelor şi Domnilor,

In mijlocul celor cari au condus şi lucrat zi de zi la susţinerea şi propăşirea acestei Gazete, să permiteţi unui fost colaborator, îndepărtat de ştiinţa Matematicelor, a vă spune câteva cuvinte.

Amintirile din timpul şcolarităţei ne fac o nespusă plăcere, ori cari ar fi ele, dar dacă aceste amintiri îmi reîmprospătează satisfacţiile vremurilor de muncă, pe care mi le-a dat scurtul timp, cât am colaborat la *Gazeta Matematică*, vă puteţi închipui cu ce emoţie am venit astăzi printre D-voastră.

Imi reamintesc de grupul dela Secţia Reală a Liceului Internat «Costache Negruzzi» din Iaşi, între anii 1900 — 1904, alcătuit din: DIMITRIE NĂSTURAŞ, mai târziu unul din cei mai meritoşi elevi ai Şcoalei de Poduri şi Sosele, apoi Inginer — mort astăzi —; ROMULUS ŢUPA, mai târziu Colonel şi element de valoare în armată — mort şi el — apoi, LUPAŞCU ... — astăzi, Inginer de Mine —; BUICLIU şi PETROVANU — astăzi Generali — cu cari împreună lucram la *Gazeta Matematică*.

Incă din cursul inferior de Liceu, începusem să colaborăm la o gazetă franceză, mi se pare, «De Matematique elementaire», ca în curând, în cursul superior, sub imboldul unui fost elev al liceului — răposatul TRAIAN LALESCU — să începem colaborarea la *Gazeta Matematică* din Bucureşti.

Cu multă plăcere îmi reamintesc de munca de fiecare zi, de preocupările de fiecare moment, care ne urmăreau până noaptea târziu, în dormitorul liniştit şi comun al liceului, de nerăbdarea cu care aşteptam sosirea Gazetei, pentru a vedea rezultatul muncei noastre; de entusiasmul de care eram cuprinşi; de bucuria şi satisfacţia, când, după o muncă de zile şi săptămâni, găseam soluţiile problemelor, şi în special, al acelora din seria, cari figurau luni şi chiar ani, sub rubrica «Probleme nerezolvate».

Această bucurie, îmbrăca toate gamele dela exuberanţa fără margini a lui NĂSTURAŞ până la exclamaţia stăpânită a lui LUPAŞCU.

Nu pot trece iarăşi cu vederea astăzi, pe Prof. GHEORGHIU, pe care l-am avut în clasa 5-a de liceu, şi mai cu seamă pe Prof. TEODOREANU VASILE dela Liceul Naţional Iaşi, un mare animator în slujba ştiinţelor matematice şi în special a acestei Gazete.

Indepărtat mai târziu dela această ştiinţă — printr'o voinţă a soartei — cine poate să-şi dea seama mai bine ca mine, de influenţa, — fără margini, pe care a avut-o asupra mentalităţei mele, această colaborare, aceste preocupări!

Judecata strânsă, raţionalizarea faptelor, deducţiile în modul de cercetare a acestora, căutarea soluţiilor din însuşi faptele care

se prezintă, într'un cuvânt acea metodă ştiinţifică în cercetarea faptelor şi fenomenelor care dă activităţei în orice profesiune, acea siguranţă în găsirea soluţiilor de care în special, noi Medicii şi în special Chirurgii, avem atâta nevoe în practica noastră.

Şi dacă aceasta este mărturisirea unui îndepărtat de ştiinţa D-voastră, veţi înţelege de ce astăzi mulţumindu-Vă pentru bucuriile şi satisfacţiile din trecut, mulţumindu-Vă pentru educaţia şi metoda ştiinţifică ce am câştigat prin ştiinţa D-voastră, ţin să Vă urez: Colaboratorilor de azi, toate succesele în deslegarea problemelor *Gazetei Matematice;* iar D-voastră — Comitetului de conducere — spor la muncă şi de aci înainte, gândindu-Vă mai ales că, dacă nu toţi colaboratorii să dedau mai târziu unei ramuri în strânsă legătură cu Matematicele, toţi însă mai târziu se resimt în educaţia lor de metodele acestei ştiinţe.

Şi ca un mic semn de recunoştinţă, Vă rog a primi suma de 5.000 lei, ca donaţiune din partea mea.

Cuvântarea D-lui profesor V. Alaci

D-le Membru delegat, D-lor rectori, D-nelor şi D-lor,

Gazeta Matematică din Bucureşti a împlinit la 15 Septemvrie a. c. patruzeci de ani de nobilă şi strălucită activitate în ogorul ştiinţei româneşti, ceeace constitue un moment important în desvoltarea culturii noastre.

Născută prin dragostea de ştiinţă, entusiasmul tineresc şi mintea luminată a cinci tineri ingineri, care abia terminaseră Şcoala Naţională de Poduri şi Sosele, *Gazeta Matematică* strânge în jurul său şi alte energii şi alte spirite de elită şi îşi îndreaptă an de an activitatea sa, în primul rând, spre tinerii elevi de liceu, pe care îi pregăteşte mai serios şi le insuflă gustul şi spiritul de cercetări originale în domeniul matematic.

Aceşti tineri elevi astfel pregătiţi care devin din ce în ce mai numeroşi, natural că reuşesc printre cei dintâi la examenele de intrare în şcolile superioare, sau se disting în universităţi.

Scânteia ştiinţei aprinsă în mintea şi inima lor de *Gazeta Matematică* îi face să activeze şi pe mai departe, cu puteri crescute, cu pasiune şi entusiasm, în ogorul ştiinţei pure sau aplicate şi această

activitate spirituală le procură totdeauna acea caldă mulţumire sufletească, acel farmec deosebit şi acea bucurie neţărmurită, interioară, pe care n'o poate simţi decât omul de ştiinţă.

In felul acesta, *Gazeta Matematică*, reuşeşte să formeze continuu, o nobilă elită intelectuală, răspândită pe tot cuprinsul ţării, formată din ofiţeri străluciţi, ingineri cu renume, oameni de ştiinţă ce au cucerit în specialitatea lor adevăruri noui şi definitive, care toţi au contribuit şi contribuesc să mărească bunul renume al Ţării noastre.

Iată în puţine cuvinte, traiectoria luminoasă, titlu de glorie nepieritor ce şi l'a câştigat *Gazeta Matematică;* de aceea, cu prilejul sărbătoririi de patruzeci de ani de activitate continuă, intensă şi cu rezultate atât de impresionante, Ţara întreagă se îndreaptă cu admiraţie şi recunoştinţă, către străluciţii întemeietori ai *Gazetei Matematice* inginerii: ION IONESCU care se găseşte în mijlocul nostru şi VICTOR BALABAN †, VASILE CRISTESCU †, MIHAIL ROCO †, ION ZOTTU †, ale căror suflete descătuşate de întruchiparea materială plutesc în sferele senine ale nefiinţei şi binecuvintează activitatea rodnică dela *Gazeta Matematică.*

«Revista Matematică» din Timişoara, mlădiţă mai tânără, care şi-a primit impulsul de viaţă, din acelaşi izvor comun de înalte preocupări, se înscrie printre cei dintâi să ia parte cu bucurie la sărbătorirea *Gazetei Matematice*, să-i exprime sentimentele sale de admiraţie şi veneraţie, dându-i şi pe mai departe, o activitate bogată, neîntreruptă şi veşnică.

Cuvântarea D-lui profesor N. Abramescu

Este de toţi cunoscut puterea care a avut *Gazeta Matematică* în desvoltarea noastră ştiinţifică. Intreţinând şi mărind în noi pe când eram tineri corespondenţi, entusiasmul pentru matematici, această Gazetă ne-a îndrumat şi ajutat să fim în situaţiile ce le avem acum. De aceea, noi vechii corespondenţi, şi mai ales eu care sunt şi membru al Gazetei de 28 de ani, al optulea din cei vii, ne simţim în aceste momente mulţumiţi şi uşuraţi, că am trăit să avem această ocazie solemnă, când putem aduce omagiile noastre de recunoştinţă *Gazetei Matematice,* fondatorilor ei.

Această sărbătorire nu este numai a *Gazetei Matematice*, ci şi a Şcoalei de Poduri şi Sosele, azi Şcoala Politehnică. Sunt mişcat, că am ocazia, de mult dorită, să arăt recunoştinţa mea către această Şcoală, nu numai că a făurit pe fondatorii *Gazetei Matematice*, dar că a şi încurajat, cum, de ex., mai ales pe mine, când eram încă tânăr, conferenţiar la Divizia Sa pregătitoare.

Puţini oameni sunt ca D-v., Domnilor ION IONESCU, A. G. IOACHIMESCU şi G. ŢIŢEICA, ce aveţi această imensă mulţumire, să vedeţi cum munca D-v., continuă şi desinteresată dela *Gazeta Matematică*, a dat roade aşa de însemnate în toate ramurile ştiinţifice din ţara noastră. Sunteţi mândri D-v., ştiind cum aţi început *Gazeta Matematică*, al cărei sediu a fost de fapt în modesta casă azi a D-lui Inginer I. IONESCU, din str. Căluşei 23. Acolo m'am dus eu, întâi, când am venit la Universitate, acum 34 de ani, să văd din ce loc izvorăşte acea putere magică cu care ne impresiona şi însufleţea *Gazeta Matematică*. De aceea sunteţi fericiţi D-v., că o vedeţi astăzi mărită această putere şi aşezată în clădirea ei proprie, şi aşa de impunătoare.

Cât ar fi fost de mulţumiţi, dacă ar fi avut norocul să trăiască şi să ia parte la această serbare şi valoroşii Ingineri V. CRISTESCU şi I. D. TEODORU, precum şi amicii mei scumpi, dispăruţi, TRAIAN LALESCU şi ŞTEFAN MIREA!

In str. Căluşei 23, cum o arată şi numele, acolo a fost şi este izvorul nesecat de putere al *Gazetei Matematice*, şi de aceea propun să se pună în viitor, acolo, o mică placă comemorativă, care să servească drept pildă generaţiilor viitoare, cum, prin muncă cinstită, continuă, desinteresată şi entusiasmată, s'a ajuns, dela acel mic început, la *Societatea Gazeta Matematică*, situată în aşa de frumoasă clădire şi cu aşa de mare renume şi putere.

Cuvântarea D-lui profesor Gh. Em. Filipescu

Suntem strânşi aci ca să omagiem 40 ani de muncă depusă pentru *Gazeta Matematică*.

Cinste se cuvine tuturor colaboratorilor, susţinătorilor, stâlpilor şi mai ales fondatorilor ei.

Aducem un pios omagiu celor dispăruţi şi respectoasă recunoştinţă celor în viaţă.

In special D-lui ION IONESCU, singurul în viaţă dintre acei cinci Ingineri cari au avut scânteia care a dat viaţa *Gazetei Matematice*.

D-sa prin tenacitatea ce-l caracterizează, prin munca neobosită, prin cinstea desăvârşită, prin cultura sa matematică şi prin inteligenţa sa sclipitoare a fost nu numai fondator şi colaborator, dar şi propulsorul care a împins an de an Gazeta dela o stare înfloritoare la alta mai fericită.

Probitatea lui pe orice tărâm i-a dat autoritatea morală ca să grupeze sincer şi intim în jurul Gazetei tot ce ţara românească avea mai select.

Tot această autoritate aplicată în mod energic a pus la adăpost *Gazeta Matematică* de influnţe separate care la un moment dat au ameninţat-o cu dispariţia.

Tot această autoritate morală a făcut ca toţi aceia cari nu erau de aceeaşi părere cu D-sa, să recunoască dreptatea celor susţinute de D-sa.

In fine D-sa împreună cu principalii săi colaboratori ŢIŢEICA, IOACHIMESCU şi răposatul CRISTESCU au răuşit să construiască în inima şi sufletul nostru acel măreţ monument pe care-l numim *Gazeta Matematică.*

Când zicem *Gazeta Matematică* nu înţelegem numai revista, nu înţelegem numai Biblioteca sa, nu înţelegem numai casa sa, nu înţelegem numai concursurile şi premiile ei, ci înţelegem o şcoală, o biserică unde credincioşii întru matematici au găsit lumina cea adevărată care le-a luminat calea tot timpul vieţii lor.

După cum Romanii spuneau cu mândrie «Cives romanus sum» tot cu aceeaşi mândrie spunem şi noi astăzi: şi eu am fos corespondent al Gazetei.

Acest monument, *Gazeta Matematică,* nouă Românilor trebue să ne stea mereu în minte, pentru că el ne arată la ce rezultate admirabile am ajunge dacă în mod *sincer* ne-am călăuzi de deviza ei şi anume: entusiasm, armonie, sacrificii continui, muncă desinteresată.

Cuvântarea D-lui Gh. Th. Gheorghiu

Doamnelor şi Domnilor,

Din partea celor mai tineri membri ai *Gazetei Matematice* aduc modestele noastre omagii acelei opere naţionale care de 40 de ani în şir a contribuit fără întrerupere la ridicarea Matematicii româneşti.

Cu câtă emoţie pronunţ aceste două cuvinte: *Gazeta Matematică!* Pentru noi *Gazeta Matematică* este şcoala care ne-a format şi ştiinţificeşte şi sufleteşte. Este şcoala unde pe lângă ştiinţă am învăţat că pentru izbândă trebue şi multă, foarte multă inimă!

Intr'unul din calendarele anilor trecuţi, care din întâmplare mi-a recăzut în mână, am găsit scris în dreptul lui 15 ale fiecărei luni iniţialele «G. M.». 15 era ziua sosirei Gazetei, pentru noi era cea mai însemnată zi a lunei. Şi niciodată sosirea ei n'a dat greş! Apariţia Gazetei atât de regulată era încă ceva ce ne impresiona adânc! Mai târziu ca student nerăbdarea aşteptării Gazetei era atât de mare încât încă din ziua de 14 porneam spre Fabrica de Chibrituri ca s'o am în mână cu un ceas mai de vreme!

Ce pasiune punem noi în rezolvarea şi redactarea problemelor şi ce mândrie să ne vedem publicaţi pe copertă.

O amintire de neuitat o formează de asemeni concursurile. Cu câtă râvnă ne pregăteam noi pentru aceste concursuri! Ne sacrificam toate orele de repaus închizându-ne în casă ca să muncim nu atât pentru diploma pe care o primeam şi cu care şi astăzi ne mândrim, cât pentru ambiţia de a ne prezenta demni în faţa stâlpilor Gazetei care făceau atâtea şi atâtea sacrificii pentru noi. Mi-aduc aminte şi acum de ziua de 19 Aprilie 1928 când la orele $8^1/_2$ în Amfiteatrul Negreanu dela Facultatea de Ştiinţe, şi-au făcut apariţia toţi acei pe care noi corespondenţii nu-i cunoşteam decât din nume dar cu cari în închipuirile noastre începusem să ne familiarizăm. Apoi după aceea masa comună tradiţională dela sfârşitul lucrărilor concursului unde am găsit atâta căldură sufletească, am primit atâtea sfaturi şi unde prin Domnul Profesor ŢIŢEICA vorbeam cu APOLLONIUS şi ARHIMEDE! Societatea *Gazeta Matematică,* Doamnelor şi Domnilor uneşte pe toţi acei din jurul ei printr'o mare dragoste reciprocă. Incepând cu cei mai vechi redactori ai ei: D-nii Profesori ION IONESCU, A. G. IOACHIMESCU, GEORGE ŢIŢEICA până la cel mai îndepărtat corespondent formăm cu toţii o singură familie: ne cunoaştem, ne iubim şi cei mari ajută pe cei mici!

Dar dacă Doamnelor şi Domnilor *Gazeta Matematică* a fost pentru noi în trecut făclia diriguitoare a muncii noastre, în prezent *Gazeta Matematică* ne pune la dispoziţie calea cea mai rapidă pentru a publica tot ce producem, atât cât putem şi noi, în do-

meniul Matematicilor elementare şi câte odată în acel al Matematicilor superioare. Din acest punct de vedere *Gazeta Matematică* a încurajat şi încurajează toate talentele tinere care se îndreaptă spre această ştiinţă. Ea stă întotdeauna cu braţele deschise tuturor lucrărilor originale.

In viitor, *Gazeta Matematică* va fi pentru noi un ideal. Idealul de a-i păstra faima neştirbită aşa cum am moştenit-o.

Noi, membrii tineri ne legăm astăzi, în această zi de sărbătoare a Matematicii româneşti, luând drept chezăşie cei 10 ani de activitate neîntreruptă, ani cari formează mândria tinereţii noastre, să urmărim acest ideal. Chiar dacă nu ne vom putea ridica până la înălţimea sacrificiilor pe care le-au făcut înaintaşii noştri, totuşi în limita posibilităţilor noastre vom căuta să păstrăm cu toată sfinţenia, ca pe cel mai preţios lucru, ceeace ni s'a încredinţat.

Nu pot termina aceste cuvinte fără a aduce omagiile noastre de profundă recunoştinţă tuturor acelora cari au muncit sau au contribuit la susţinerea *Gazetei Matematice*: dela cel din urmă membru care prin cotizaţiile date a contribuit la neîntrerupta apariţie a revistei, până la cel dintâi susţinător al ei care este neobositul Profesor ION IONESCU.

Domnia-Sa timp de 40 de ani a susţinut neîntrerupt cu cel mai puternic entusiasm şi cu cea mai mare desinteresare *Gazeta Matematică*. Zi de zi, şedinţă de şedinţă, nelipsind niciodată, răsfăţându-ne cu preţioasele-i sfaturi şi muncind întotdeauna mai mult decât noi toţi, D-l Profesor IONESCU şi-a închinat timp de 40 de ani toate orele de linişte şi de repaus.

Acest stâlp neclintit şi-a identificat până într'atât viaţa lui cu a *Gazetei Matematice* încât cu siguranţă că dacă vreodată un meşter ar încerca să prindă în piatră emblema *Gazetei Matematice* niciodată nu va izbuti mai bine decât atunci când va săpa figura lui ION IONESCU.

Cuvântarea elevului Vintilă Grigorescu dela Liceul Militar Mânăstirea Dealu

Onorată asistenţă,

Cu seninătate şi mândrie, se sărbătoreşte astăzi împlinirea a 40 de ani dela publicarea primului număr al *Gazetei Matematice*.

Pentru noi elevii liceelor militare este ocaziunea fericită de a ne exprima sentimentele noastre de mulţumire şi recunoştinţă faţă de întemeietorii şi membrii acestei distinse instituţii.

Indrumările pe care ni le-au dat şi ni le dau, direct sau indirect, au o importanţă excepţională în formarea noastră: ca oameni, ofiţeri şi apărători ai patriei.

In viaţa noastră de până acum, în mijlocul activităţii şcolare şi a preocupărilor inerente vârstei, prezenţa Gazetei aduce o schimbare în mentalitatea noastră.

Avem pe această cale, prilejul să trecem de zidurile şcolii să luăm contact cu o realitate mai largă — cu realitatea culturii superioare.

Seriozitatea cu care ni se prezentau lucrurile, ne-a orientat atenţia şi energia către alte drumuri necunoscute încă de noi. Ni s'a dat astfel putinţa să ne afirmăm personalitatea într'un cadru mult mai cuprinzător, decât acel al şcolii, şi în afara ei, fără să pierdem prin aceasta legătura cu ea.

Un alt rol pe care l-a avut *Gazeta Matematică* în educarea noastră, este legat de însăşi noţiunea «Matematică». In timpul adolescenţei, când ni se formează intelectul şi deprinderile de mai târziu, «Matematica» ne-a călăuzit şi ne călăuzeşte pe drumul cel mai scurt şi cel mai sigur, care este linia dreaptă.

Sub influenţa legilor ei stricte, spiritul de ordine şi disciplină se *întăreşte* în noi, iar ideea de dreptate şi adevăr devin norme absolute. Şi astfel sufletul nostru se întregeşte.

Pentru noi, faptul că o revistă cu caracter ştiinţific a apărut atât de regulat şi atâta timp, capătă o importanţă şi o semnificaţie deosebită.

Trecând peste covârşitoarea ei însemnătate culturală, rămânem în admiraţie în faţa mijloacelor de întreţinere, mai mult decât modeste, pe care le-a avut *Gazeta Matematică,* la îndemână.

Truda şi desinteresarea arătată de membrii fondatori, în realizarea înaltului scop, sunt pentru noi, un îndemn şi un simbol: îndemnul stăruitor la muncă şi simbolul neîntinat al abnegaţiei.

Astfel, *Gazeta Matematică* are şi o adâncă semnificaţie educativ morală.

Dar ea nu joacă numai un rol în formarea noastră ca oameni, ci şi în cariera pe care ne-am ales-o.

Astăzi când războiul nu mai este o încăierare de o zi, când importanța capitalului biologic este depășită de perfecțiunea tehnică, rostul pe care îl are prevederea științifică, și prin urmare calculul, evidențiază plastic necesitatea și utilitatea «Matematicii».

Dar chiar structura culturii și a civilizației moderne-axată nu numai pe afirmarea valorilor spirituale, ci și pe potențarea cantitativului, adică pe valorificarea aspectului tehnic — ne obligă la cultivarea spiritului strict științific —, realizat pe deplin în «Matematici».

Prin urmare desvoltarea timpurie a gustului și cristalizarea aptitudinilor noastre, în sensul acestei științe este teoretic și practic de o mare însemnătate; căci cu cât ne vom familiariza cu «Matematica» mai de vreme, cu atât vom ajunge să o cunoaștem mai bine și să căpătam o mai mare cunoștință în mânuirea ei.

Deci nu este o simplă întâmplare faptul că elevii liceelor militare — convinși fiind de importanța Matematicii pentru cariera în care se vor desăvârși — au fost și au rămas colaboratori credincioși ai *Gazetei Matematice.*

Continuitatea în timp, a participării lor la concursurile instituite de această Gazetă, a izvorît din adâncă înțelegere și din convingere totală.

Tocmai dependența dintre arta militară și Matematici, ne-a determinat la o apropiere și colaborare mai strânsă la Gazetă.

Noi elevii liceelor militare aducem prinosul nostru de recunoștință, domnilor membri fondatori și actuali ai acestei reviste, și acum când *Gazeta Matematică* a împlinit 40 de ani de existență, îi urăm tinerețe fără bătrânețe și viață fără de moarte.

Cuvântarea D-lui profesor A. G. Ioachimescu

Ca celui mai în vârstă dintre membrii fondatori ai *Gazetei Matematice,* mi s'a dat însărcinarea să spun ultimul cuvânt la această frumoasă ședință festivă, ținută în localul Școalei care a urmat-o inițiatorii revistei *Gazeta Matematică* și o bună parte din redactorii ei actuali. Timpul fiind înaintat îmi veți permite să fiu foarte scurt.

Scopul inițiatorilor revistei *Gazeta Matematică* nu a fost de a crea o publicație pentru a forma matematicieni, dar de a înlesni cunoașterea temeinică a acestei discipline, celor care au dragoste

de această ştiinţă; iar pentru viitorii ingineri, a-i obişnui din timp cu ordinea, judecata dreaptă şi logică, precum şi cu manipularea cu siguranţă a acestui instrument puternic şi indispensabil tehnicianului civil şi militar. Aceasta este ceeace am desvoltat în cei 40 de ani de existenţă ai *Gazetei Matematice*. Asupra modului cum am reuşit, corespondenţii noştrii sunt cei mai în măsură să ne judece, mai ales corespondenţii care au ajuns la maturitate şi au avut ocazie să aplice cunoştinţele lor generale la probleme de ordin practic. Credem că chiar cei care au îmbrăţişat alte profesiuni, unde matematica nu are un rol aşa important, nu regretă străduinţa şi timpul întrebuinţat altă dată la rezolvarea diferitelor chestiuni din *Gazeta Matematică*.

Noi din generaţia mea, am făcut ce am putut; unii mai mult — ca colegii IONESCU, ŢIŢEICA şi regretatul CRISTESCU, — alţii mai puţin. Suntem cu toţii însă mulţumiţi în sufletele noastre, când vedem în jurul nostru, urmându-se aproape cu continuitate, o pleiadă de oameni cu dor de muncă cinstită şi desinteresată, spre a contribui mai departe la formarea tinerelor generaţii, îndrumându-i pe calea dreaptă. Cu asemenea urmaşi, noi cei care ne găsim la sfârşitul carierei şi al popasului în această lume, putem să plecăm liniştiţi, fiind convinşi că sămânţa aruncată nu a căzut pe pământ sterp, ci a încolţit bine şi va produce roade abundente.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE DROZ-FARNY

1. Le théorème de DROZ-FARNY s'énonce comme suit :

Deux droites perpendiculaires menées par l'orthocentre d'un triangle déterminent sur les côtés trois segments dont les milieux sont en ligne droite[1]).

On peut le déduire d'une proposition plus générale, qui découle d'une propriété de la parabole.

1) Voir, par exemple, *Gazeta Matematica*, XXXV, p. 202, une note dans laquelle nous avons donné une bibliographie à ce sujet; voir aussi un article de M. THÉBAULT, *Gazeta Matematica*, XXXV, p. 441.

L'on sait que le lieu des projections M du foyer F d'une parabole sur les tangentes t à celle-ci est la tangente au sommet de la courbe.

Or les droites FM et t ont des directions conjuguées harmoniques par rapport aux directions isotropes du plan. Dès lors, par projection, on déduit de ce qui précède la proposition suivante : deux tangentes fixes d'une parabole déterminent sur une tangente variable un segment dont le milieu décrit une tangente à la parabole.

Cet énoncé peut aussi prendre la forme suivante :

Deux tangentes à une parabole déterminent sur les côtés d'un triangle circonscrit trois segments dont les milieux sont collinéaires.

2. Soit maintenant P un point quelconque du plan d'un triangle ABC d'orthocentre H. Si Q est le point du cercle ABC dont la droite de SIMSON est parallele à HP, la parabole inscrite au triangle ayant Q pour foyer a HP pour directrice el les tangentes menées à celle-ci par le point Q sont les bissectrices de l'angle HPQ.

On obtient ainsi cette généralisation du théorème de DROZ-FARNY :

Si P *est un point quelconque du plan d'un triangle d'orthocentre* H *et* Q *le point du cercle circonscrit dont la droite de* SIMSON *est parallèle à* HP, *les bissectrices de l'angle* HPQ *déterminent sur les côtés trois segments dont les milieux sont collinéaires.*

Lorsque P coïncide avec H, on retrouve le théorème de DROZ-FARNY.

R. GOORMAGHTIGH
Bruges (Belgique).

ASUPRA UNOR CONFIGURAȚII DE PUNCTE COLINEARE

1°. A_1, A_2, A_3, A_4 fiind patru puncte colineare, vom nota raportul lor anarmonic

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{A_2A_3}} : \frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_2A_4}} = (A_1A_2A_3A_4) = -\lambda.$$

Dacă a_1, a_2, a_3, a_4 sunt abscisele celor 4 puncte, față cu un punct al dreptei,

$$\frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)} = -\lambda.$$

De unde,

$$(1+\lambda)(a_1a_2 + a_3a_4) = (a_1a_4 + a_2a_3) + \lambda(a_1a_3 + a_2a_4). \quad (1)$$

Dacă origina coordonatelor este A_1, relația (1) se transformă în:

$$(1+\lambda)a_3a_4 = a_2a_3 + \lambda a_2a_4$$

sau:

$$\frac{1+\lambda}{a_2} = \frac{1}{a_4} + \frac{\lambda}{a_3}$$

$$\boxed{\frac{1+\lambda}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_4} + \frac{\lambda}{A_1A_3}}. \quad (2)$$

2^0. A_i $(i = 1, 2 \ldots 5)$ *fiind 5 puncte colineare, dacă*

$$(A_1A_2A_3A_4) = -\lambda \quad , \quad (A_1A_2A_3A_5) = -\mu,$$

există relația

$$\boxed{\frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_1A_5}} = (\lambda - \mu)\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_4A_5}}}. \quad (3)$$

In adevăr, $(A_1A_2A_3A_5) = -\mu$ conduce la

$$\frac{1+\mu}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_5} + \frac{\mu}{A_1A_3}$$

care scăzută din (2) dă relația (3).

3^0. A_i $(i = 1, 2 \ldots 6)$ *fiind 6 puncte colineare, dacă*

$$(A_1A_2A_3A_4) = -\lambda \ , \ (A_1A_2A_3A_5) = -\mu \ , \ (A_1A_2A_3A_6) = -\nu,$$

există relația

$$\boxed{(A_1A_4A_5A_6) = \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu}}. \quad (4)$$

Aplicând relaţia (3) primului şi ultimului raport anarmonic al enunţului, se obţine

$$\frac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}}{\overline{A_1A_4}\cdot\overline{A_1A_6}} = (\lambda - \nu)\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_4A_6}}\ .$$

Impărţind această egalitate cu (3),

$$\frac{\overline{A_1A_5}}{\overline{A_1A_6}} = \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu}\cdot\frac{\overline{A_4A_5}}{\overline{A_4A_6}},$$

de unde,

$$(A_1A_4A_5A_6) = \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu}\ .$$

4°. A, B, C, D_1, D_2, D_3 *fiind 6 puncte colineare, dacă*

$$(ABCD_1) = d_1\ ,\ (ABCD_2) = d_2\ ,\ (ABCD_3) = d_3\ ,$$

există relaţia

$$\boxed{\frac{d_2 - d_3}{\overline{AD_1}} + \frac{d_3 - d_1}{\overline{AD_2}} + \frac{d_1 - d_2}{\overline{AD_3}}}\ . \qquad (5)$$

Se dovedeşte aplicând relaţia (2) celor 3 rapoarte anarmonice.

$$\frac{1 - d_1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AD_1}} - \frac{d_1}{\overline{AC}}$$

$$\frac{1 - d_2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AD_2}} - \frac{d_2}{\overline{AC}}$$

$$\frac{1 - d_3}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AD_3}} - \frac{d_3}{\overline{AC}}\ .$$

Multiplicând respectiv cu $d_2 - d_3$, $d_3 - d_1$, $d_1 - d_2$ şi adunând, se află relaţia enunţului.

C. IONESCU-BUJOR.

ASUPRA ECUAȚIUNILOR CU RĂDĂCINILE IN PROGRESIE ARITMETICĂ

1. O ecuațiune de forma:

$$F(x) = (x-a)\prod_{p=1}^{n}[(x-a)^2 - p^2r^2] = (x-a)f(x) = 0$$

are rădăcinile:

$$a\ ,\ a \pm pr \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots\ n)$$

în progresiune aritmetică și este de gradul $2n+1$.

Derivata sa de ordinul $2p$ este:

$$F^{(2p)}(x) = 2pf^{(2p-1)}(x) + (x-a)f^{(2p)}(x)$$

în care dacă facem $x = a$, obținem:

$$F^{(2p)}(a) = 2pf^{(2p-1)}(a) = 0$$

căci se observă că:

$$f'(a) = 0\ ,\ f'''(a) = 0\ ,\ f^{v}(a) = 0, \ldots$$

Rezultatul de mai sus se interpretează astfel:

Derivatele de ordin par ale unei ecuațiuni cu rădăcinile în progresie aritmetică de grad impar admit ca rădăcină pe numărul din mijlocul progresiunii aritmetice.

2. Să scriem desvoltat ecuațiunile $F(x) = 0$ și $f(x) = 0$:

$$F(x) = x^{2n+1} - A_1x^{2n} + A_2x^{2n-1} - \ldots \pm A_{2n} = 0$$

$$f(x) = (x-a)^{2n} - A'_1r^2(x-a)^{2n-2} + A'_2(x-a)r^4x^{2n-4} - \ldots \pm A'_nr^{2n} = 0.$$

Pentru a cunoaște toate rădăcinile lui $F(x) = 0$ este suficient ca să cunoaștem rația progresiunii, căci cunoaștem numărul termenilor și numărul din mijloc dat de: $a = A_1/2n + 1$. Derivata de ordinul $2n-1$ a lui $F(x) = 0$, în care facem $x = a$, se scrie:

$$F^{(2n-1)}(a) = (2n-1)f^{(2n-2)}(a).$$

Calculăm cu ajutorul ecuațiunilor desvoltate pe $F^{(2n-1)}(a)$ și $f^{(2n-2)}(a)$ și le introducem în egalitatea de mai sus. Ținând seamă

că prin formarea ecuației $f(x) = 0$ găsim $A' = \Sigma n^2$, egalitatea devine:

$$r^2 = 12 \frac{2nA_1^2 - 2(2n+1)A_2}{(2n+1)^2[(2n+1)^2 - 1]}$$

în care dacă facem: $2n + 1 = m$, am regăsit pe o cale cu totul diferită și mai simplu, expresiunea rației în funcție de primii doi coeficienți și gradul ecuațiunii.

3. Să considerăm ecuațiunea de grad par. Rădăcinile vor fi:

$$a \pm (2n+1)r \qquad (n = 0, 1, \ldots n).$$

Fie $\varphi(x) = 0$ această ecuațiune. Observăm că ea păstrează forma ecuațiunii $f(x) = 0$. Deci și $\varphi(x) = 0$ va avea:

$$\varphi'(a) = 0 \ , \ \varphi'''(a) = 0 \ , \ \varphi^v(a) = 0, \ldots$$

adică:

Derivatele de ordin impar ale unei ecuațiuni cu rădăcinile în progresiune aritmetică de grad par admit ca rădăcină semisuma rădăcinilor extreme ale ecuațiunii considerate:

4. Să rezolvăm ecuațiunea:

$$\varphi^{(2n-3)}(x) = 0.$$

Găsind rădăcinile:

$$x_1 = a \ , \quad x_{2,3} = a \pm r\sqrt{2n+1}$$

putem enunța:

Derivata de ordinul $2n - 3$ a unei ecuațiuni de grad par cu rădăcinile în progresie aritmetică are rădăcinile tot în progresie aritmetică,

5. Să rezolvăm și ecuațiunea:

$$F^{(2n-2)}(x) = 0$$

Găsind rădăcinile:

$$x_1 = a \qquad x_{2,3} = a \pm r\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

putem și aci enunța:

Derivata de ordinul $2n - 2$ a unei ecuațiuni de grad impar cu rădăcinile în progresie aritmetică are rădăcinile tot în progresie aritmetică.

Exemplu: Derivata a doua a ecuațiunii de gradul V cu rădăcinile în progresie aritmetică are rădăcinile în progresie aritmetică.

LOCOT. C-DOR GH. NICULESCU.

NOTE MATEMATICE

28. *Asupra punctului minimului sumei pătratelor distanţelor la două planuri date.*

1°. Fie $n > 3$ planuri (P_1), (P_2), .. (P_n) care nu trec prin un punct şi L punctul din spaţiu pentru care suma pătratelor distanţelor la cele n planuri este minimă.

J. NEUBERG a demonstrat că punctul L este centrul mediilor distanţelor proiecţiilor sale L_1, L_2, ... L_n pe planurile (P_1), (P_2), ... P_n)[1]).

Se ştie în plus că *suma pătratelor distanţelor a* **n** *puncte oarecare din spaţiu, sau din plan, la centrul distanţelor medii este egală cu a n-a parte din suma pătratelor distanţelor acestor puncte luate două câte două în toate felurile posibile* [2]).

2°. Dacă se consideră un poliedru ale cărui vârfuri sunt proecţiile unui punct P pe planurile (P_1), (P_2), ..., (P_n), suma pătratelor distanţelor celor **n** vârfuri ale poliedrului luate două câte două în toate felurile posibile, nu este inferioară la de n ori suma pătratelor distanţelor medii ale acestor vârfuri la planurile (P_1), (P_2), ... (P_n). De aici, în virtutea teoremei lui J. NEUBERG, *poliedrul podar al punctului* L, *faţă de planurile* (P_1), (P_2), ..., (P_n) *este acela pentru care suma pătratelor distanţelor vârfurilor sale luate două câte două în toate felurile posibile este minimă.*

Această proprietate, completând pe a lui J. NEUBERG, constitue o analogie mai mult între punctul pentru care suma pătratelor distanţelor la **n** planuri este minimă şi punctul lui LEMOINE al triunghiului, al patrulaterului şi al **n** — laturi [3]).

3°. Când **n** = 4, se găseşte următoarea chestiune a lui NEUBERG, pe care am rezolvat-o în *Mathesis,* 1934 — 41 :

Intr'un tetraedru dat ABCD, *să se înscrie un tetraedru* A'B'C'D' *care să aibă suma pătratelor muchilor minimă.*

V. THÉBAULT

(Le Mans, Franţa).

---

1) **Bulletin de l'Académie royale de Belgique**, 1874. *(Mémoire sur le tetraèdre).*

2) **Journal de Vuibert,** XLII — 101.

3) Pentru ultimele 2 polinoame a se vedea L. RIPERT, *(Association française pour l'avancement des sciences),* 1901 — 112.

29. *Asupra unei serii.* In «Cours d'Algèbre» par B. NIEWENGLOWSKI, t. II, pag. 549 se consideră seria

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots + (-2)^n - \ldots$$

şi se arată că suma ei este $\frac{1}{3}$, scriind-o sub forma

$$S = 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + \ldots) = -1 - 2S.$$

Procedeul acesta este însă nepermis şi rezultatul este complet eronat, căci seria dată este divergentă.

In adevăr, suma primilor n termeni este

$$S_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}$$

şi se vede că tinde către infinit odată cu n.

M. G.

30. *Asupra problemei 4266.*

Fie ecuaţia generală:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cu rădăcini reale unde a este pozitiv. Ne propunem să găsim condiţia ca una din rădăcini să fie cuprisă între *zero* şi *unu*.

Admitem deci că:

$$1 \geqslant \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \geqslant 0$$

sau:

$$2a + b \geqslant \sqrt{b^2 - 4ac} \geqslant 0.$$

Dacă $b \geqslant 0$ atunci vedem că trebue să avem $c \leqslant 0$ şi

$$a + b + c \geqslant 0.$$

Dacă $b < 0$, atunci c poate fi oricare şi:

$$a + b + c \geqslant 0.$$

Pentru cazul problemei 4266 avem:

$$a = 3$$

$$b = 3\lambda - 2(a+1)$$

$$c = -(a+1)\lambda + a + \lambda^2 = (\lambda - 1)(\lambda - a)$$

unde:

$-1 \leqslant a \leqslant 1$ (în G. M. la pag. 161 această condiție este greșit scrisă).

și

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Observăm apoi că:

$$a + b + c = (\lambda + 1)(\lambda - a + 1)$$

deci:

$$0 \leqslant a + b + c \leqslant 6.$$

Dacă $b \geqslant 0$ atunci cum $c \leqslant 0$, urmează că avem:

$$3\lambda \geqslant 2(a+1) \quad \text{și} \quad (\lambda - 1)(\lambda - a) \leqslant 0$$

de unde deducem condițiunile:

$$\tfrac{2}{3}(a+1) \leqslant \lambda \leqslant 1 \text{ și } -1 \leqslant a \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Dacă $b < 0$, c putând fi oricare, urmează că avem:

$$3\lambda < 2(a+1).$$

MAIOR I. LINTEȘ.

BIBLIOGRAFIE

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Tomul CXX. Fascicola V. Noembre 1935. Buenos Aires.

Boletin Matematico. Anul VIII. No. 10. Decembre 1935. Buenos Aires. Eliminarea utilizată la progresiile aritmetice, geometrice și la șirurile mai generale de B. I. BAIDAFF. Asupra unor integrale hipereliptice complet expresionabile prin mijlocul transcendentelor elementare, de G. G. CONSTANTINESCU.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLI. No. 11. Noembre 1935.

Idem. Vol. XLI. No. 12. Decembre 1935. Asupra rădăcinilor complexe a ecuațiilor algebrice, de A. J. KEMPNER. Teoremă asupra congruențelor înalte, de LEONARD CARLITZ. Postulatele spațiului lui HILBERT ; — O reducere cu aproximație, de A. E. TAYLOR. Notă asupra claselor lui LIPSCHITZ, de E. S. QUADE. O nouă probă de echivalență a lui E. H. MOORE, de I. P. BALLANTINE. Asupra distribuției lui Bernouilli, de SOLOMON KULLBACK. Asupra unui rezultat conexat cu ultima teoremă a lui Fermat, de EMMA LEHMER. Corespondențe conexate, de A. R. WILLIAMS. Diverse teoreme de multiplicare de FLORENCE M. MEARS. Asupra locului unei ecuații analitice în planul real, de A. B. BROWN. O ecuație diferențială parțială conexată cu funcțiunile cilindrului parabolic, de HARRY BATEMAN. O generalizare a polinomului lui Bernouilli de ordinul I, de B. F. KIMBALL. Metoda distribuției momentului pentru analiza structurilor continui, de LOUIS BRAND. Asupra unor congruențe înalte, de LEONARD CARLITZ. O ecuație diferențială pentru polinomul Appel, de I. M. SHEFFER. Asupra câtorva proprietăți extreme ale polinomului trigonometric cu rădăcini reale, de J. GERONIMUS. Conexări lineare ale spațiului normal la o variație în spațiul euclidian, de C. B. TOMPKINS.

Buletinul Institutului Român pentru Betoane și Drumuri Moderne. Anul I. No. 1. Ianuarie 1936. București.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciții. Anul II. No. 6. 1 Martie 1936.

Journal de Mathématiques Elémentaires. publié par H. VUIBERT Anul 60. No. 10. 15 Februarie 1936. Paris.

Pitagora. Anul I. No. 4. Februarie 1936. Craiova. Noțiuni de geometrie modernă ; Involuție, de E. CRĂCIUNESCU. Asupra poziției corpului solid liber în spațiul cu n dimensiuni, de G. G. CONSTANTINESCU.

Revista Matematică din Timișoara. Anul XV. No. 12. 15 Februarie 1936. Sur quelques règles de divisibilité, de A. GLODEN. O particularitate a triunghiurilor dreptunghice, de G-L GH. BUICLIU.

Revista Științifică „V. Adamachi". Vol. XXI. No. 4. Octombre-Decembre 1935.

The Mathematical Gazette. Vol. XX. No. 237. Februarie 1936. Câteva aplicații geometrice ale vectorilor, de H. LOB. O metodă generală a desenării înclinate a diagramei momentului, de T. W. HALL.

CERERI

255. S'au tipărit cărți didactice de matematici în dialectul româno-macedonean ?

I. I.

DIVERSE

Societatea Română de Matematice a ținut, în cursul lunii Februarie, următoarele ședințe :

1°. *La 3 Februarie* au comunicat D-nii : Prof. D. BARBILIAN, despre *« Ordonarea Geometriei Descriptive în programul dela Erlangen »* și Prof. N. CIORĂNESCU despre *« Monogeneitatea areolară »*.

2°. *La 15 Februarie*, în ședința de comunicări libere cu caracter elementar, au comunicat D-nii : Prof. D. POMPEIU — *« Asupra formulelor de adițiune din Trigonometrie »*, Prof. N. MIHĂILEANU despre *« O grupare de cercuri în geometria triunghiului »* și H. IONESCU *« Asupra desfășuratelor unei curbe plane »*.

3°. *La 17 Februarie* au comunicat D-nii : Ing. CR. MATEESCU despre *« O problemă de încovoierea plăcilor »* și AL. PANTAZI— *«Asupra unor rețele în spațiul cu 3 dimensiuni»*.

Sporirea Bibliotecii.

C. ALASIA. Alcune proposizioni di geometria. 1912.
Donată de I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Un sistema di circonferenze associato ad un punto notevoel del triangolo. Palermo 1909.
Donată de I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

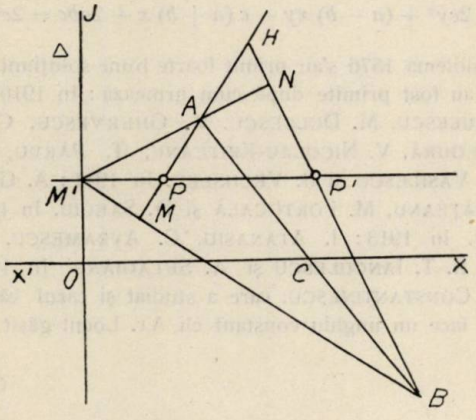
PROBLEMA 1576. M *fiind un punct mobil pe un cerc* O *și* AB *un diametru al său, se înseamnă cu* M' *punctul în care* BM *taie o dreaptă fixă* Ax. *Se cere locul punctului unde* AM *întâlnește perpendiculara ridicată în* M' *pe* Ax.

M. RADU.

Să considerăm cazul mai general când Ax este înlocuită prin o dreaptă Δ care nu trece prin A:

Se dau în plan o dreaptă Δ *şi două puncte fixe* A, B. *Fie* M′ *un punct mobil pe* Δ. *Se cere locul geometric al punctului* P *de intersecţie al perpendicularei în* M′ *pe* Δ *cu perpendiculara* AM *pe* BM′.

Fie C mijlocul lui AB. Iau pe Δ ca axă de y şi perpendiculara CO ca axă de x şi fie M′ $(0, \lambda)$, A (a, c), B $(b, -c)$.



Avem:

$$(BM') \quad y - \lambda = -\frac{c + \lambda}{b} x$$

$$(AM) \quad y - c = \frac{b}{c + \lambda}(x - a)$$

$$(M'P) \quad y = \lambda.$$

Locul lui P se află eliminând pe λ între (AM) şi (M′P). Se obţine, prin această eliminare, parabola:

$$y^2 = b\,x + c^2 - ab$$

care trece prin A şi simetricul lui A faţă de CO.

In cazul particular al datelor problemei $a = 0$ deci ecuaţia parabolei este:

$$y^2 = bx + c^2.$$

Notă. 1°. Când Δ trece prin A ca în cazul particular al enunțului problemei, parabola loc al lui P este tangentă cercului de diametru AB în A și simetricul lui A față de axa Ox.

2°. Problema 1576 dă un mijloc de a construi parabola prin puncte când se cunoaște o coardă AB cu mijlocul pe axa parabolei și direcția acelei axe.

3°. Pe aceeași cale se găsește că intersecția lui M'P cu perpendiculara BN pe AM' este parabola

$$y^2 = ax + c^2 - ab$$

iar intersecția dreptelor AM, BN, adică ortocentrul triunghiului AM'B descrie hiperbola:

$$2cy^2 + (a - b)\,xy - c\,(a + b)\,x + 2abc = 2c^3.$$

4°. La problema 1576 s'au primit foarte bune soluțiuni, pe care le clasăm pe anii în cari au fost primite după cum urmează: In 1910: ELENA GEORGESCU, G. DĂNULESCU, M. DULCESCU, V. GHERVESCU, C. MICHĂESCU, I. MITITELU, S. NEGURĂ, V. NICOLAU-KRITEANU, T. PÂRVU, I. PLĂCINȚEANU, V. SĂVESCU, I. VASILESCU și B. VECHSLER. In 1911: A. GHIMUȘ, M. NICULESCU, I. FUNDĂȚEANU, M. PORTOCALĂ și D. SAEGIU. In 1912: I. BĂLESCU și P. SERGESCU. In 1913: I. ATANASIU, C. AVRAMESCU, N. CHIRIAC, A. GHEOCALESCU, R. T. IANCULESCU și A. SELAGIANU. In 1914: A. STOICA. In 1935: G. G. CONSTANTINESCU, care a studiat și cazul când M descrie o conică, iar PM' face un unghiu constant cu Ax. Locul găsit în acest caz este o conică.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4341. *Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 luate câte o singură dată, să se formeze trei numere având una, patru și patru cifre, sau două, trei și patru cifre, astfel ca al treilea număr să fie egal cu produsul celorlalte două.*

V. THÉBAULT.

Suma cifrelor date fiind 36, suma numerelor căutate se va divide prin 3. Dacă A, B, C sunt acele numere, vom avea

$$A + B + C = 3m \quad \text{și} \quad A = B \times C \tag{1}$$

$$\therefore\ B\,(C + 1) + C = 3m. \tag{2}$$

Dând lui B în (2) formele pe care le poate avea față de divizorul 3 se găsește cu ușurință că:

1°. B şi deci şi C, din cauza simetriei, nu pot fi de forma $3m - 1$.

2°. Dacă B se divide prin 3, A se divide prin 9 şi C se divide prin 3.

Din a doua din relaţiile (1) se observă că B şi C nu se pot termina nici cu 0 nici cu 1, iar dacă unul din aceste numere se termină cu 5, celălalt trebue să fie nepereche.

In fine nici unul din numerele A, B, C nu trebue să înceapă cu 0, căci atunci avem soluţiuni *de formă,* ca

$$6 \times 0453 = 06 \times 453 = 2718$$

sau

$$6 \times 453 = 02718$$

care sunt de fapt soluţiuni ale unei probleme analoage, în care se vor întrebuinţa numai cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 şi 8.

Fie acum

$$a \times bcde = fghi \quad (3) \qquad \text{şi} \qquad ab \times cde = fghi \quad (4)$$

soluţiile problemei. Este uşor de văzut că

$$a \neq b \neq f \neq 0 \text{ pentru (3) şi } a \neq c \neq f \neq 0 \text{ pentru (4)}$$

$$f < a \text{ pentru (3) şi } fg < ab \text{ pentru (4).}$$

Cu aceste observaţiuni, rezultă că putem avea:

Pentru (3) : $a = 3, 4, 6, 7.$

Pentru (4) : $ab =$ 12, 13, 15, 16, 18, 24, 25, 27, 28, 34, 36, 37, 42, 43, 45, 46, 48, 52, 54, 57, 58, 63, 64, 67, 72, 73, 75, 76, 78, 82, 84, 85, 87.

Dăm lui a şi ab pe rând toate aceste valori şi căutăm pe diferite criterii să găsim celelalte cifre, reducând cât mai mult numărul încercărilor. Vom examina în cele ce urmează 2 exemple, pentru a indica metodele de urmat pentru a găsi soluţiunile pe care le menţionăm la sfârşit.

Primul exemplu. Fie $a = 3$, de unde $f > 3$, $bcde = 3m$, $fghi = 9p$, $e \neq j \neq 5$ şi $b < 3$.

Deci $$4012 < fghi < 8765$$

$$\frac{4012}{3} = 1337,\ldots < bcde < \frac{2921}{3} = 2921,\ldots$$

şi fiindcă 3 este întrebuinţat odată, iar 9 nu este între cifrele date, rezultă

$$1426 \leqslant bcde \leqslant 2876 \quad \therefore \quad 4278 \leqslant fghi \leqslant 8627$$

deci fg poate fi unul din numerele

42, 45, 46, 47, 48, 51, 52, 54, 56, 57, 58, 61, 62, 64, 65,
67, 68, 71, 72, 74, 75, 76, 78, 81, 82, 84, 85, 86.

Fie

$$fg = 42 \quad \therefore \quad b = 1$$

deci

$$3 + 1\ cde = 42hi.$$

Singura valoare acceptabilă pentru e este

$$e = 6 \quad \therefore \quad i = 8.$$

Cum $fghi$ trebue să se dividă prin 9, vom avea

$$f + g + h + i = 4 + 2 + h + 8 = 18 \quad \therefore \quad h = 4$$

ceeace nu se poate. Deci $fg = 42$ nu dă soluţie.

Continuând pe această cale găsim că pentru $a = 3$ avem soluţia

$$3 \times 2058 = 6174.$$

Al doilea exemplu. Fie $ab = 13$ deci $fg > 13$. Avem

$$2045 < fghi < 8765 \quad \therefore \quad \frac{2045}{13} = 157,\ldots < cde < \frac{8764}{13} = 674$$

$$\therefore \quad 204 \leqslant cde \leqslant 674$$

unde e poate avea numai valorile 2, 4, 6 sau 8.

Ţinând seamă de acestea şi de observaţiunile generale dela început, considerăm dintre numerele cuprinse între 204 şi 674 inclusiv pe acelea care se termină în 2, 4, 6, 8, care nu au cifre identice, care nu au niciuna din cifre egală cu 1 sau 3 şi care nu sunt de forma *Mult* 3 — 1, adică considerăm numai numerele:

204, 208, 246, 256, 258, 264, 268, 274, 276, 286,

402, 406, 408, 426, 456, 462, 468, 472, 478, 486,

502, 504, 508, 526, 528, 546, 564, 568, 574, 576,

582, 586, 604, 624, 628, 642, 648, 652, 654, 658, 672.

Din aceste numere eliminăm pe acelea ale căror unităţi înmulţite cu 3 dau produsul terminat cu una din cifrele deja întrebuinţate, cum sunt numerele 204, 264, ... 672. Rămân de încercat numai următoarele 26 numere:

208, 246, 256, 258, 268, 276, 402, 406, 426, 456, 472,

502, 504, 508, 526, 528, 546, 564, 568, 574, 576, 582,

604, 628, 654 şi 658.

pe care înmulţindu-le cu 13 găsim soluţiile

$$13 \times 406 = 5278 \text{ şi } 13 \times 604 = 7852.$$

Continuând pe această cale găsim că soluţiile problemei sunt:

$$3 \times 2058 = 6174 \; ; \; 13 \times 406 = 5278 \; ;$$

$$13 \times 604 = 7852 \; ; \; 34 \times 178 = 6052.$$

Observaţiuni. 1°. Căutând, pe aceleaşi căi, 3 numere scrise cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 întrebuinţate o singură dată, găsim soluţiile:

$$3 \times 582 = 1746 \; ; \; 6 \times 453 = 2718 \; ; \; 24 \times 57 = 1368 \; ; \; 37 \times 58 = 2146 \; ;$$

$$58 \times 64 = 3712.$$

Aceste soluţiuni sunt şi soluţiuni *formale* ale problemei 4341, dacă se adaugă cifra 0 la stânga unuia din cele 3 numere. De exemplu:

$$037 \times 58 = 2146 \; ; \; 37 \times 058 = 2146 \; ; \; 37 \times 58 = 02146 \; ; \ldots$$

2° Rezolvând problema analoagă pentru cazul tuturor cifrelor sistemului zecimal, găsim:

$$3 \times 6819 = 20457 \; ; \quad 4 \times 3907 = 15628 \; ; \quad 4 \times 7039 = 28156 \; ;$$

$$4 \times 9127 = 36508 \; ; \quad 7 \times 3094 = 21658 \; ; \quad 7 \times 4093 = 28651 \; ;$$

$$7 \times 9304 = 65128 \; ; \quad 7 \times 9403 = 65821 \; ; \quad 27 \times 594 = 16038 \; ;$$

$$36 \times 495 = 17820 \; ; \quad 39 \times 402 = 15678 \; ; \quad 45 \times 396 = 17820 \; ;$$

$$46 \times 715 = 32890 \; ; \quad 52 \times 367 = 19084 \; ; \quad 54 \times 297 = 16038 \; ;$$

$$63 \times 927 = 58401 \quad \text{şi} \quad 78 \times 345 = 26910,$$

la care se adaugă soluţiile *de formă* prin punerea lui 0 la stânga:

$$4 \times 1738 = 6952 \; ; \quad 4 \times 1963 = 7852 \; ; \quad 12 \times 483 = 5796$$

$$18 \times 297 = 5346 \; ; \quad 27 \times 198 = 5346 \; ; \quad 28 \times 157 = 4396$$

$$39 \times 186 = 7254 \; ; \quad 42 \times 138 = 5796 \; ; \quad 48 \times 159 = 7632.$$

3°. Problema dela 2° este propusă sub No. 2798 de D-l V. THÉBAULT la pag. 326 în *Mathesis* din 1933, unde nu i s'a publicat încă soluţia.

4°. Între soluţiile dela 2° sunt de remarcat:

$$17820 = 36 \times 495 = 45 \times 396$$

$$5796 = 12 \times 483 = 42 \times 138$$

$$5346 = 18 \times 297 = 27 \times 198$$

şi acelea care sunt multipli de 7 şi care au aceleaşi cifre în ambii membri ai egalităţii.

5°. Nu s'a primit nicio soluţie acceptabilă pentru problema 4341.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4424. *Se dă un semicerc de diametru* $\overline{AB} = 2R$ *şi un punct* M *mobil pe el. Fie* MP *înălţimea triunghiului* AMB *şi* AA' *bisectoarea interioară a unghiului* A.

Să se studieze variaţiunea produsului $y = \overline{AA'} \cdot \overline{MP}$, *când* M *variază şi să se caracterizeze triunghiurile dreptunghice pentru care acest produs este maxim.*

N. C.

1°. *Soluție* dată de D-nii: MARCEL AMĂRĂȘTEANU (Lic. Fr. Buzești Craiova), VASILE CEAUȘESCU (Lic. Militar Tg.-Mureș), MIRCEA A. NEGREA (Brăila), MARIN PREDOESCU (Șc. Politehnică Timișoara), FLORENTIN SAVOVICI (Șc. pregăt. ofițeri Geniu), IOAN GH. BOGDAN, VIRGIL N. BUCUR, IOAN BUZINCU, PETRE COJOCARU, C-TIN GAVRILESCU, D. LEBĂDĂ, DUMITRU MIHALCEA (elevi Liceul Militar Iași), ION I. PETRESCU.

Notăm

$$\overline{AM} = x.$$

Deci

$$\overline{MB} = \sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Din relația

$$\overline{AB} \cdot \overline{MP} = \overline{AM} \cdot \overline{MB}$$

deducem:

$$\overline{MP} = \frac{x}{2R}\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

In triunghiul AMB bisectoarea AA' divide latura MB în părți proporționale cu laturile AM, AB.

Rezultă:

$$\overline{A'M} = \frac{x}{2R + x}\sqrt{4R^2 - x^2},$$

iar din triunghiul dregtunghic AMA' scoatem:

$$\overline{AA'} = 2x\sqrt{\frac{R}{2R+x}}.$$

Avem astfel de studiat variația funcțiunei

$$y = \overline{AA'} \cdot \overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{R}}x^2\sqrt{2R - x} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2R).$$

Derivata acestei funcțiuni este:

$$y' = \frac{x(8R - 5x)}{2\sqrt{R(2R - x)}}.$$

Putem forma tabloul:

x	0				$\frac{8}{5}R$			$2R$
y'	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
y	0	creşte		$M = \frac{128R^2}{25\sqrt{10}}$		descreşte		0

Deci în cazul maximului avem:

$$\overline{AM} = \frac{8}{5}R \quad , \quad \overline{BM} = \frac{6}{5}R$$

şi triunghiurile dreptunghice, care corespund la maxim au laturile proporţionale cu numerile 5, 4, 3.

2°. *Soluţie* dată de D-nii: WILHELM CSEKE (student Cluj), FLORENTIN SAVOVICI (Şc. ofiţeri Geniu), IANCU SAGER şi PANAIT MAZILU.

Notăm

$$\sphericalangle MAB = \varphi.$$

Deducem:

$$\overline{MP} = \overline{AM} \sin\varphi = 2R \sin\varphi \cos\varphi$$

$$\overline{AA'} = \frac{\overline{AM}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2R\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$y = \overline{AA'} \cdot \overline{MP} = 8R^2 \sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\varphi \qquad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y' = 4R^2 \cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\varphi - 8\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 4R^2 \cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - 9\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

şi putem forma tabloul:

φ	0			$2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$			$\frac{\pi}{2}$
y'	+	+	+	0	−	−	0
y	0	creşte		$M=\frac{128R^2}{25\sqrt{10}}$	descreşte		0

In cazul maximului $\varphi_M = 2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$ găsim:

$$\overline{AB} = 2R \quad , \quad \overline{AM} = \frac{8}{5}R \quad , \quad \overline{BM} = \frac{6}{5}R$$

şi triunghiurile dreptunghice care corespund la maxim au laturile proporţionale cu numerile 5, 4, 3.

Observaţii. 1°. Maximul funcţiunei $\sqrt{R}\, y = x^2\sqrt{2R - x}$ se poate determina fără a recurge la calculul derivatei folosind teorema:

Dacă cantităţile pozitive y, z au o sumă constantă, atunci produsul $P = y^\beta z^\gamma$ *va fi maxim când factorii variabili y, z vor fi proporţionali cu exponenţii lor.*

(A se vedea de ex. *Curs elementar de Algebră Superioară* de D-l Prof. N. CIORĂNESCU, pag. 175).

Cum:

$$x + (2R - x) = 2R = \text{constant}$$

maximul are loc în cazul când

$$\frac{x}{2} = \frac{2R - x}{\frac{1}{2}} \quad \text{sau} \quad x = \frac{8R}{5}.$$

2°. Deasemenea maximul funcţiunei

$$\frac{y}{4\sqrt{2}R^3} = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\varphi$$

se poate găsi folosind aceeaş teoremă.

Se observă că factorii sunt pozitivi $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ şi avem:

$$\cos\varphi + 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 1.$$

Deci maximul are loc pentru

$$\frac{\cos\varphi}{2} = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}}, \quad \varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} \tfrac{1}{3}.$$

N. B.

PROBLEMA 4454. *Punctele de tangență ale cercului* C *cu alte două cercuri* O_1 *și* O_2, *care se taie în* B_1 *și* B_2, *fiind* A_1 *și* A_2; *să se arate că :*

$$\overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_2} \cdot \overline{A_2B_1}.$$

GH. VASILIU.

Soluție dată de D-nul Sub-locot. BĂDESCU EM. AUREL (Fontainebleau) :

Tangentele comune la O_1 și C, și la O_2 și C în A_1 și A_2 se întâlnesc în centrul radical A al celor trei cercuri, situat pe B_1B_2. Teorema lui STEWART ne dă că :

$$\frac{\overline{A_1B_1^2}}{\overline{B_1A} \cdot \overline{B_1B_2}} + \frac{\overline{AA_1^2}}{\overline{AB_2} \cdot \overline{AB_1}} + \frac{\overline{A_1B_2^2}}{\overline{B_2A} \cdot \overline{B_2B_1}} = 1$$

cum însă $\overline{AA_1^2} = \overline{AB_2} \cdot \overline{AB_1}$ urmează că :

$$\frac{\overline{A_1B_1^2}}{\overline{B_1A} \cdot \overline{B_1B_2}} = -\frac{\overline{A_1B_2^2}}{\overline{B_2A} \cdot \overline{B_2B_1}}$$

deci :

$$\frac{\overline{A_1B_1^2}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{A_1B_2^2}}{\overline{B_2A}}. \qquad (1)$$

Analog se demonstrează că :

$$\frac{\overline{A_2B_1^2}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{A_2B_2^2}}{\overline{B_2A}}. \qquad (2)$$

In fine, împărțind pe (1) cu (2):

$$\frac{\overline{A_1B_1^2}}{\overline{A_2B_1^2}} = \frac{\overline{A_1B_2^2}}{\overline{A_2B_2^2}}$$

unde înmulțind cruciș și extrăgând rădăcina pătrată obținem ceeace trebuia demonstrat.

Au mai rezolvat bine problema pe cale geometrică D-nul ILIE ION ȚIȚEICA și pe cale trigonometrică D-nul Profesor IANCU N. SAGER.

GH. V.

PROBLEMA 4519. *Să se rezolve ecuația:*

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 1 & x+1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0.$$

PETRE MIRESCU.

Notând determinantul propus cu Δ, în care adunând liniei I-a toate celelalte linii, obținem:

$$\Delta = (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & x+3 \end{vmatrix}$$

unde lăsând coloana I neschimbată, dar pe care o scădem din celelalte coloane, avem:

$$\Delta = (x+6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 \\ 2 & 0 & x & -1 \\ 3 & -1 & -2 & x \end{vmatrix} = (x+6)\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 \\ -1 & -2 & x \end{vmatrix}$$

unde adunând linia I-a pe a II-a şi apoi scăzând coloana I-a din a doua, avem:

$$\Delta = x(x+6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x(x+6)(x^2-1);$$

egalând pe Δ cu 0, obţinem rădăcinile ecuaţiei propuse.

1°. Au rezolvat bine problema, printr'o desvoltare analoagă celeia de mai sus D-nii: M. MĂNAC, ILIE I. ŢIŢEICA, ALEX. STOICA, BELLOIU C. (Şc. Politehnică, Bucureşti), NĂSTASE MARIN (elev L. M. D.), HILF ARNO, LEUCO ION, CARDARA GH., BUCUR VIRGIL (Iaşi), MOISOVICI ŞT. (Craiova), COSTESCU COSTEL (Bacău), GAVRILESCU C., CERCELARU D-TRU (Craiova), I. BUZINCU, POPESCU F., DOBRESCU PAUL, GHEORGHE T. (Brăila), E. GRABOVSCHI şi I. ST. NICULESCU.

2°. Au rezolvat problema, prin alte desvoltări, unele din ele chiar foarte lungi, D-nii: PANAIT MAZILU, MARCEL AMĂRĂŞTEANU (Craiova), CEAUŞESCU V. (elev L. M. Tg.-Mureş), RADA DUMITRU (cl. VIII-a, Arad), CSEKE W. (student, Cluj), GRUMĂZESCU MIRCEA (Şc. Of. de artilerie), DECEANU GH. (L. M. Tg.-Mureş), COJOCARU PETRU, FLORESCU V. (elev L. M. D.), ANTONESCU FILOFTEIA, CRISTEA EMILIAN (elev L. M. din Cernăuţi), ŞTEFĂNESCU N. (elev L. M. D).

3°. D-l ILIE I. ŢIŢEICA (elev L. M. D.), obţine ecuaţia propusă din:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & 2a & 0 \\ a & x+a & a & 2a \\ 2a & 2a & x+2a & a \\ 3a & 2a & a & x+3a \end{vmatrix}$$

unde, apoi, îl face pe $a = 1$, fapt care nu înseamnă o generalizare a ecuaţiei propuse, care a fost dată numai pentru a fi observate, de către corespondenţi, metodele sale particulare de desvoltare.

PETRE MIRESCU.

PROBLEMA 4537. *Câte numere divizibile cu 11 se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate o singură dată toate? Care este cel mai mare şi cel mai mic dintre aceste numere?*

V. THÉBAULT.

Fie $a\alpha b\beta c\gamma d\delta e$ un număr divizibil prin 11, format din cele 9 cifre semnificative, şi

$$S = a + b + c + d + e \quad ; \quad s = \alpha + \beta + \gamma + \delta.$$

Diferenţa între S şi s trebue să fie multiplu de 11. Cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui s fiind $1+2+3+4$ şi $6+7+8+9$ avem:

$$10 \leqslant s \leqslant 30$$

şi cum

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

rezultă

$$15 \leqslant S \leqslant 35.$$

Formăm tabloul

s	30	29	28	27	26	25	24	23	...
S	15	16	17	18	19	20	21	22	...

din care se vede că diferenţa între cele 2 sume este un multiplu de 11, numai pentru:

(1) $s = 28$; $S = 17$ şi (2) $s = 17$; $S = 28$.

Să observăm că dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ este o soluţie pentru grupul părţilor lui s, atunci orice permutare P între $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ este soluţie.

De asemeni orice permutare P' între a, b, c, d, e este soluţie.

Mai mult, la fiecare permutare P corespund toate permutările P', deci dacă avem o soluţe P, vom avea în total $P_4 \times P_5$ soluţiuni diferite.

Să numim *grupare fundamentală,* gruparea $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sau a, b, c, d, e în care $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ şi $a < b < c < d < e$ şi să căutăm numai grupările fundamentale.

Considerăm egalităţile (1). E destul să căutăm gruparea $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ căci cealaltă se deduce. Avem deci:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 28.$$

Cea mai mare valoare a lui $\gamma + \delta$ fiind $8 + 9$ putem forma tabelul

$\gamma+\delta$	17	16	15	14	...
$\alpha+\beta$	11	12	13	14	...

Când $\gamma + \delta = 17$ nu putem avea decât $\gamma = 8$, $\delta = 9$ pentru gruparea fundamentală şi deci

$$\alpha = 4 \; ; \; 5$$

$$\beta = 7 \; ; \; 6.$$

Continuând astfel şi pentru celelalte valori ale lui $\gamma + \delta$ se găseşte că pentru egalităţile (1) avem următoarele grupări fundamentale:

I. $\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots 4, 7, 8, 9 \; ; \; 5, 6, 8, 9. \\ a, b, c, d, e \ldots 1, 2, 3, 5, 6 \; ; \; 1, 2, 3, 4, 7. \end{cases}$

Egalităţile (2) dau

$$s = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 17$$

$\gamma+\delta$	14	13	12	11	10	9	...
$\alpha+\beta$	3	4	5	6	7	8	...

căci minusul lui $\alpha + \beta$ este $1 + 2 = 3$.

Examinând ca la cazul I, găsim următoarele grupări fundamentale:

II. $\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots 1, 2, 5, 9 \; ; 1, 2, 6, 8 \; ; 1, 3, 4, 9 \; ; 1, 3, 5, 8 \; ; 1, 3, 6, 7 \; ; 1, 4, 5, 7 \; ; \\ a, b, c, d, e \ldots 3, 4, 6, 7, 8 ; 3, 4, 5, 7, 9 ; 2, 5, 6, 7, 8 ; 2, 4, 6, 7, 9 ; 2, 4, 5, 8, 9 ; 2, 3, 6, 8, 9 ; \end{cases}$

$2, 3, 4, 8 \; ; 2, 3, 5, 7 \; ; 2, 4, 5, 6.$

$1, 5, 6, 7, 9 ; 1, 4, 6, 8, 9 ; 1, 3, 7, 8, 9.$

In cazul I avem două grupări fundamentale, iar în cazul II, 9 grupări fundamentale, deci conform celor stabilite la început, vom avea în total:

$$2 \times P_4 \times P_5 + 9 \times P_4 \times P_5 = 11 \times P_4 \times P_5 = 31680$$

numere divizibile prin 11, scrise cu cele 9 cifre semnificative ale sistemului zecimal.

Pentru a găsi pe cel mai mic din cele 31680 numere, alegem din, I şi II grupele, *a, b, c, d, e* care încep cu 1, corespunzător acestora, considerăm din α, β, γ, δ pe acelea care încep cu 2, în caz că nu ar fi nici una pe acelea care încep cu 3 ... Metoda este simplă. Găsim:

Numărul cel mai mic este ... 123475869

Numărul cel mai mare este ... 987652413.

Notă. 1°. De oarece

$$1+2+3+4+5+6+8+9 = 45 = 5 \times 9$$

toate numerele găsite la soluţia precedentă se divid prin 9×11. Deci soluţia dată problemei 4537 răspunde şi pentru cazul când se înlocueşte 11 prin 99.

2°. Problema a fost atacată numai de D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU, care interpretând greşit enunţul, a căutat numerele de 3, 4 şi 5 cifre diferite, divizibile prin 11, dar nu a găsit rezultatul exact şi nici complet.

3°. Procedând ca la soluţia problemei 4537, se poate rezolva problema analoagă, căutând numărul multiplilor de 11 sau de 99 care se scriu cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate toate câte odată.

Se găsesc următoarele grupe de câte 5 cifre, ale căror sume diferă prin un multiplu de 11:

a) 0, 4, 7, 8, 9	0, 5, 6, 8, 9	1, 3, 7, 8, 9	1, 4, 6, 8, 9	1, 5, 6, 7, 9	2, 3, 6, 8, 9
α) 1, 2, 3, 5, 6	1, 2, 3, 4, 7	0, 2, 4, 5, 6	0, 2, 3, 5, 7	0, 2, 3, 4, 8	0, 1, 4, 5, 7

a) 2, 4, 5, 8, 9	2, 4, 6, 7, 9	2, 5, 6, 7, 8	3, 4, 5, 7, 9	3, 4, 6, 7, 8
α) 0, 1, 3, 6, 7	0, 1, 3, 5, 8	0, 1, 3, 4, 9	0, 1, 2, 6, 8	0, 1, 2, 5, 9

Cu aceste grupe se pot forma

$$11 \times P_5 \times P_5 = 158400$$

numere de 10 cifre divizibile prin 11, care să înceapă cu o cifră din şirul *a*) şi să se termine cu o cifră din şirul α) şi

$$11 \times P_5 \times P_5 = 158400$$

numere care să înceapă cu o cifră din şirul α) şi să se termine cu o cifră din şirul a). Deci în total

$$2 \times 11 \times P_5 \times P_5 = 316800$$

numere de 10 cifre diferite, divizibile prin 11 şi deci prin 99. In aceste numere de 10 cifre sunt formate toate acelea care încep cu zero şi al căror număr se poate calcula uşor.

Cel mai mic şi cel mai mare din aceste 316800 numere sunt, respectiv

$$0123475869 = 9 \times 11 \times 1247231$$

$$9876524130 = 9 \times 11 \times 99762870.$$

Dacă se consideră numai numerele de 10 cifre care încep cu o cifră semnificativă, atunci eel mai mic număr va fi

$$1024375869 = 9 \times 11 \times 10347231.$$

G-L GH. B.

PROBLEMA 4539. *Se consideră triunghiul dreptunghic*

$$ABC\ (A = 90^0\ ,\ AC > AB).$$

Se construiesc pe catetele lui segmentele $BB_1 = AC$ *(spre exterior) şi* $CC_1 = AB$ *(spre interior), ce determină triunghiul* AB_1C_1. *Să se arate că avem :*

$$\sphericalangle C_1 = 45^0 + \hat{C} \quad ; \quad \sphericalangle B_1 = 45^0 - \hat{C}$$

$$AD_1 \cdot \sqrt{2} = DC - DB \quad ; \quad 2AD \cdot \sqrt{2} = D_1B_1 - D_1C_1 .$$

D *şi* D_1 *fiind respectiv picioarele înălţimilor în cele două triunghiuri.*

ALEXANDRU V. NICULESCU.

Soluţia geometrică.

Fie E punctul de intersecţie (BC , B_1C_1). In Δ-ul C_1EC avem $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle E + \sphericalangle C$; trebue deci să arătăm că $\sphericalangle E = 45^0$.

Facem următoarele construcţii auxiliare :

Ducem $C_1A_1 \perp C_1B_1$, de aceeaş parte cu C ; luăm $C_1A_1 = C_1B_1$, coborîm $A_1A' \perp AC$ şi fie O mijlocul dreptei A_1B_1.

Insemnăm cu a, b, c laturile Δ-ului ABC.

Se observă imediat că Δ-urile dreptunghice AB_1C_1 , A_1C_1A' sunt egale, având ipotenuza ($B_1C_1 = A_1C_1$) şi un unghiu ascuţit egal

$$(\sphericalangle A_1C_1A' = \sphericalangle AB_1C_1);$$

rezultă:

$$A_1A' = AC_1 = b - c$$

$$C_1A' = AB_1 = b + c$$

de unde

$$AA' = 2b$$

şi prin urmare C e mijlocul dreptei AA' ; atunci $OC \parallel A_1A' \parallel AB_1$ şi egal cu semisuma acestor segmente, adică $OC = b$.

Figura $OCBB_1$ este deci un paralelogram ($OC \# BB_1$) ; vom avea şi $BC \# OB_1$ şi de unde rezultă

$$\sphericalangle C_1EC = \sphericalangle C_1B_1A_1 = 45^0$$

ceeace demonstrează partea primă a problemei.

Observăm acum că avem $DC = \frac{b^2}{a}$, $DB = \frac{c^2}{a}$ şi prin urmare

$$DC - DB = \frac{1}{a}(b^2 - c^2) = \frac{1}{a}(b - c)(b + c) = \frac{1}{a} . AC_1 \times AB_1 ;$$

dar din expresia suprafeţei triunghiului rezultă:

$$AC_1 \times AB_1 = B_1C_1 . AD_1 ,$$

cum însă

$$\overline{B_1C_1}^2 = (b + c)^2 + (b - c)^2 = 2(b^2 + c^2) = 2a^2$$

vom obţine

$$AC_1 \times AB_1 = a . AD_1 \sqrt{2}$$

şi deci

$$DC - DB = AD_1 . \sqrt{2} .$$

In acelaş mod, avem

$$D_1B_1 = \frac{\overline{AB_1^2}}{B_1C_1}\ ;\ D_1C_1 = \frac{\overline{AC_1^2}}{B_1C_1}$$

$$D_1B_1 - D_1C_1 = \frac{1}{B_1C_1}(\overline{AB_1^2} - \overline{AC_1^2}) = \frac{1}{a\sqrt{2}}[(b+c)^2 - (b-c)^2]$$

$$= \frac{4bc}{a\sqrt{2}} = 2AD \cdot \sqrt{2}\ ,$$

utilizând şi aci expresiile suprafeţei unui triunghiu dreptunghic.

Soluţia trigonometrică.

Să explicăm formula lui NAPIER, triunghiului dreptunghic AB_1C_1:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{C_1 - B_1}{2}\right) = \frac{(b+c)-(b-c)}{(b+c)+(b-c)} \cot\frac{A}{2} = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} C\ .$$

Unghiurile fiind ascuţite, nu putem lua decât

$$C_1 - B_1 = 2C$$

$$C_1 + B_1 = \frac{\pi}{2}$$

rezultă

$$C_1 = C + \frac{\pi}{4}\ .$$

Pentru a demonstra relaţiile date observăm că putem scrie în Δ-urile AB_1D_1 şi AC_1D_1, de exemplu:

$$D_1B_1 = (b+c)\cos(45 - C) = (b+c)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos C + \sin C)$$

$$D_1C_1 = (b-c)\cdot\cos(45 + C) = (b-c)\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos C - \sin C)\ .$$

Înlocuind liniile trigonometrice în funcţie de laturi, regăsim partea finală din soluţia geometrică.

Soluţia geometrică a fost dată de D-l CORNEL N. POPESCU (Giurgiu).

Soluţii trigonometrice analoage celei de mai sus, sau pe căi mai lungi au dat D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU (Lic. «Fraţii Buzeşti» Craiova), CEAUŞESCU VASILE (cl. 8-a Lic. militar Târgu-Mureş), CSEKE WILHELM (stud. mat. Cluj), CONSTANTIN N. GAVRILESCU (Bacău), OCT. S. IANCULESCU, M. MĂNAC (Lic. M-rea Dealu), M. LEONTE A. NEGREA (Brăila), I. ST. NICOLESCU şi PETRESCU ION.

Observaţiuni. Configuraţia construită la soluţia geometrică se bucură şi de alte proprietăţi, de pildă:

1) Avem

$$\frac{EB}{EC} = \frac{b}{c} \cdot \frac{b-c}{b+c}, \quad \frac{EB_1}{EC_1} = \frac{b^2}{c^2},$$

de unde rezultă:

$$EB = \frac{b}{a}(b-c), \quad EC = \frac{c}{a}(b+c)$$

şi

$$\frac{AB}{AC} : \frac{EB}{EC} = \frac{AB_1}{AC_1} : \frac{EB_1}{EC_1}.$$

2) Fie C' şi B' proiecţiile punctelor C_1 şi B_1 pe înălţimea AD ; figurile BEC_1C' şi B_1ECB' sunt nişte paralelograme, iar figura BB'CC' este un trapez isoscel, un pseudo-patrat.

3) Dacă dreapta AE este bisectoare pentru $\widehat{BAC}$, atunci avem

$$\frac{b-c}{b+c} + \frac{c^2}{b^2}$$

şi punând $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} c = \lambda$, rezultă că există un triunghiu dreptunghic îndeplinind această condiţie, căci ecuaţia în λ:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

are o rădăcină reală $0 < \lambda_1 < 1$.

ALEX. V. N.

PROBLEMA 4543. *Să se rezolve ecuaţiunea:*

$$2\sin x - \cos 3x + \cos 5x = 0.$$

IULIU DEAC.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila), WILHELM CSEKE (student Cluj), MIHAIL CHIRIŢĂ, GRIGORE MARTEŞ (Şcoala navală), EMANUEL BLAGA (Galaţi), VASILE CEAUŞESCU (Liceul militar Mihai Viteazul), CONST. COTESCU (Bacău) şi ALEX. KNALL (Liceul militar Iaşi).

Transformând diferenţa ultimilor doi termeni în produs obţinem:

$$2\sin x - \cos 3x + \cos 5x = 2\sin x - 2\sin x \sin 4x$$

$$= 2\sin x (1 - \sin 4x) = 0.$$

Ecuaţia se desface în:

$$\sin x = 0$$

care dă

$$x = k\pi$$

şi

$$\sin 4x = 1$$

care dă

$$4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}.$$

S'au primit soluţii incomplete sau având şi valori străine de cele de mai sus dela D-nii: VIRGIL BUCUR, SOARE BUZINCU, PETRE COJOCARU.

G. D. S.

EXERCIŢII

15. Pe ceviana AP a triunghiului ABC se iau 2 puncte P_1 şi P_2 simetrice faţă de P. Se consideră punctele $M \equiv (BP_1, CP_2)$ şi $N \equiv (BP_2, CP_1)$. Să se arate că atunci când punctele P_1 şi P_2 se mişcă pe AP, rămânând simetrice faţă de P, dreapta MN rămâne paralelă cu o aceeaşi direcţie.

THEODOR GH. COCEA.

R. MN fiind a 3-a diagonală a patrulaterului P_1BP_2C, intersectează pe P_1P_2 în conjugatul armonic al intersecţiei celorlalte 2 diagonale, care este punctul P, faţă de extremităţile ei P_1 şi P_2. Cum P este mijlocul lui P_1P_2, conjugatul său este la infinit. Deci MN e paralelă cu AP. Are deci o direcţie constantă, când P_1 şi P_2 se mişcă pe AP rămânând simetrice faţă de P.

16. a, b, c, fiind laturile unui triunghiu oarecare, iar l_a, l_b, l_c porţiunile de înălţimi cuprinse între vârfuri şi ortocentru, să se stabilească relaţia:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a^2} & l_a^2 b^2 c^2 \\ 1 & \frac{1}{b^2} & l_b^2 c^2 a^2 \\ 1 & \frac{1}{c^2} & l_c^2 a^2 b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

MARCEL AMĂRĂŞTEANU.

R. Ţinând seamă că: $a = 2R \sin A$ şi $l_a = 2R \cos A = a \operatorname{cotg} A$. (Compléments de Trigonométrie par F. G. M. pag. 182), avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4R^2 \sin^2 A} & a^2b^2c^2 \operatorname{cotg}^2 A \\ 1 & \frac{1}{4R^2 \sin^2 B} & a^2b^2c^2 \operatorname{cotg}^2 B \\ 1 & \frac{1}{4R^2 \sin^2 C} & a^2b^2c^2 \operatorname{cotg}^2 C \end{vmatrix} = \frac{a^2b^2c^2}{4R^2} \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cosec}^2 A & \operatorname{cotg}^2 A \\ 1 & \operatorname{cosec}^2 B & \operatorname{cotg}^2 B \\ 1 & \operatorname{cosec}^2 C & \operatorname{cotg}^2 C \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{4R^2} \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{cotg}^2 A & \operatorname{cotg}^2 A \\ 1 & \operatorname{cosec}^2 B - \operatorname{cotg}^2 B & \operatorname{cotg}^2 B \\ 1 & \operatorname{cosec}^2 C - \operatorname{cotg}^2 C & \operatorname{cotg}^2 C \end{vmatrix} = 4S^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \operatorname{cotg}^2 A \\ 1 & 1 & \operatorname{cotg}^2 B \\ 1 & 1 & \operatorname{cotg}^2 C \end{vmatrix} = 0,$$

de oarece:

$$\operatorname{cosec}^2 A - \operatorname{cotg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1 - \cos^2 A}{\sin^2 A} = 1.$$

17. Să se stabilească relaţia:

$$\begin{vmatrix} \sec a & 0 & \operatorname{tg} a & 0 \\ 0 & \sec a & 0 & \operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg} a & 0 & \sec a & 0 \\ 0 & \operatorname{tg} a & 0 & \sec a \end{vmatrix} = 1.$$

MARCEL AMĂRĂŞTEANU.

R. Considerând determinantul:

$$\begin{vmatrix} \sec a & \operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg} a & \sec a \end{vmatrix} = \sec^2 a - \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = 1,$$

putem scrie:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sec a & \operatorname{tg} a & 0 & 0 \\ \operatorname{tg} a & \sec a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sec a & \operatorname{tg} a \\ 0 & 0 & \operatorname{tg} a & \sec a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \sec a & 0 & \operatorname{tg} a & 0 \\ \operatorname{tg} a & 0 & \sec a & 0 \\ 0 & \sec a & 0 & \operatorname{tg} a \\ 0 & \operatorname{tg} a & 0 & \sec a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sec a & 0 & \operatorname{tg} a & 0 \\ 0 & \sec a & 0 & \operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg} a & 0 & \sec a & 0 \\ 0 & \operatorname{tg} a & 0 & \sec a \end{vmatrix} = 1.$$

18. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0.$$

VIRGIL GHIŢESCU.

R. Ecuaţia se mai poate scrie:

$$\frac{d}{dx}(x^2 y') = 1.$$

Vom avea succesiv:

$$\int d(x^2 y') = \int dx$$

$$x^2 y' = x + C_1$$

$$x^2 dy = x dx + C_1 dx$$

$$dy = \frac{dx}{x} + C_1 \frac{dx}{x^2}$$

$$y = \log C_2 x - \frac{C_1}{x}.$$

PROBLEME PROPUSE

4639. Să se ducă cu preciziune tangentele dela un punct exterior unui cerc la acel cerc, când punctul dat este foarte aproape de cerc.

I. IONESCU.

4640. Două numere scrise unul după altul şi urmate de suma sau diferenţa lor ne dau un pătrat perfect. Se cer acele numere şi pătratele astfel obţinute.

GH. VASILIU.

4641. Să se demonstreze că între termenii şirului lui FIBONACCI există relaţia

$$\sum_{i=0}^{n} u_i \, u_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-2)^i \, (n - i + 1) \, u_{n-i+1} .$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4642. O dreaptă Δ exterioară triunghiului ABC taie laturile lui în punctele α, β şi γ. Cercurile ortogonale cercului ABC având centrele în punctele α, β, γ intersectează respectiv laturile BC, CA şi AB în punctele (A_1 şi A_2); (B_1 şi B_2); şi (C_1 şi C_2), unde s'a notat cu A_1, B_1, C_1 punctele interioare cercului ABC şi cu A_2, B_2, C_2 punctele exterioare lui. Să se arate că dreptele AA_1, BB_1, CC_1, sunt concurente şi că punctele A_2, B_2, C_2 sunt în linie dreaptă.

THEODOR GH. COCEA.

4643. Fie în triunghiul ABC, M' şi M'' două puncte reciproce, A' şi A'' plcioarele cevienelor AM' şi AM''; A_b , A_c izotomicele punctelor în care cercul AA'A'' taie respectiv laturile AB, AC; B_c , B_a , C_a , C_b puncte analoage.

Să se arate existenţa relaţiei:

$$\frac{\overline{AA_b}}{\overline{AA_c}} \cdot \frac{\overline{BB_c}}{\overline{BB_a}} \cdot \frac{\overline{CC_a}}{\overline{CC_b}} = -1.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4644. Să se construiască un triunghiu înscris într'un cerc dat, cunoscându-se un vârf al triunghiului şi dreapta lui SIMSON a unui punct M de pe cerc. Discuţiune.

NICULAE D. ŞTEFĂNESCU.

4645. Să se rezolve sistemul:

$$x^2 - y = a \ , \ y^2 - z = a \ , \ z^2 - x = a.$$

M. GHERMĂNESCU.

4646. Să se arate că dacă avem:

$$a + b + c + d = 0$$

avem şi

$$6\,\Sigma a^5 = 5\,\Sigma a^2 \,.\, \Sigma a^3$$

$$6\,\Sigma a^7 = 7\,\Sigma a^3 \,.\, (\Sigma a^4 + 2\,abcd).$$

MAIOR I. LINTEŞ.

4647. Să se determine ecuaţiunile care dau pe x şi y astfel ca să avem:

$$\cos(x + y) = \cos x + \cos y.$$

Să se arate asemenea dacă există valori de x şi y astfel ca să avem:

$$\operatorname{cotg}(x + y) = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y.$$

O. N. Ţ.

4648. a, b, c fiind laturile unui triunghiu, să se arate că avem oricare ar fi x:

$$a^2 \geqq \frac{b^2}{ch^2\,x} = \frac{c^2}{sh^2\,x},$$

unde $ch\,x$ şi $sh\,x$ înseamnă cosinusul şi sinusul iperbolic al lui x.

N. CIORĂNESCU.

4649. Se dă o elipsă cu centrul în O, de axă mare $\overline{AA'}$ şi de axă mică $\overline{BB'}$. Din O se duce o dreaptă oarecare OU care tae elipsa în M şi M'. In M se duce o paralelă MX cu AA' şi pe ea se ia segmentul $\overline{MP} = \overline{OM}$. Să se determine locul geometric al punctului P.

M. NICOLAU.

4650. Să se arate că ecuaţiunea:

$$(n + 1)\,x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

are toate rădăcinile în modul mai mici ca 1. Idem derivatele ei.

LOCOT. C-DOR GH. NICULESCU.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. M. (4616, 24); *Apostol R.* (4527); *Baumgartner I. I.* (4570, 86); *Blaga E.* (4585); *Bogdan Gr. I.* (4287, 458, 519, 43, 82, 623, 24); *Bogza Gr. V.* (4519, 43, 44, 623); *Buzincu I.* (4518, 56, 85, 624); *Călinescu Aurelian* (4549, 54, 57, 70, 84, 99, 624, 26, 32); *Chiriac I. C.* (4181, 520, 24, 45, 70, 99, 600, 23, 24); *Chiriţă M. Mihail* (4181, 238, 338, 79, 485, 520, 600, 08, 22, 23, 24); *Cioc I. D.* (4543); *Cojocaru P.* (4518, 56, 85); *Cornăţeanu I. Aurel* (4545, 70); *Cotescu C.* (4387, 435, 519, 44, 45, 624); *Dumitriu Călin Ion* (2446, 4313, 75, 423, 35, 519, 43, 44, 82, 85, 623); *Eckstein Virgil* (4619, 31); *Enache D. I.* (4519, 43, 623, 24); *Florescu L. V.* (4623); *Gavrilescu C.* (4585, 95); *Gloden A.* (N); *Grumăzescu Mircea* (4471, 556); *Knall S.* (4418, 35, 85, 543); *Lascu Bal* (4623, 24); *Mătieş V. I.* (A); *Mazilu C. Panait* (4471, 539, 43, 99); *Merbl A. Iosif* (4623, 24, 25, 29); *Mihăilescu A.* (4545, 623); *Mihalcea D.* (4585); *Moisovici M. St.* (4565, 99); *Năstase Marin* (4518); *Negrea M.-L.* (3589, 4566, 67, 71, 608, 23, 24, 25, 26, 33); *Oteteleşeanu Ş.* (P); *Petrescu I. I.* (4455, 624); *Roşculeţ N.* (4623, 24); *Silaş Gh.* (4546, 69, 73, 89, 600, 08, 23); *Stoicescu T.* (4414, 544, 46, 69, 600, N); *Streder I.* (4478, 524, 42); *Thébault V.* (A, N, P); *Vasilescu A. Alexandra* (4563, 67, 77, 81, 616, 19, 22, 23, 24); *Vasiloschi E. Florin* (4570); *Vişa E.* (A).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie. Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 . . . . . Lei 30

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria dreptunghiulară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

La aceste preţuri se vor adăogă taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN.**

C. 40690

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 8. — APRILIE 193

BIBLIOT

SUMARUL

1. Proprietăţi geometrice ale mişcării unei figuri plane variabile care rămâne asemenea cu ea însăşi, când trei drepte ale figurii trec prin trei puncte fixe, sau când trei puncte descriu trei drepte fixe . . . . . *N. Abramescu.*
2. Scrierile matematice ale lui Gheorghe Lazăr . . . . . *Victor Marian.*
3. Asupra unui grup de patru sfere tangente două câte două . . . . *V. Thébault.*
4. O teoremă din geometria triunghiului *Alexandru V. Niculescu.*
5. Două probleme . . . . . *Locot. M. I. Focşeneanu.*
6. Premiul „Inginer Al. Roşu".
7. Note Matematice: 31 — 36.
8. Bibliografie.
9. Cereri.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 4227, 4338, 4374, 4506, 4584, 4617, 4623, 4624.
12. Exerciţii: 19 — 24.
13. Probleme propuse: 4651 — 4662.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redijă în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procurà dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evità confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 780, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 89, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 42, 45, 49, 52, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 79, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 98, 500, 03, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 30, 31, 33, 34, 47, 50, 58, 59, 61, 76, 78, 79, 80, 83, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 96, 98, 601, 02, 03, 04, 05, 07, 12, 13, 15, 18, 27, 28, 30, 34, 36, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 47, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

PROPRIETĂȚI GEOMETRICE

ale mișcării unei figuri plane variabile care rămâne asemenea cu ea însăși, când trei drepte ale figurii trec prin trei puncte fixe, sau când trei puncte descriu trei drepte fixe

1. *Rezumat.* Vom expune unele proprietăți geometrice ale mișcării unei figuri plane variabile, care rămâne asemenea cu ea însăși, aplicate la cazurile când trei drepte ale figurii trec prin trei puncte fixe, sau când trei puncte descriu trei drepte fixe. In ambele cazuri există un centru de mișcare I care este fix, și mișcarea se reduce la o rotație în jurul lui I și la o amplificare. In primul caz orice punct al figurii variabile descrie un cerc trecând prin I, și orice dreaptă trece printr'un punct fix. In cazul al doilea orice punct al figurii variabile descrie o dreaptă fixă, și orice dreaptă rămâne tangentă la o parabolă cu focarul I. Se poate trece dela un caz la altul, printr'o transformare prin polare reciproce în raport cu un cerc cu centrul în I.

2. AB și A'B' fiind două drepte omoloage ale figurilor F și F', să însemnăm cu P intersecția dreptelor AB și A'B'. I fiind punctul comun al cercurilor PAA', PBB', se vede că triunghiurile IAB, IA'B' sunt asemenea. Insemnând cu Q intersecția dreptelor AA', BB', rezultă că punctul I este de asemenea intersecția cercurilor QAB, QA'B' și că acest punct este punctul lui *Miquel* al patrulaterului ABB'A'.

Așa fiind, fie AC un element rectiliniu al figurii F, și să construim în figura F, punctul C', astfel ca triunghiurile IAC, IA'C' să fie asemenea. Atunci, $AC : A'C' = IA : IA' = AB : A'B' = \text{const.}$, și deci punctul C' este în figura F' omologul lui C în figura F. Se trece deci dela C la C', dând segmentului IC o rotație în jurul lui I, de unghiul $CIC' = AIA' = \text{const.}$, și amplificând acest segment în raportul $IC : IC' = IA : IA' = \text{const.}$ Procedând în mod analog, se pot construi toate punctele figurii F', omoloagele punctelor figurii F, și se vede că I este punctul dublu al figurilor F și F'.

Se trece deci dela figura F *la figura* F' *cu o rotație de un unghiu în jurul punctului* I *și cu o amplificare într'un raport constant.* I *este centrul instantaneu al celor două figuri.*

3. *Să considerăm o figură* F *variabilă care rămâne asemenea cu ea însăşi.* Fie (A), (B), (C) *curbele deschise de trei puncte însemnate* A, B, C *ale figurii* F. A′B′C′ fiind poziţia infinit vecină a triunghiului ABC, dreptele AA′, BB′, CC′ tind către tangentele în A, B, C la curbele (A), (B), (C). *Centrul instantaneu de mişcare, la momentul considerat, este la intersecţia cercurilor circumscrise triunghiurilor formate de fiecare din laturile* BC, CA, AB *cu tangentele la traiectoriile* (A), (B), (C) *ale extremităţilor sale* [1]).

4. Fie M şi M′ două puncte omoloage ale figurilor F şi F′. Se vede că unghiurile IMM′ = IAA′ ; MM′ şi AA′ tind către tangentele MT şi AS în M şi A la curbele (M) şi (A) descrise de M şi A. Deci unghiurile IMT = IAS, astfel că, *se poate construi tangenta într'un punct* M *al figurii* F, *la curba* (M).

5. AB şi A′B′ fiind două drepte omoloage ale figurilor F şi F′, să însemnăm cu P intersecţia dreptelor AB şi A′B′. Centrul instantaneu de mişcare I este la intersecţia cercurilor PAA′ şi PBB′. Când F′ este poziţia infinit vecină a figurii F, punctul P tinde către punctul de contact γ al dreptei AB cu înfăşurătoarea sa (γ). Deci γ *fiind punctul de contact al dreptei* AB *cu înfăşurătoarea sa, centrul instantaneu de mişcare* I, *la momentul considerat, este punctul de intersecţie al cercurilor trecând prin* γ *şi tangente respectiv în* A *şi* B *la curbele* (A) *şi* (B). AS fiind tangenta în A la (A), se vede că unghiurile IγA = IAS, deci punctul de contact γ al unei drepte AB cu înfăşurătoarea sa este la intersecţia acestei drepte cu cea dusă prin I, astfel că unghiurile IγA = IAS, AS fiind tangenta în A la curba (A).

6. *Să considerăm figura plană variabilă care rămâne asemenea cu ea însăşi, ştiind că trei drepte* BC, CA, AB *ale figurii trec prin trei puncte fixe* A_1, B_1, C_1 [2]) (Fig. 1). I. Triunghiul ABC

---

1) Pentru mai multe proprietăţi, să se vază, N. ABRAMESCU, *Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même* [*Annalli della R. Scuola Normale di Pisa*, serie II, Vol. I (1932)] şi N. ABRAMESCU, *Lecţiuni de geometrie pură infinitezimală.*

2) Pentru alte consideraţiuni, şi multe desvoltări din *Geometria Triunghiului.* să se vază, J. NEUBERG, *Sur les figures semblablement variables (Procedings of the London Mathematical Society,* 1885) şi capitolul expus după lucrările lui J. NEUBERG din *Traité de Géometrie* de ROUCHÉ et COMBEROUSSE (8-a ediţie, t. I, p. 484). De asemenea, J. PETERSEN, *Constructions Géométriques* (2-a ed, p. 83).

rămânând asemenea cu el însuşi, are unghiurile A, B, C constante, astfel că locurile descrise de punctele A, B, C sunt cercurile (A), (B), (C) trecând respectiv prin B_1 şi C_1, C_1 şi A_1, A_1 şi B_1. Dreapta BC, de ex., trecând prin punctul fix A_1, punctul ei de contact cu înfăşurătoarea este A_1. Centrul instantaneu de mişcare I, la momentul considerat, este (No. 4) la intersecţia cercurilor trecând prin A_1 şi tangente respectiv în B şi C la cercurile (B) şi (C), adică chiar (B) şi (C). Deci cercurile (A), (B), (C) trec prin acelaşi punct I.

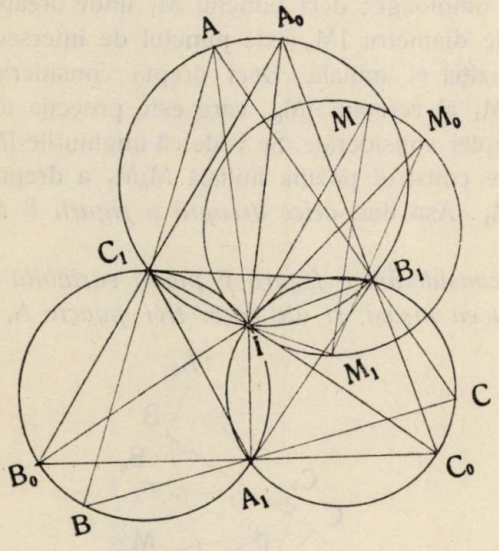


Fig. 1.

Unghiurile A_1IB_1, B_1IC_1, C_1IA_1 sunt constante, ca suplimentele unghiurilor C, A, B. Deci *centrul instantaneu de mişcare* I *este fix în planul triunghiului* $A_1B_1C_1$. Mişcarea figurii F se reduce la o rotaţie în jurul lui I şi o amplificare, deci toate punctele figurii descriu curbe asemenea.

Perpendicularele din I pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 (Fig. 1) determină în cercurile (A), (B), (C) diametrele IA_0, IB_0, IC_0. Triunghiul $A_0B_0C_0$ poate fi considerat ca poziţie iniţială a lui ABC, când figura F era în poziţia F_0.

II. M fiind un punct al figurii F, să construim (Fig. 1) triunghiul MIM_0 asemenea şi de acelaşi sens cu AIA_0; M_0 este poziţia iniţială a lui M, după cum A_0 este poziţia iniţială a lui A. Deci locul lui M este cercul de diametru IM_0, după cum locul lui A este cercul de diametru IA_0. *Deci un punct al figurii* F *descrie un cerc trecând prin* I [1]).

III. MM_1 fiind o dreaptă a figurii F şi M_0 poziţia iniţială a lui M (Fig. 1), punctul M al dreptei descrie cercul de diametru IM_0. Centrul instantaneu de mişcare I este pe cercul IMM_0 şi se ştie (No. 2) că acest cerc trece şi prin punctul M_1 de intersecţie a două drepte omoloage; deci punctul M_1 unde dreapta considerată taie cercul de diametru IM_0 este punctul de intersecţie al acestei drepte cu poziţia ei iniţială. Deci drepta considerată trece prin punctul fix M_1 al cercului IM_0, care este proecţia lui I pe poziţia iniţială a dreptei considerate. Se vede că unghiurile $IMM_1 = IM^0M_1$, deci se poate construi poziţia iniţială M_0M_1 a dreptei IM şi deci şi punctul M_1. Aşa dar, *orice dreaptă a figurii* F *trece printr'un punct fix.*

7. *Să considerăm o figură* F *plană variabilă care rămâne asemenea cu ea însăşi, şi ale cărei trei puncte* A, B, C (Fig. 2)

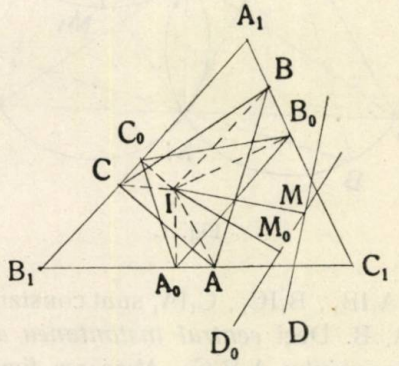


Fig. 2.

descriu laturile B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 *(trei drepte fixe) ale triunghiului dat* $A_1B_1C_1$. I. Triunghiul ABC rămâne asemenea cu el însuşi, deci are unghiurile constante. Centrul instantaneu de mişcare I

1) Cu această ocazie se consideră rezolvată şi problema 4564 din *Gazeta Matematică*, anul 41, Sept. p. 117.

este (No. 3) la intersecţia cercurilor circumscrise triunghiurilor formate de fiecare din laturile BC, CA, AB, cu tangentele la traiectoriile descrise de vârfurile A, B, C; adică cercurile A_1CB, B_1AC, C_1AB se taie în centrul de mişcare I. Dar unghiurile

$$B_1IC_1 = B_1IA + AIC_1 = B_1CA + C_1BA$$

$$= \pi - (ACB + BCA_1) + \pi - (CBA + CBA_1) = CAB + C_1A_1B_1 = A + A_1$$

Unghiurile A_1IB_1, B_1IC_1, C_1IA_1, sunt constante, deci I este fix în planul triunghiului $A_1B_1C_1$, *centrul de mişcare este fix, mişcarea se reduce la o rotaţie în jurul lui* I *şi la o amplificare deci toate punctele figurii se descriu curbe asemenea.*

II. Fie A_0, B_0, C_0 proecţiile punctului I pe B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 (Fig. 2). $A_0B_0C_0$ poate fi considerat ca poziţia iniţială a triunghiului ABC. M fiind un punct al figurii F, poziţia sa iniţială M_0 se construeşte formând triunghiul MIM_0 asemenea şi de acelaşi sens cu AIA_0. Deci M descrie perpendiculara în M_0 pe IM_0, după cum A descrie perpendiculara în A_0 pe IA_0. Aşa dar, *orice punct al figurii* F *descrie o dreaptă.*

III. Fie D o dreaptă a figurii F (Fig. 2) şi M proecţia lui I pe ea. M_0 fiind poziţia iniţială a lui M (care ştim cum se poate construi), punctul M descrie dreapta D_0 perpendiculară în M_0 pe IM_0. Dreapta D_0 este poziţia iniţială a lui D. Deci, proecţia M a lui I pe dreapta D descrie dreapta fixă D_0, de unde rezultă că dreapta D rămâne tangentă la o parabolă cu focarul I şi tangenta, la vârf dreapta D_0. Aşa dar, *o dreaptă a figurii rămâne tangentă la o parabolă cu focarul* F.

8. *Se poate trece dela cazul figurii variabile ce rămâne asemenea cu ea însăşi, şi ale cărei trei drepte* BC, CA, AB *trec prin trei puncte fixe* A_1, B_1, C_1, *la cazul figurii ce rămâne asemenea cu ea însăşi şi care are trei puncte ce descriu trei drepte fixe.* În adevăr, considerând primul caz, I este centrul de mişcare să facem o transformare prin polare reciproce, în raport cu un cerc de centru I şi cu raza dată *k*. La punctele A_1, B_1, C_1 corespund polarele $B'_1C'_1$, $C'_1A'_1$, $A'_1B'_1$ perpendiculare pe IA_1, IB_1, IC_1; la dreptele BC, CA, AB corespund polurilor A', B', C', intersecţiile dreptelor $B'_1C'_1$, $C'_1A'_1$, $A'_1B'_1$ respectiv cu perpendicularele din I pe BC, CA, AB. Triunghiului ABC îi corespunde

triunghiul $A'B'C'$, care sunt polare reciproce în raport cu cercul I, astfel că polarele punctelor A, B, C sunt laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, ale triunghiului $A'B'C'$, iar vârfurile triunghiului $A'B'C'$ descriu laturile triunghiului $A'_1B_1'C'_1$.

Dreptele IA şi IC fiind perpendiculare pe $B'C'$, $B'A'$, unghiul

$$B' = \pi - AIB_1 - B_1IC = \pi - AC_1B_1 - B_1A_1C = \pi - B - B_1 = \text{const},$$

deci triunghiul $A'B'C'$ rămâne asemenea cu el însuşi. Astfel că am trecut dela cazul când trei drepte trec prin trei puncte fixe, la cazul când trei puncte A', B', C' descriu trei drepte fixe. O dreaptă trecea printr'un punct fix, acum un punct descrie o dreaptă fixă.

In primul caz punctele descriu cercuri, acum dreptele rămân tangente la curbele polare reciproce ale lor. Dar, polara reciprocă a cercului $(A) \equiv AC_1IB_1$ în raport cu un cerc de centru I şi rază k, se obţine ducând perpendiculara din I pe tangenta în A la cerc, notând cu M intersecţia ei cu perpendiculara, atunci M' punctul de contact al lui $B'C'$ (polara lui A) cu înfăşurătoarea, este astfel că $IM \cdot IM' = k^2$, adică locul lui M' este inversa podarei (M) a cercului (A) în raport cu I, care se ştie că este o parabolă cu focarul I. După cum, reciproc, polara reciprocă a unei parabole cu focarul I este inversa podarei în raport cu focarul, adică inversa tangentei la vârf, a unei drepte, deci un cerc ce trece prin polul de inversiune I. Am arătat deci din nou, că la o figură variabilă ce rămâne asemenea cu ea însăşi, ce are trei puncte ce descriu trei drepte fixe, la această figură, orice dreaptă rămâne tangentă la o parabolă cu focarul I.

N. ABRAMESCU.

SCRIERILE MATEMATICE ALE LUI GHEORGHE LAZĂR

Timp de aproape patru ani cât a funcţionat GHEORGHE LAZĂR ca profesor la Sf. Sava, el a predat între altele şi matematicele. La început făcea singur toate cursurile de matematici, mai pe urmă cedă aritmetica şi geometria fostului său elev ELIADE RĂDULESCU,

reţinând pentru sine trigonometria. Una din grijile principale ale lui LAZĂR erau manualele didactice, dându-şi bine seama că *„piedeca cea mare a neiuţitei păşire a ştiinţelor a fost şi este netipărirea cărţilor şcolastice"*. De aceea el scrise *„întru folosul şcolarilor săi"*, cu gândul de a tipări, o aritmetică, o geometrie şi o trigonometrie. Moartea prematură însă l-a împiedicat de a-şi realiza planul. Trigonometria a fost tipărită în 1919 de T. LALESCU în Biblioteca *Gazetei Matematice,* aritmetica a scos-o în 1924 Ministerul Instrucţiunii, iar manuscrisul de geometrie s'a pierdut.

Caracterul acestor scrieri ale lui LAZĂR nu e încă deplin lămurit. Sunt oare aceste manuale alcătuite de el, sau sunt prelucrate, — eventual traduse, — după autori străini şi anume după cari? Părerile biografilor lui LAZĂR sunt în această privinţă împărţite. ELIADE RĂDULESCU afirmă, că LAZĂR le-ar fi tradus după C. WOLFF: *„Indată* LAZĂR *începu a traduce cursul de matematică după* WOLFF". LALESCU pune la îndoială afirmaţia lui ELIADE în ce priveşte trigonometria, iar G. BOGDAN DUICĂ afirmă că nici aritmetica nu e după WOLFF, ci e scrisă în genul manualelor de şcoală latineşti pe care LAZĂR le-a folosit ca elev al liceului catolic din Cluj.

Am încercat să lămuresc această chestiune, ea neputând fi fără interes pentru cunoaşterea mai profundă a personalităţii lui LAZĂR, a planurilor sale şi a felului cum a voit să le realizeze. De asemenea putem de aci să precizăm şi rolul ce l-a avut LAZĂR în întemeierea învăţământului matematic românesc. Dau în cele de mai jos rezultatul la care am ajuns confruntând textul lucrărilor lui LAZĂR cu cele al diverselor manuale anterioare datei de 26 Februarie 1821 pe care o poartă manuscrisele lui LAZĂR.

* * *

„Aritmetica matematicească" a lui LAZĂR este o traducere după trei autori diferiţi. Partea cea mai mare a acestui manual şi anume §§ 1 — 86, cuprinzând sistemul de numerare, cele patru operaţii fundamentale cu numere întregi şi fracţii, scoaterea rădăcinii, raporturi şi proporţii, este tradusă după *„Compendium Elementorum Matheseos Universae in usum studiosae juventutis adornatum"* a lui CHRISTIAN WOLFF, apărut la Halae /Halle-Germania/ în 1713. WOLFF este regeneratorul învăţământului matematic

german din veacul al XVIII şi tratatele lui erau cele mai răspândite în Europa în acea epocă. WOLFF a scris două tratate mari de matematică, unul în limba latină destinat în deosebi străinătăţii şi altul de un conţinut aproape identic în limba germană, destinat mai mult ţărilor germane. Ambele tratate aveau însă un mare desavantaj pentru învăţământ: erau prea vaste. Din acest motiv WOLFF s'a văzut silit să scoată după tratatul său german, care poartă titlul *„Anfangs-Gründe aller mathematischen Wissenschaften"* şi a apărut în trei volume la Halae în 1710—11, o ediţie latină, redusă, care e compendiul amintit mai sus.

Pentru noi este interesant faptul că acest compendiu al lui WOLFF era foarte răspândit în Ardeal unde servea ca manual diadactic în liceele protestante (Aiud, Cluj, etc.). Din acest motiv el a fost retipărit în Cluj la 1773, în tipografia liceului reformat. LAZĂR desigur a cunoscut compendiu în timpul anilor de studii în Cluj şi Sibiu şi a putut aprecia valoarea acestei cărţi, care cuprindea în 680 de pagini tot ce se înţelegea pe atunci sub denumirea largă de *„elementa matheseos universae"*. LAZĂR care voia să realizeze la Sf. Sava o *„Academie de ştiinţi"* în sensul liceului academic din Cluj, făcea o bună alegere folosindu-se de aritmetica lui WOLFF ca manual pentru cursurile sale şi traducându-l. Dar caracterul mai mult teoretic al compendiului şi mai ales felul ştiinţific al unor demonstraţii din aritmetică nu se potrivea cu scopul practic imediat ce urmărea LAZĂR, de a scoate inginerii din elemente având la bază o pregătire extrem de sumară. Din acest motiv LAZĂR fu nevoit fie să simplifice unele demonstraţii ale lui WOLFF, fie să le înlocuiască cu altele mai elementare. De asemenea a trebuit să schimbe acele exemple numerice din original în care se operează cu taleri, groşi etc. cu exemple în lei, parale etc. utilizate în Principate. Câteva exemple ne lămuresc asupra felului în care e făcută traducerea lui LAZĂR.

Compendiul lui WOLFF:	**Aritmetica lui LAZĂR:**
Definitio I. **Arithmetica** *est Scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur* (pag. 1).	*Hot. I. Aritmetica este ştiinţa care ne învaţă a socoti, adecă a găsi den oareş care numere date, alte numere necunoscute care au cu ceale cunoscute atârnare* (pag. 60).

81. **Teor. II.** *In proportione Geometrica factum ex membro primo in quartum aequatur facto ex secundo in tertium.*

3 . 6 : : 4 . 8
4 3
24 24 (pag. 36).

§ *81 Teor. II. In Analogia, Proporţia, sau potrivirea geometricească, suma numărului întâiu înmulţită pren numărul al patrălea este asemenea sumi numărului al doilea înmulţită numărul pren al treilea adecă:*

3 : 6 = 4 : 8
4 3
24 24 (pag. 83).

Regula de trei, sau regula de aur cum o numeşte LAZĂR în mod consecvent, nu mai e după WOLFF. Ea e cuprinsă în § 87 al aritmeticei lui LAZĂR şi e identică în ceeace priveşte cuprinsul cu capitolul al patrălea din *„Povăţuire cătră Aritmetică"* tipărită în Buda la 1806. Această cărticică servea ca manual didactic pentru şcolile primare (triviale) româneşti din Ardeal, şi e o traducere după manualul german *„Anleitung zum Rechnen zum Gebrauche der Nationalschulen in den Königreiche Ungarn und den damit verbundenen Staaten»*, a cărei întâie ediţie a apărut în Buda la 1780. E probabil ca LAZĂR să fi cunoscut ediţia dela 1806 sau alta ulterioară a *„Povăţuirii"*, totuşi stilul şi terminologia cu totul diferite ale lui LAZĂR ne îndreptăţesc să credem, că el a tradus direct din originalul german fără să ţină seama de *„Povăţuire"*. Dau mai jos pentru comparaţie câteva exemple din cele două texte:

Povăţuirea din 1806:

Când patru Numeri aşa se orânduesc întră sine, ca cel dintâiu de atâtea ori să se cuprinde în al doilea, de câte ori se cuprinde al treile în al patrulea; sau al doilea de atâtea ori să se cuprindă în cel dintâiu de câte ori se cuprinde al patrulea în al treilea; acei patru Numeri se zic a fi Geometriceaşte Proporţionalnici între sine (pag. 66).

Aritmetica lui LAZĂR:

Când patru numere aşa se aşează între sine, de cel dentâiu de atâtea ori să coprinde întral doilea, de câte ori să cuprinde şi al treilea întral patrulea; sau al doilea de atâtea ori să coprinde în cel dentâiu, decâte ori să coprinde al patrulea întral treilea. Atunci acele patru numere să zic, că sânt între sine geometriceşte analog sau potrivite (pag. 85).

Numerul cel necunoscut se înseamnă cu X, apoi se pune X deadreapta (pag. 67).

Numărul ce să caută, sau cel necunoscut să însămnează cu slova sau litera X, care să pune mai pre urmă spre dreapta (pag. 86).

E interesant să asemănăm şi terminii matematici folosiţi de cei doi traducători:

Povăţuirea din 1806:	**Aritmetica lui LAZĂR:**
proporţie	*analoghie*
numeri geometriceaşte proporţionalnici	*numere geometriceşte analog, sau potrivite*
rânduiala încheieturilor	*canoanele închieturilor*
product	*sumă*
cvoţient	*arătătoriu*
fracţii	*frângeri*
regula soţietăţii (însoţirei).	*regula tovărăşiei.*

La sfârşitul acestui paragraf (în realitate e un întreg capitol) LAZĂR pune: *„Tăbliţa Strângerii, Scăderii, Inmulţirii şi Împărţirii numerelor dela 1 până la 10* întocmai ca în *«Povăţuire"*.

Partea din urmă din aritmetica lui LAZĂR o formează §§ 88 — 95 şi se ocupă cu fracţiile zecimale. Partea aceasta e tradusă după tratatul lui G. I. de METZBURG: *„Institutiones Mathematicae"* Tom. I, Cap. VII. Cartea lui METZBURG constă din 7 volume şi a apărut în Viena, unde autorul era profesor la Universitate, la 1775. Există mai multe ediţii a acestui tratat care servea ca manual pentru studenţii universitari. E probalil, că LAZĂR a cunoscut acest manual în timpul cât a frecventat această Universitate ca student în teologie. Partea tradusă de LAZĂR poartă în original titlul *„De Fractionibus decimalibus"*, iar la el *„Despre frângerile cu zeace"*. E de remarcat însă, că de astă dată LAZĂR nu a tradus decât propoziţiile mai însemnate din textul original, ceeace e în conformitate cu observaţia lui din § 88: *„însă eu le pun mai pe scurt şi aici"*.

Țin să mai relev că METZBURG nu era un autor necunoscut în Principate. După cum reiese din lista cărților și manuscriselor grecești de matematică publicată de T. LALESCU în *Gazeta Matematică* Vol. 22 — 23, sfârșitul algebrei lui METZBURG a fost tradusă în greceşte la 1818 de ATANASIE PSALIDIS pentru predare elevilor săi. Nici această traducere însă nu a fost tipărită.

(Va urma) VICTOR MARIAN.

ASUPRA UNUI GRUP DE PATRU SFERE TANGENTE DOUA CÂTE DOUĂ [1])

1. Fie sferele (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) tangente între ele două câte două. Se demonstrează ușor că există numai două sfere (ω_1), (ω_2), tangente la precedentele. Ne propunem să căutăm o relațiune între razele R_1, R_2, R_3, R_4 și ρ_1, ρ_2 ale celor șase sfere.

Să observăm mai întâi că cel puțin două din sferele (O_i) se ating în exterior; fie (O_2), (O_3), acele două sfere și A punctul lor de tangență.

Luând pe A ca pol de inversiune și ca putere de inversiune puterea K_1 a lui A față de (O_1), (O_1) se transformă în ea însăși, (O_2) și (O_3) devin două planuri (P_2) și (P_3) tangente la (O_1) și situate de o parte și de alta a lui A la distanțele AD_2 și AD_3.

Punctele D_2 și D_3 fiind inversele unor puncte la distanțele $2R_2$ și $2R_3$ de pol, valoarea absolută a lui K_1 este dată de:

$$|K_1| = 2R_2 \cdot AD_2 = 2R_3 \cdot AD_3 \tag{1}$$

Cum:

$$AD_2 + AD_3 = 2R_1 \tag{2}$$

din (1) se scoate:

$$\frac{|K_1|}{2R_2} + \frac{|K_1|}{2R_3} = 2R_1 \tag{3}$$

$$\therefore \quad |K_1| = \frac{4R_1R_2R_3}{R_2 + R_3} \tag{4}$$

1) Acest articol a fost primit la redacție în Martie 1935.

K_1 fiind pozitiv sau negativ după cum A este exterior sau interior lui (O_1), adică după cum (O_2), (O_3) sunt exterioare sau interioare lui (O_1). Dacă deci se consideră R_2 şi R_3 pozitivi când $(O_2$ şi (O_3) sunt exterioare lui (O_1) şi negativi în caz contrar, vom avea totdeauna în mărime şi semn.

$$K_1 = \frac{4R_1R_2R_3}{R_2 + R_3} . \tag{5}$$

Notând cu $| K_4 |$ valoarea absolută a puterei lui A faţă de (O_4), conservând aceleaşi convenţii asupra semnelor şi raţionând la fel asupra figurei formată de sferele (O_2), (O_3), (O_4), prin o inversiune (A, K_4), găsim:

$$K_4 = \frac{4R_2R_3R_4}{R_2 + R_3} \tag{6}$$

Din (5) şi (6) se deduce:

$$\frac{K_1}{K_4} = \frac{R_1}{R_4} \quad , \quad K_1 + K_4 = 4R_2R_3\left(\frac{R_1 + R_4}{R_2 + R_3}\right) \tag{7}$$

şi observând că:

$$\overline{AO_1}^2 - R_1^2 = K_1 \quad ; \quad \overline{AO_2}^2 - R_4^2 = K_4 \tag{8}$$

se găseşte:

$$\overline{AO_1}^2 = \frac{R_1}{R_2 + R_3}[4R_2R_3 + R_2(R_2 + R_3)] \tag{9}$$

$$\overline{AO_4}^2 = \frac{R_4}{R_2 + R_3}[4R_2R_3 + R_4(R_2 + R_3)] . \tag{10}$$

In inversiunea (A, K_1), sfera (O_4) devine o sferă (O_4') de rază R_1, căci această sferă este tangentă la celelalte trei sfere. Punctul A fiind unul din centrele de asemănare al sferelor (O_4) şi (O_4'), avem:

$$AO_4' = \frac{R_1}{R_4} . AO_4 , \tag{11}$$

de unde, ţinând seamă de (8):

$$\overline{AO_4}^2 = K_4 + R_4^2 = R_4\left(\frac{4R_2R_3}{R_2 + R_3} + R_4\right) \tag{12}$$

apoi din (11) şi (7):

$$\overline{AO_4'}^2 = \overline{AO_4}^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_4}\right)^2 = \left(\frac{K_1}{R_4} + R_1\right) R_1 . \qquad (13)$$

2. Fie C_1, C_2 centrele sferelor tangente la (O_1), planurilor (P_1), (P_2) şi sferei (O_4'). Sferele (C_1), (C_2) au aceeaşi rază R_1. Dacă p_1, p_2 sunt puterile lui A faţă de aceste sfere, razele ρ_1, ρ_2 ale inverselor acestor sfere faţă de polul A şi puterea $|K_1|$ vor fi:

$$\left|\frac{K_1}{p_1}\right| R_1 \quad , \quad \left|\frac{K_1}{p_2}\right| R_1 . \qquad (14)$$

Dacă se consideră aceste raze ca pozitive sau negative după cum contactul sferei corespunzătoare cu (O_2), (O_3), (O_4) este de aceeaşi natură cu contactul sferei (O_1) cu precedentele, atunci:

$$\rho_1 = \frac{K_1 R_1}{p_1} \quad , \quad \rho_2 = \frac{K_1 R_1}{p_2} \qquad (15)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{p_1 + p_2}{K_1 R_1} . \qquad (16)$$

Fie M punctul de contact al sferelor egale (O_1), (O_4'). Acest punct se găseşte pe un plan echidistant planurilor (P_1), (P_2) şi ţinând seamă de (8) şi (13):

$$K_1 + R_1^2 + \left(\frac{K_1}{R_4} + R_1\right) R_1 = \overline{AO_1}^2 + \overline{AO_4'}^2$$

$$= 2\overline{AM}^2 + \tfrac{1}{2}\, \overline{O_1 O_4'}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2R_1^2 \qquad (17)$$

$$\therefore \quad 2\overline{AM}^2 = K_1\left(\frac{R_1}{R_4} + 1\right) = \frac{K_1(R_1 + R_4)}{R_4} . \qquad (18)$$

In plus, avem:

$$C_1 O_1 = 2R_1 = C_1 O_4' = C_2 O_1 = C_2 O_4' \qquad (19)$$

$$\overline{C_1 M_1}^2 = \overline{C_1 O_1}^2 - \overline{O_1 M}^2 = 4R_1^2 - R_1^2 = 3R_1^2 . \qquad (20)$$

Aplicând teorema patratului medianei la triunghiul AC_1C_2, se găseşte în definitiv:

$$p_1 + p_2 = \overline{C_1A}^2 - R_1^2 + \overline{C_1O_4}^2 = \overline{C_1A}^2 + \overline{C_1O'_4}^2 - 2R_1^2$$

$$= 2\overline{AM}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{C_1C_2}^2 - 2R_1^2 = 2\overline{AM}^2 + 4R_1^2 = K_1\left(\frac{R_1}{R_4} + 1\right) + 4R_1^2 \quad (21)$$

$$\therefore \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{R_2R_3(R_1+R_4)+R_1R_4(R_2+R_3)}{R_1R_2R_3R_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \quad (22)$$

origina razelor fiind conform cu convenţiile precedente.

3. Fie o sferă (O_1) pe diametrul căreia $BC = 2R_1$ se notează punctul A între B şi C. Fie (O_2), (O_3) sferele de diametre AB, AC şi (O_4) o sferă tangentă la precedentele trei. Transformând figura prin o inversiune de pol A şi modul $|K| = |AB \cdot AC|$, sfera (O_1) se conservă, (O_2), (O_3) devin planurile (P_1), (P_2) tangente la (O_1) în C, B. Sfera (O'_4), inversa lui (O_4) este o sferă de rază R_1 tangentă la (O_1), (P_2), (P_3). Punctul A este unul din centrele de asemănare a sferelor (O_4), (O'_4), iar dreapta O'_4O_1 este perpendiculară în O_1 pe BC. Avem deci:

$$\frac{2R_4}{O_4\alpha_4} = \frac{2R_1}{O'_4O_1} = \frac{2R_1}{2R_1} = 1 \quad \text{şi} \quad O_4\alpha_4 = 2R_4 \quad (23)$$

α_4 fiind proecţia ortogonală a lui O_4 pe BC.

Se găseşte extinsă în spaţiu în felul următor propoziţiunea antică a lui PAPPUS [1]):

Fie o sferă (O_1) de diametru BC şi un punct A pe BC între B şi C. Distanţa centrului O_4 al unei sfere tangente la sfera (O_1) şi la sferele descrise pe AB, AC ca diametre, la diametrul BC, este egală cu diametrul sferei (O_4).

V. THÉBAULT
(Le Mans, France).

---

1) A se vedea de exemplu: VER EECKE, *Oeuvres complètes* D'ARCHIMÈDE, pag. 532.

O demonstraţie foarte simplă a propoziţiei antice a lui PAPPUS am dat în *Revista Matematică din Timişoara*, Vol. XIV, pag. 125.

V. T.

O TEOREMĂ DIN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

I. — Fie ABC şi $A_1B_1C_1$ două triunghiuri omologice înscrise într'o conică Γ, λ centrul lor de omologie şi Δ axa de omologie a celor două triunghiuri.

Teoremă.

Dreptele Aμ, Bμ, Cμ *taie laturile omoloage ale triunghiului* $A_1B_1C_1$ *în trei puncte coliniare pe o dreaptă* D, *care înfăşoară conica înscrisă în cele două triunghiuri când* μ *descrie axa de omologie* Δ.

Să considerăm pentru un moment numai dreptele Aμ şi Bμ; când μ este mobil pe Δ, aceste drepte determină respectiv pe laturile B_1C_1 şi C_1A_1 două homografii (*a*) şi (*b*).

Rezultă atunci că dreapta $D \equiv (ab)$ înfăşoară o conică C tangentă dreptelor B_1C_1 şi C_1A_1. Pentru trei poziţii particulare ale punctului μ se deduce uşor, că această conică este tangentă şi laturilor triunghiului ABC. Această conică C — determinată de cinci tangente — este identică conicii înscrisă în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$, potrivit teoremei că «două triunghiuri înscrise într'o conică sunt circumscrise unei alte conici».

In acelaşi mod să considerăm dreptele Bμ şi Cμ care descriu punctualele (*b*) şi (*c*). Dreapta $D_1 \equiv (bc)$ va înfăşura, după un raţionament asemănător celui de mai sus, o conică înscrisă în cele două triunghiuri, deci conica C. Cum dintr'un punct *b* nu se pot duce trei tangente: *ab*, *bc*, A_1C_1 la o aceeaşi conică, rezultă că punctul (*c*) se află pe tangenta (*ab*). Aşa dar $D \equiv D_1$ şi teorema este demonstrată.

II. — Să facem acum o proiecţie conică aşa fel ca dreapta Δ să devină dreapta dela infinit; centrul de omologie λ va deveni centrul conicei Γ, căci λ este polul axei de omologie în raport cu această conică. Cele două triunghiuri înscrise vor fi simetrice în raport cu centrul conicii, iar dreptele Aμ, Bμ, Cμ trei drepte paralele oarecari. Vom avea atunci următoarea teoremă particulară destul de interesantă:

Fie ABC *şi* $A_1B_1C_1$ *două triunghiuri simetrice faţă de un punct oarecare din planul lor. Trei drepte paralele cu o direcţie, duse respectiv prin* A, B, C, *determină pe laturile corespunzătoare*

ale triunghiului $A_1B_1C_1$ *trei puncte coliniare pe o dreaptă, tangentă conicei înscrisă în cele două triunghiuri.*

III. — O aplicație a acestei teoreme particulare o avem în următoarea problemă propusă de D-l N. BOTEA în *Mathesis* (lanuarie 1932).

Fie D, E, F *picioarele înălțimilor* AD , BE *și* CF *ale triunghiului* ABC , A'B'C' *ortocentrele triunghiurilor* AEF , BFD , CDE. *Să se demonstreze că punctele* X, Y, Z, *unde trei paralele de direcție arbitrară duse respectiv prin* A'B'C' *taie laturile corespunzătoare ale triunghiului* DEF, *sunt coliniare.*

Voiu arăta că triunghiurile DEF și A'B'C' sunt simetrice în raport cu un punct din planul triunghiului ABC.

Fie H ortocentrul triunghiului ABC; pe o figură se vede imediat că avem: $FB' = HD = EC'$ deci $B'C' \# FE$ etc. Deci cele două triunghiuri sunt invers egale, deci simetrice față cu un punct. Proprietatea este astfel demonstrată.

Configurația aceasta se mai bucură și de alte proprietăți cărora le menționez numai enunțul:

1. Figura A'EC'DB'F este un exagon PASCAL, deci triunghiul ortic și triunghiul ortocentrelor triunghiurilor detașate de triunghiul ortic sunt înscrise și circumscrise la două conici concentrice.

2. Dreptele A'D , B'E , C'F sunt concurente în centrul conicilor.

3. Paralelele la laturile triunghiului ABC duse prin A'B'C' formează un triunghiu $A_1B_1C_1$ egal cu ABC; rezultă deci următoarele proprietăți:

4. Dreptele $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ sunt concurente, fiind înălțimile triunghiului $A_1B_1C_1$;

5. Dreptele A_1D , B_1E , C_1F sunt concurente.

6. Centrul cercului circumscris (ABC) este ortocentrul triunghiului A'B'C'.

7. Ortocentrul triunghiului ortic este centrul cercului $(A_1B_1C_1)$.

IV. — Intr'un articol publicat în G. M. (Vol. XXXV, pagina 289 — 294) am stabilit permutarea axelor radicale a două cercuri prin transformarea $[CD_0 \longleftrightarrow CD_\infty]$; în cazul când $D_0 \equiv$ axul ortic, această transformare schimbă triunghiurile median și ortic între ele. Voiu aplica această transformare configurației particulare din paragraful precedent, ocupându-mă numai de punctele A'B'C'. Fie M, N, P mijloacele laturilor unui triunghiu ABC și Q, R, S punctele unde medianele AM , BN , CP taie axul ortic. Consider perechile de drepte

(QN , QP) , (RM , RP) , (SM , SN); ele determină prin intersecția lor punctele α, β, γ transformatele punctelor A', B', C'. Rezultă atunci că dreptele αM, βN, γP sunt concurente în polul axului ortic.

Celelalte propoziții din paragraful precedent iau înfățișări noui și mai generale, cărora corespondenții noștri pot să le dea cetirea și forma necesară.

ALEXANDRU V. NICULESCU.

DOUĂ PROBLEME [1])

In *Gazeta Matematică* Vol. XL, pag. 311 — 313 s'a dat problemelor 1386 și 2889 o soluție, care a condus la construcția a 2 curbe de grad 3 și 4, greu de construit în general.

Voiu da celor două probleme o soluție analitică, reducând construcția la *construcția clasică a unei hiperbole.*

Fie XOY unghiul în interiorul căruia se găsește cercul de centru O_1 și de rază r. Fie O_1x paralela din O_1 la OY și O_1Y perpendicular pe ea. Această dreaptă taie pe OY și OX respectiv în α și N.

Perpendiculara din O_1 la OX taie pe OX și OY respectiv în β și M.

Fie N'' și M'' mijloacele segmentelor αN și βM, iar N' și M' extremitățile segmentelor luate în sens invers lui O_1N și O_1M și egale cu jumătățile lor.

Δ_1 , Δ'_1 paralelele din N'' și M'' respectiv la OY și OX.

Δ_2 , Δ'_2 perpendicularele din N' și M' la OX și OY.

In fine să notăm cu α' și β' polii dreptelor OY și OX, față de cercul (O_1).

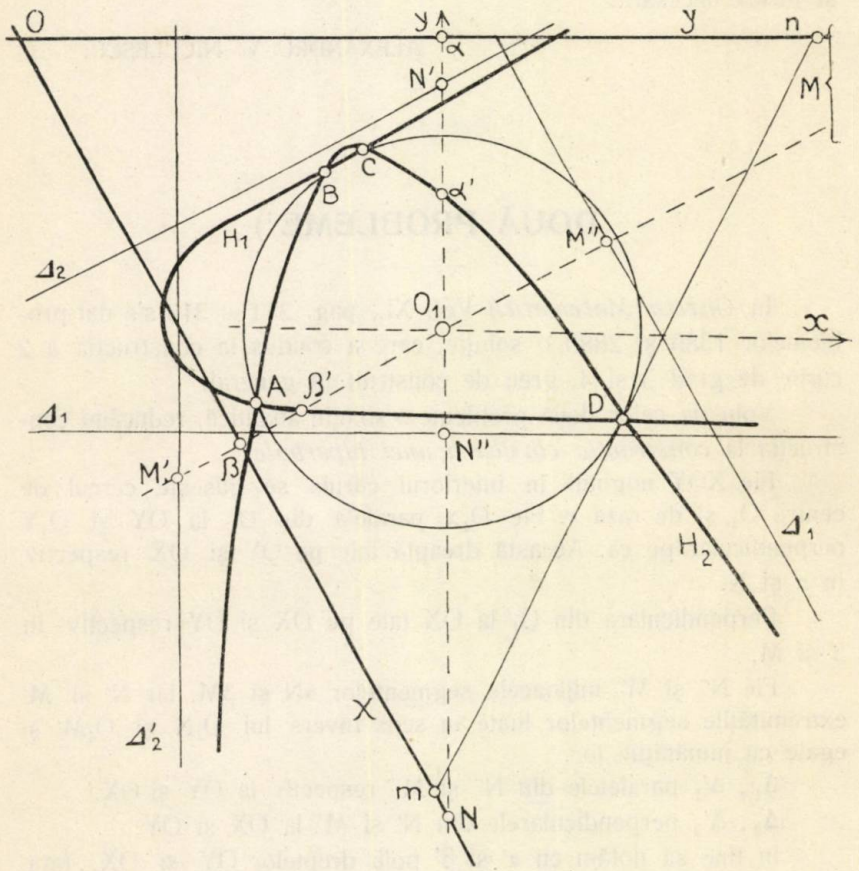
Dacă luăm ca axe xO_1y, avem :

$\alpha\,(O, a)$; dreapta OY de ecuație $y - a = 0$; dreapta OX $(y = mx + n)$;

1) A se vedea articolul D-lui G-ral GH. I. POPESCU dela pag. 127, Vol. XLI, asupra aceloraşi probleme.

cercul (O_1) de ecuație $x^2+y^2-r^2=0$, iar tangenta în punctul (x_1, y_1) intersectează pe OY și OX, în m și n, de coordonate

$$m\left(\frac{r^2-ny_1}{x_1+my_1}\ ,\ \frac{mr^2+nx_1}{x_1+my_1}\right)\ ;\ n\left(\frac{r^2-ay_1}{x_1}\ ,\ a\right).$$



Dacă scriem condițiunile ca $D(x_1, y_1)$ să fie mijlocul lui $\overline{mn}$, găsim

$$2x_1=\frac{r^2-ay_1}{x_1}+\frac{r^2+ny_1}{x_1-my_1} \qquad (1)$$

$$2y_1=a+\frac{mr^2+nx_1}{x_1+my_1} \qquad (2)$$

la care se adaugă condiția că D se află pe cercul O_1:

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0. \qquad (3)$$

Relațiile (1), (2), (3) sunt astfel că una este consecința celorlalte două.

Aceasta se poate dovedi înmulțind pe (1) cu x_1 pe (2) cu y_1 și adunând.

Deci pentru a găsi pe x_1 și y_1 luăm pe ultimele, (2) și (3).

Aceste două relații ne arată că punctele căutate se găsesc la intersecția cercului (O_1) cu *hiperbola* de ecuație:

$$2y_1 = a + \frac{mr^2 + nx}{x + my}.$$

care se mai scrie:

$$\boxed{2xy + 2my^2 - (a+n)x - amy - mr^2 = 0}. \qquad (4)$$

Problema s'a redus deci la construcția *hiperbolei* (4).

Se observă dela început că direcțiile ei asimtotice sunt

$$y = 0 \text{ și } y = -\frac{1}{m}x$$

adică una paralelă cu OY și alta perpendiculară pe OX și că au ecuațiile

$$y = \frac{a+n}{2} \qquad (\Delta_1)$$

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{n}{2} \qquad (\Delta_2)$$

adică sunt tocmai Δ_1 și Δ_2.

Pentru a o defini complect și deci a o construi, ne mai trebue un punct.

Voiu arăta că hiperbola (4) trece prin β'.

In adevăr, coordonatele lui β sunt

$$x_\beta = -\frac{mn}{1+m^2}$$

$$y_\beta = \frac{n}{1+m^2}.$$

Scriind ecuaţia polarei lui β faţă de (O_1) şi luând intersecţia ei cu $O_1\beta$, se găsesc coordonatele lui β'

$$x_{\beta'} = -\frac{m}{n}r^2$$

$$y_{\beta'} = \frac{r^2}{n}$$

care satisfac ecuaţia (4).

Se vede deci că *punctele căutate, sunt la intersecţia hiperbolei* $(\mathcal{H}_1)$ *ce are ca asimtote pe* Δ_1 *şi* Δ_2 *şi trece prin polul dreptei* OX, *faţă de cercul* (O_1).

Această hiperbolă se poate construi prin metoda clasică.

2°. Este de remarcat că punctele căutate se mai găsesc şi la *intersecţia cercului cu o altă hiperbolă* $(\mathcal{H}_2)$, *ce are ca asimptote pe* Δ'_1 *şi* Δ'_2 *şi trece prin* α', *polul lui* OY *faţă de* (O_1).

Acest lucru se demonstrează analog, schimbând axele de coordonate. De altfel era chiar de prevăzut acest lucru, deoarece se ştie că *intersecţiile a 2 hiperbole ce au asimptotele perpendiculare între ele,* cum e cazul lui $(\mathcal{H}_1)$ şi $(\mathcal{H}_2)$, *se află pe un cerc.*

3°. In ce priveşte numărul de soluţii, se vede că *în general există patru puncte* A, B, C, D şi acest lucru se poate întâmpla când XOY cuprinde în interior cercul (O_1).

In cazul când dreapta OY sau OX, este tangentă la cerc, se vede că α şi α' sau β şi β', coincid în punctul de tangenţă şi deci aceste două hiperbole se intersectează în acest punct de tangenţă, care nu e soluţie a problemei.

Deci în acest caz *există numai trei puncte care îndeplinesc condiţia.*

Dacă amândouă dreptele sunt tangente la cerc, se vede că ambele hiperbole au două puncte comune, în punctele de tangenţă care nu reprezintă soluţie.

In acest caz, *există deci numai două puncte, ca soluție.*

Dacă în fine, una sau amândouă dreptele taie cercul, se găsesc în general *dela 4 până la zero puncte.*

4°. Trebue să mai observăm ca o propietate a celor 2 hiperbole că asimtotele lor Δ_1, Δ_2, Δ'_1, Δ'_2 se intersectează pe un cerc, concentric cu (O_1), lucru foarte ușor de remarcat de oarece asimtotele sunt *hiperbole limită,* ale fascicolelor ce ele determină și se intersectează pe un cerc.

LOCOT. M. I. FOCȘENEANU.

PREMIUL „INGINER AL. ROȘU"

Domnul AL. ROȘU a donat și în anul acesta suma de lei 500 pentru a se acorda, în memoria tatălui său, un premiu pentru activitatea originală cea mai rodnică avută de către abonații elevi de liceu, studenți ai Facultăților, elevi ai școalelor Politehnice și Militare din țară în cursul anului XLI, în domeniul geometriei elementare.

Activitatea va consta din articole, note și probleme originale de geometrie elementară.

In cazul când condițiunile impuse nu vor fi îndeplinite, premiul «INGINER AL. ROȘU» se va acorda celui mai harnic corespondent al Gazetei, elev de liceu.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL
«INGINER AL. ROȘU».

NOTE MATEMATICE

31. *Săptămână de ani.* In legătură cu măsurarea vârstei omului prin *săptămână de ani,* adică grupe de șapte ani, găsim următorul exemplu în maximele adunate de IORDACHE GOLESCU, tipărite de Inginerul IULIU A. ZANNE în colecția sa despre Proverbele Românilor, Volumul VIII, la Capitolul pentru vârstă, No. 3318.

„Până la vîrstă d'o săptămână de ani omul se'nțelege cu minte pruncească până la dooĕ; dĕ la o săptămână ĕși schimbă mintea și dinții împreună și copilăria dĕ față i sĕ arată în față, la treĭ septemâni dĕ anĭ barba i sĕ împlinește, fața i se dĕosĕbește: la patru și la cincĭ putere dobândește ca copii să lase în urmă; la a șaselea și a șaptelea săptămână bun dĕ vorbă și dĕ sfat cu mult mai bun la a optulea; iar la a nooĕlea vîrtutea'ncepe a se slăbi, însă mintea întrégă și fără nicĭ o smintélă; l-a ḑecelea săptămână cine-și are vĭață'n mână sfîrșitul să'și privească cum vine să'l cinstéscă".

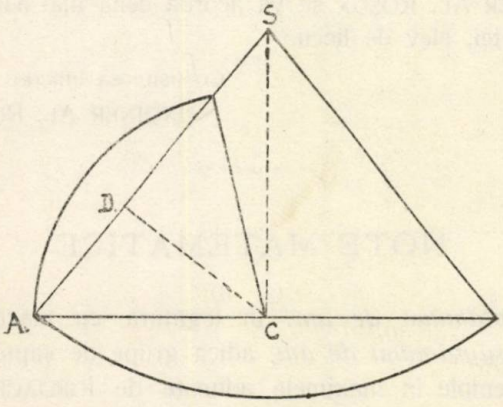
I. I.

32. In legătură cu problema Nr. 4475, propusă de D-l Prof. I. IONESCU, doresc să relevez o serie de observațiuni destul de interesante. Fără a intra în amănuntele pe care ni le-ar procura rezolvarea problemei care face obiectul notei de față, se poate deduce că:

Aria laterală, aria totală, și volumul conului, din această problemă sunt date de relațiile

$$A_e = \pi l^2 \; ; \; A_t = \pi G^2 \quad \text{și} \quad V = \frac{\pi R^3}{3}\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \; .$$

Să ne închipuim acum un con descris de raza conului inițial, dar cu o rază egală cu diferența între generatoarea și raza conului dat, iar vârful său fiind situat în centrul cercului de bază al conului inițial.



Să notăm cu: a_e ; a_t ; V' aria laterală, aria totală și volumul celui de al doilea con.

1°. Urmărind figura vom avea:

$$(\alpha)\quad a_e = \pi AD \cdot AC = \pi R (G - R) = \pi \overline{DC}^2 = \pi (l^2 - R^2)$$

$$(\beta)\quad a_t = \pi R \cdot AD + \pi \overline{AD}^2 = \pi R^2$$

adică aria totală a noului con este egală cu aria bazei conului dat.

Adunând relațiile (α) și (β), vom avea:

$$a_e + a_t = \pi \cdot l^2 = A_e$$

adică aria laterală a conului inițial este egală cu suma ariilor laterală și totală a celui de al doilea con.

La fel se poate deduce că:

$$A_t = a_e + 2a_t$$

adică, cele două arii, laterală și totală, a conului dat sunt în progresie aritmetică, rația fiind aria totală a conului cel mic.

2°. Examinând figura avem:

$$V' = \tfrac{1}{3}\pi \cdot \overline{AD}^2 \cdot DC = \frac{\pi}{3}(2R^2 - l^2)\sqrt{l^2 - R^2}$$

$$= \frac{\pi}{3}\,\frac{R^3 (3 - \sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5} - 1}}{2\sqrt{2}}.$$

Făcând raportul volumelor celor două conuri obținem

$$\frac{V}{V'} = 2 + \sqrt{5}.$$

PROF. PETRE MIRESCU.

33. *Asupra problemei No. 4572.* Iată o altă soluție:

Avem:

$$K \cdot N = 10 \cdot a + \frac{b}{2}$$

deci b este par

$$K \cdot N \leqslant 94$$

deci

$$K \leqslant 3.$$

Mai observăm că $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ și $K^2 . C$ se termină cu aceeaș cifră, care poate să fie:

$$0, 1, 4, 6, 9$$

deci c nu poate fi 5.

Cu aceasta, patratele de trei cifre, cari mai rămân sunt:

$$100, 121, 144, 162, 289, 324, 361, 400,$$

$$441, 484, 529, 729, 784, 841, 900, 961.$$

Cum trebue să avem:

$$5 . b + c = MN$$

urmează că vom mai elimina patratele:

$$289, 324, 361, 529, 729, 784, 841.$$

Celelalte patrate rămase, constituesc soluțiunile problemei.

MAIOR I. LINTEȘ.

34. *Asupra rapoartelor anarmonice ale unor configurații de puncte colineare.*

1°. *a)* A, A_1, A_2, A_3, A_4 *fiind 5 puncte colineare, există relațiile:*

$$\begin{aligned}(A_1A_2A_3A) \times (A_1A_2A\,A_4) &= (A_1A_2A_3A_4)\\ (A_1A\,A_3A_4) \times (A\,A_2A_3A_4) &= (A_1A_2A_3A_4)\end{aligned} \qquad (1)$$

întru cât a, a_1, a_2, a_3, a_4 fiind abscisele punctelor considerate, față cu o origine aleasă pe dreaptă,

$$(A_1A_2A_3\,A) = \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a)}{(a_2 - a_3)(a_1 - a)}$$

$$(A_1A_2A\,A_4) = \frac{(a_1 - a)(a_2 - a_4)}{(a_2 - a)(a_1 - a_4)} .$$

b) Pentru punctele colineare A, A_1, A_2, A_3, A_4 *există relația:*

$$\boxed{(A_1A_2A_3A) \times (A_1A_2AA_4) \times (A_1AA_3A_4) \times (AA_2A_3A_4) = (A_1A_2A_3A_4)}^2 \qquad (2)$$

c) Dacă A_1, A_2, A_3, A_4 *formează o diviziune armonică şi* M *este un punct oarecare pe dreapta lor,*

$$\boxed{(A_1A_2A_3M) \times (A_1A_2MA_4) \times (A_1MA_3A_4) \times (MA_2A_3A_4) = 1}$$

2^0. A_1, A_2, A_3, A_4, B, C *fiind 6 puncte colineare,*

$$\boxed{\frac{(BA_2A_3A_4)}{(CA_2A_3A_4)} = \frac{(BA_1A_3A_4)}{(CA_1A_3A_4)}} \qquad (3)$$

Din (1):

$$(A_1BA_3A_4) \times (BA_2A_3A_4) = (A_1A_2A_3A_4)$$
$$(A_1CA_3A_4) \times (CA_2A_3A_4) = (A_1A_2A_3A_4)$$

Deci:

$$\frac{(BA_2A_3A_4)}{(CA_2A_3A_4)} \times \frac{(A_1BA_3A_4)}{(A_1CA_3A_4)} = 1$$

de unde urmează (3).

3^0. *a)* A_i, B_j $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ *fiind 8 puncte colineare, există relaţiile.*

$$\boxed{\frac{(A_1A_2A_3B_4) \times (A_1A_2B_3A_4)}{(A_1A_2B_3B_4)} = \frac{(B_1A_2A_3A_4) \times (A_1B_2A_3A_4)}{(B_1B_2A_3A_4)} = (A_1A_2A_3A_4)} \qquad (4)$$

Se consideră a_i, b_j, abscisele celor 8 puncte. Avem:

$$(A_1A_2A_3B_4) = \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} : \frac{a_1 - b_4}{a_2 - b_4}$$

$$(A_1A_2B_3A_4) = \frac{a_1 - b_3}{a_2 - b_4} : \frac{a_1 - b_4}{a_2 - b_4}$$

de unde:

$$(A_1A_2A_3B_4) \times (A_1A_2B_3A_4) = (A_1A_2A_3A_4) \times (A_1A_2B_3B_4)$$

etc.

Analog avem:

$$\frac{(B_1B_2B_3A_4) \times (B_1B_2B_3B_4)}{(B_1B_2A_3A_4)} = \frac{(A_1B_2B_3B_4) \times (B_1A_2B_3B_4)}{(A_1A_2B_3B_4)} = (B_1B_2B_3B_4).$$

b) Aceste egalități combinate cu (4) dau:

$$\frac{(A_1A_2A_3B_4)}{(A_1B_2B_3B_4)} \times \frac{(A_1A_2B_3A_4)}{(B_1A_2B_3B_4)} = \frac{(B_1A_2A_3A_4)}{(A_1B_2B_3B_4)} \times \frac{(A_1B_2A_3A_4)}{(B_1A_2B_3B_4)} = \frac{(A_1A_2A_3A_4)}{(B_1B_2B_3B_4)} \tag{5}$$

c) Din relația precedentă se deduce, între cele 8 puncte coliniare, următoarea, remarcabilă pentru simetria ei:

$$\frac{(A_1A_2A_3B_4)}{(B_1B_2B_3A_4)} \times \frac{(A_1A_2B_3A_4)}{(B_1B_2A_3B_4)} \times \frac{(A_1B_2A_3A_4)}{(B_1A_2B_3B_4)} \times \frac{(B_1A_2A_3A_4)}{(A_1B_2B_3B_4)} = \left[\frac{(A_1A_2A_3A_4)}{(B_1B_2B_3B_4)}\right]^2 \tag{6}$$

d) Dacă între cele 8 puncte coliniare A_i , B_j ($i, j = 1, 2, 3, 4$), există relația:

$$(A_1A_2A_3A_4) = (B_1B_2B_3B_4),$$

urmează, din (6) și relația:

$$(A_1A_2A_3B_4) \times (A_1A_2B_3A_4) \times (A_1B_2A_3A_4) \times (B_1A_2A_3A_4)$$
$$= (B_1B_2B_3B_4) \times (B_1B_2A_3B_4) \times (B_1A_2B_3B_4) \times (A_1B_2B_3B_4). \tag{7}$$

C. IONESCU-BUJOR.

35. *Asupra Notei No. 43 din Anul XXXIX.* Relația (4) din acea notă:

$$S = 2(2R - r)/(\sec^2 \tfrac{1}{2} A + \sec^2 \tfrac{1}{2} B + \sec^2 \tfrac{1}{2} C),$$

nu este exactă nefiind nici omogenă. Având în vedere Nota No. 26 din Anul XXXVIII a D-lui V. THÉBAULT, am putea-o înlocui cu:

$$S = 2r(2R - r) \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C / \sin^2 \tfrac{1}{2} A + \sin^2 \tfrac{1}{2} B + \sin^2 \tfrac{1}{2} C).$$

De asemenea (10):

$$S = \Sigma a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A / \Sigma \sec^2 \tfrac{1}{2} A,$$

nu este exactă. Ea devine exactă înlocuind numărătorul cu

$$\Sigma bc \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A.$$

PANAIT C. MAZILU.

36. *Asupra problemei 4271.* Prin acea problemă, rezolvată la pag. 197, se cerea cazul când $(a^4 - b^4)$ se divide cu $(a^3 - b^3)$. Să ne propunem a generaliza chestiunea pentru expresiuni analoage cu exponenți consecutivi, adică să examinăm când:

$$(1) \qquad a^n - b^n = \mathfrak{M}(a^{n-1} - b^{n-1}).$$

Dacă d este cel mai mare comun divizor al lui a și b și dacă punem $a = d\alpha$ și $b = d\beta$ se găsește pe aceeași cale că dacă:

$$a = k\alpha(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}),$$

$$b = d\beta(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-3} - \beta^{n-2})$$

atunci condiția (1) este satisfăcută.

EUGEN VIȘA; PANAIT C. MAZILU.

BIBLIOGRAFIE

Mathematica. Vol. IX. 1935. Cluj. Al doilea Congres al Matematicianilor români. Turnu-Severin, 5—9 Mai 1932: Organisation du Congrès; Rapport financier du Congrès; Liste des délégués officiels. Séance solennelle d'ouverture: Discours des Mrs G. TZITZÉICA; D. POMPEIU, G. IONESCU SISEȘTI (Ministre de l'Agriculture), V. VÂLCOVICI, A. ERRERA, TCHAKALOFF, B. HOSTINSKY, Q. VETTER, P. MONTEL, A. DENJOY, MANDELBROJT, W. SIERPINSKY, S. KEMPISTY, F. LÉJA, J. KARAMATA, G. TZITZÉICA, C. POPOVICIU, G. BRATU, S. STOILOV, V. ALACI, P. SERGESCU. Bureau du Congrès et des 6 Sections. Réunions en dehors des Travaux scientifiques. Séance de clôture. Liste des Communications. Liste des membres du Congrès. Conférences: Sur quelques rapports nouveaux entre l'algèbre et la théorie des fonctions. P. MONTEL. Dernières recherches sur l'hypothèse du continu, par W. SIERPINSKY. Sur quelques applications de l'analyse infinitésimale à l'étude des phénomènes physiques discontinus, par B. HOSTINSKY. Sur le principe du tiers exclu, par A. ERRERA. Communications présentés au Congrès: Sur une propriété des fonctions arbitraires d'une variable réelle, par ST. RUZIEWICZ. Sur le caractère de divergence des séries orthogonales, par A. ZYGMUND. Une question concernant les fondements de la théorie des déformations continues, par W. WILKOSZ. Sur les fonctions partiellement continues, par STEFAN KEMPISTY. Une propriété topologique de la surface partout localement homéomorphe au plan euclidien, par S. NICODYM. Sur le principe de minimum, par O. NIKODYM. Sur les équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles, par T. POPOVICIU. Représentation d'une classe des séries par une intégrale, par M. PETROVITCH. Sur une application des polynomes de LEGENDRE, par S. SANIELEVICI

Sur les séries de TAYLOR des fonctions de deux variables réelles, par F. LÉJA Théorèmes sur la sommabilité exponentielle et d'autres sommabilités s'y rattachant, par J. KARAMATA. Sur les intégrales premières de l'équation $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, par T. WAWEWSKI. Sur un théorème de M. POMPEIU, par P. MONTEL. Quelques propriétés des fonctions polyharmoniques en corrélation avec certaines propriété des polynomes, par N. CIORĂNESCU. Nouvelle solution de l'équation de FREDHOLM dans un interval fermé, par C. POPOVICI. Extension des théorèmes de LIOUVILLE aux fonctions harmoniques d'ordre p, par M. NICOLESCU. Séries de „puissances harmoniques" dans un domaine borné, par M. NICOLESCU. Sur les produits de composition de deux ou de plusieurs fonctions, par B. HOSTINSKY. Sur les intégrales de l'équation métaharmonique à coéfficients imaginaires, par M. GHERMANESCO. Sur les couples de congruence stratifiables par famille de quadriques, par AL. PANTAZI. Sur un problème de géométrie infinitésimale, par A. ERRERA. Tétraèdre bordé de prismes droites, par V. THÉBAULT. Courbes sphériques, courbes d'ENNEPER et de M. TZITZEICA, par AL. NICOLESCO. Sur la stabilité des mouvements laminaires des liquides visqueux entre deux cylindres coaxiaux (mouvements de COUETTE), par A. ROSENBLATT. Ueber Anwendung einer geometrischen Darstellung auf Biometrie und Statistik, von K. F. VETUIANI. Note sur la corrélation, par C. C. TEODORESCO. Gyromètre par G. NANEŞ. Trois remarques sur l'histoire des mathématiques, par Q. VETTER. DIOPHANTE et EUCLIDE, par A. BIRKENMAYER. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynome et applications à la détermination de courbes de convergences de certaines séries de polynomes, par N. ABRAMESCO. Notes de la Rédaction.

G. BOULIGAND, CH. BRUNOLD, A. GRUMBACH, M. MORAND, P. SERGESCU, M. TABOURY, A. TURPAIN, L'Evolution des sciences physiques et mathématiques. Editeur Ernest Flammarion, (din *Bibliothèque de Philosophie scientifique).* Paris.

P. SERGESCU. Sur quelques aspects des mathématiques contemporaines. (Extrait du volume *«Actes, Conférences et Communications» du III-e Congrès International d'Histoire des Sciences,* tenu au Portugal en 1934). Lisboa 1935.

P. SERGESCU. Les Mathématiques dans le *Journal des Savants* I. 1865 — 1701. (Extras din *Osiris,* I, lanuarie 1936). Bruges 1936.

Numerus. Vol I. Caietele 9 şi 10. Februarie 1936. Bucureşti. SPIRU HARET. (Portretul matematic este extras din Discursul de recepţie la Academia Română de G. ŢIŢEICA). Géométrie du triangle par T. LALESCO.

M. GHERMANESCU. Sur le théorème de PICARD-BOREL. Paris. (Extras din *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure).*

M. GHERMANESCU. Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions algébroïdes. (Extras din *Bulletin de mathématique et de physique pures et appliquées de l'Ecole polytechnique «Roi Carol II» Bucarest).* Bucureşti 1935.

Instituto matematico Hispano-Americano. *Boletin del Seminario matematico*, dirigido por I. REY. PASTOR. Vol. IV. No. 17. Mai 1935. Buenos Aires. Asupra singularităţilor algebraico-logaritmice ale funcţiunilor analitice, de J. REY PASTOR. Hiperconvergenţa în integralele lui LAPLACE-Stieltjes, de SIXTO-RIOS. Serii de polinoame exponenţiale şi iperconvergenţa seriilor lui DIRICHLET de SIXTO-RIOS. Complemente la metoda lui GRÄFFE pentru deslegarea ecuaţiilor algebrice, de RICARDO SAN JUAN.

Ştiinţă şi Progres. Anul II. No. 9. Februarie 1936. Târgul-Mureş. Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, de V. ALACI. Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, de N. O. Z.

M. GHERMĂNESCU. *Curs de Algebră superioară,* pentru uzul elevilor şcoalelor tecnice superioare şi militare. Bucureşti 1936.

IOAN N. CONSTANTINESCU. *Table de logaritmi centezimali* cu 5 zecimale. Bucureşti 1935.

CERERI

Răspuns la cererea No. 249.

Cum ar fi mai bine să se zică : **patrat** *sau* **pătrat ?**

Intrebarea, ca toate cele puse de D-l prof. IONESCU este foarte interesantă. Nu mai puţin interesant ar fi răspunsul, dacă s'ar putea da cu precizie.

Poate l-am avea dacă ne-am adresa filologilor, în sensul că ni s'ar preciza care termen e *literar* şi care nu. După câte ştiu, se spune că primul termen ar aparţine subdialectului moldovean, iar al doilea subdialectului muntean. Cum acest din urmă subdialect, a avut favoarea — datorită împrejurărilor istorice — să fie decretat limbă literară, — cred că termenul din urmă ar obţine majoritatea voturilor.

In ce priveşte propunerea D-lui prof. IONESCU, de a profita de ambele cuvinte, pentru a deosebi figura geometrică de puterea a doua a unui număr, — deşi în principiu, o găsesc foarte bună, cred că nu ar putea da rezultatul urmărit, şi iată dece :

Eu, sau D-nii prof. COSTĂCHESCU şi TRANCU-IAŞI sau D-l ministru INCULEŢ (am cam lăsat modestia la o parte), noi toţi aceştia vom zice întotdeauna *patrat,* chiar dacă vom scrie *pătrat* — după cum spunem : *magar, tatar, pacat, vacar,* etc., în loc de *măgar, tătar, păcat, văcar.* Cred că acelaşi lucru îl susţin şi muntenii sau oltenii.

Prin urmare, dacă am ajunge să facem această deosebire, singurul folos ar fi... că s'ar da de lucru în plus profesorilor de curs secundar.

In afară de acestea, figura geometrică — *patratul,* — intervine de multe ori, pentru a face *intuibile* relaţiunile aritmetice. Astfel, în cazul particular citat de D-l prof. IONESCU, se spune: aria patratului construit pe diagonala unui patrat este egală cu îndoitul ariei patratului considerat. Ori, această *ilustrare,* a relaţiunilor aritmetice o facem, tocmai pentrucă suntem obişnuiţi să nu distingem aceste două cuvinte.

Pe de altă parte, denumirea de *patrat* sau *pătrat,* ce se dă puterii a doua a unui număr, este secundară, şi ea se justifică tocmai prin faptul că aria patratului (sau pătratului), se calculează ridicându-i latura la puterea a doua.

In concluzie, cred că aceste două cuvinte trebuesc lăsate să fie întrebuinţate, fără a face deosebire între ele.

CONST. SĂNDULACHE
(Băseşti-Bacău).

DIVERSE

Societatea Română de Matematici a ţinut următoarele şedinţe ordinare:

La 2 Martie. N. TEODORESCU: *«Asupra distribuţiei eforturilor interioare într'o placă plană»*, MIRON NICOLESCU: *«Funcţiuni biarmonice în spaţiul cu patru dimensiuni»*.

La 16 Martie. G. ŢIŢEICA: *«O clasă de elemente lineare»*. ALEX. GHIKA: *«Asupra prelungirii analitice»*.

Şedinţe cu caracter elementar

La 7 Martie. GH. GALBURĂ: *«Asupra unei teoreme a D-lui Profesor* POMPEIU», D. BARBILIAN: *«O proprietate generală a varietăţilor focale dintr'un fascicol de varietăţi pătratice omofocale»*.

La 28 Martie. N. MIHĂILEANU: *«Asupra formulelor fundamentale din Trigonometria rectilinie»*. M. MĂNESCU: *«Asupra unor proprietăţi ale cubicelor plane»*. N. CIORĂNESCU: *«Asupra mediei aritmetice-geometrice»*.

Sporirea Bibliotecii.

C. ALASIA. Alcune construzioni di geometria elementare. Palermo 1911
Donată de I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Due luoghin geometrici. Pavia 1911.
Donată de I. IONESCU, Inginer.

Post. G. ASAKI. Element de matematică. Partea I. Aritmetica. Iaşi 1843.
Donată de D-l Lt. AURELIAN STAN.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4227. *Să se demonstreze că.*

1°. *Intr'un cerc de rază* R *se pot înscrie o infinitate de triunghiuri* ABC, *în care bisectoarea unghiului* A *să fie şi mediană în triunghiul format de mediana* AM, *de înălţimea* AH *şi de segmentul* MH.

2°. *Fiind dată una din laturile triunghiului* ABC, *se poate construi triunghiul.*

3°. *Fiind dat unghiul* A *se poate rezolva triunghiul şi să se rezolve în cazul:*

$$R = 5\text{ m.} \quad \textit{iar} \quad A = 80^0.$$

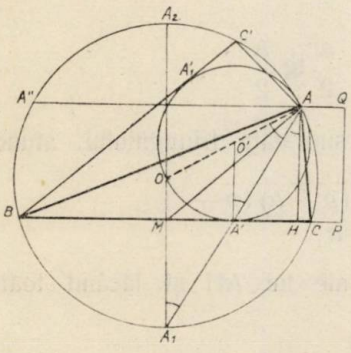
G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: C. N. AVRAM (S-LT din Geniu) şi D. D. MAVRODIN (Lic. M. Eminescu, Bucureşti).

1°. Fie A' piciorul bisectoarei unghiului A al unui triunghiu care răspunde problemei, deci $A'M = A'H$.

Fie încă O centrul cercului circumscris, O' mijlocul lui OA şi A_1 intersecţia lui O cu AA'.

Triunghiurile dreptunghice A'HA , A'MA, având catetele A'H, A'M egale şi unghiurile ascuţite egale, deci $AM_1 = AH$ şi atunci rezultă imediat construcţia unui triunghiu ABC în condiţiunile dela 1°. In cercul O de rază R se duce o coardă arbitrară BC pe care se construeşte diametrul perpendicular $A_1 A_2$.



Pe o perpendiculară la BC se ia lungimea PQ egală cu $A_1 M$. Paralela din Q la BC taie cercul în A şi A". Triunghiurile BAC şi BA"C răspund punctului 1°. Ele diferă numai prin poziţia lor

Cum coarda BC a fost aleasă arbitrar, se vor putea construi o infinitate de triunghiuri în condiţiunile 1°.

Când BC este diametru, vom avea un singur triunghiu ABC dreptunghic isoscel corespunzător unei poziţii a diametrului BC. Pentru acest triunghiu, cele 3 puncte M, A', H se confundă în O.

2^0. Vom deosebi două cazuri.

Cazul I, când se dă latura BC. Acest caz este tratat la 1^0.

Cazul II, când se dă una din celelalte laturi, de exemplu AB. Presupun problema rezolvată. Observăm că în trapezul AHMO linia O'A' unind mijloacele laturilor neparalele este paralelă cu AH şi OA_1, deci unghiurile O'A'A , OA_1A sunt egale. Triunghiul AOA_1 fiind isoscel rezultă că şi OA'A' este isoscel, deci $O'A' = O'A = O'O$ şi O' este centrul cercului OA'A şi cum $O'A' \perp BC$, cercul O' este tangent în A' dreptei BC.

De aici rezultă următoarea construcţie: Se duce în O coarda AB de lungime dată. Din B se duce tangenta BA' la cercul O' de diametru OA. Triunghiul ABC astfel obţinut răspunde enunţului. In adevăr prin construcţie $O'A' \perp BC$ şi egal cu $\frac{R}{2}$.

Rezultă $AA' = A'A_1$. Triunghiurile dreptunghice A'HA şi A_1MA' sunt deci egale, A' este mijlocul lui MH şi de oarece A_1 este mijlocul arcului BC, rezultă că AA' este şi bisectoara unghiului A.

Problema cere două soluţiuni distincte, corespunzătoare celor 2 tangente BC, BC' duse din B la O'.

Singura condiţie de posibilitate este $AB \leqslant 2R$.

3^0. Pe figură se vede că

$$AH = MA_1 = R - OD = R(1 - \cos A) = 2R \sin^2 \frac{A}{2}$$

şi înlocuind pe R în funcţia de a şi sinA, avem:

$$AH = a \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin A} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} .$$

Pe de altă parte, dacă S este suprafaţa triunghiului, atunci

$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} .$$

Egalând cele două expresiuni ale lui AH şi făcând toate calculele se găseşte

$$(1) \qquad b + c = a\sqrt{2}$$

care este relaţia de condiţie între laturile triunghiului dela 1^0.

Relația (1) îi corespunde, pentru unghiuri, relația

$$\sin B + \sin C = \sqrt{2}\,\sin A$$

care prin transformări devine:

$$(2) \qquad \cos\frac{B-C}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{A}{2} = \sqrt{2}\sin 40^0.$$

Cu ajutorul relațiunilor (1), (2) și al relațiunei

$$(3) \qquad \frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2} = 50^0$$

se rezolvă imediat triunghiul pentru cazul aplicațiunei numerice date.

Din (2) se scoate

$$\log\cos\frac{B-C}{2} = \bar{1},95858.$$

$$\therefore \quad \frac{B-C}{2} = 24^0\ 37'\ 40''$$

care cu (3) și cu datele enunțului dau

$$A = 80^0\ ;\ B = 74^0\ 37'\ 40''\ ;\ C = 25^0\ 22'\ 20'',$$

iar din relațiunile

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

se găsește

$$a = 9{,}848\ ;\ b = 9{,}642\ ;\ c = 4{,}187.$$

Foarte bune soluțiuni, cu rezultate numerice apropiate de acestea, dela D-nii: M. L. A. NEGREA (Brăila) și M. S. ZIFF.

PROBLEMA 4338. *Dacă între laturile unui triunghiu sferic avem:*

$$a + b + c = 180^0$$

atunci unghiurile aceluiași triunghiu sferic satisfac relația:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1.$$

GH. VASILIU.

Din prima condiție a problemei deducem :

$$b + c = 180^0 - a$$

deci :

$$\cos\frac{b+c}{2} = \sin\frac{a}{2} \quad \text{şi} \quad \sin\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2} .$$

Şi ținând seama de cunoscutele formule :

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\cos\dfrac{b+c}{2}}{\cos\dfrac{a}{2}} \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{şi} \quad \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\dfrac{b+c}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}} \sin\frac{\alpha}{2}$$

avem că :

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{şi} \quad \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2} .$$

In fine ultimele două egalități multiplicate ne dau :

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

de unde uşor se deduce că

$$\cos\beta + \cos\gamma = 1 - \cos\alpha$$

c. c. t. d.

Au rezolvat bine problema pe diverse căi D-nii: CEAUŞESCU F. VASILE, MAVRODIN DIMITRIE, NEGREA A. MIRCEA-LEONTE, SAVA C. IOAN, STĂNEŞTI M. şi D-nul STOICESCU TUDOR, care a mai stabilit — în condițiile problemei — şi următoarele două relațiuni :

$$\operatorname{tg}r_a \cdot \operatorname{tg}r_b + \operatorname{tg}r_b \cdot \operatorname{tg}r_c + \operatorname{tg}r_c \cdot \operatorname{tg}r_a = 1 + 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

şi

$$\operatorname{tg}r = \operatorname{tg}r_a \operatorname{tg}r_b \operatorname{tg}r_c$$

notațiunile fiind cele obişnuite.

GH. V.

PROBLEMA 4374. *Considerăm triunghiul* ABC *şi fie* A'B'C' *triunghiul său ortic şi* P *un punct arbitrar pe cercul* AB'C'. *Se proiectează punctul* P *în* α, β, γ *pe laturile triunghiului de referinţă şi în* α' β' γ' *pe laturile triunghiului ortic. Centrul cercului* $(\alpha'\beta'\gamma')$ *aparţine cercului* $(\alpha\beta'\gamma')$.

N. N. MIHĂILEANU.

Soluţie dată de D-l ILIE IOAN ŢIŢEICA (lic. «M-rea Dealu»).

Fie O' centrul cercului $\alpha'\beta'\gamma'$; avem:

$$\sphericalangle (O'\beta',\ O'\gamma') = 2 \sphericalangle (\alpha'\beta',\ \alpha'\gamma')$$

primul fiind unghiu la centru şi al doilea înscris în acelaş arc. Dar urmărind pe o figură patrulaterele inscriptibile $P\alpha'\beta'C'$ şi $P\alpha'\gamma'B'$

$$\sphericalangle (\alpha'\beta',\ \alpha'\gamma') = \sphericalangle P\alpha'\beta' + \sphericalangle P\alpha'\gamma' = \sphericalangle (PC',\ A'C') + \sphericalangle (PB',\ A'B')$$

şi din patrulaterul PB'A'C', ultima sumă egală cu suma celorlalte două unghiuri opuse B'A'C' şi B'PC'; însă primul e unghiu al triunghiului ortic deci suplimentar dublului unghiului BAC, iar B'PC' este egal cu BAC ca fiind înscris în acelaş cerc şi arc B'C'.

Rezultă că:

$$\sphericalangle (\alpha'\beta',\ \alpha'\gamma') = (AB,\ AC) \text{ şi } \sphericalangle (O'\beta'\ O'\gamma') = 2 \sphericalangle (AB,\ AC).$$

Pe de altă parte α, β', γ' sunt aşezate pe cercul de diametru A'P şi $\beta'\gamma'$ se vede din A' sub acelaş unghiu B'A'C' egal sau suplimentar unghiului din O', după cum P este desemnat între B'C' şi A', respectiv A.

Deci O' se află pe cercul $\alpha\beta'\gamma'$PA'.

Soluţie dată de D-l MARIUS MARGULIUS.

Considerăm triunghiul ortic ca element de referinţă; centrul cercului $\alpha'\beta'\gamma'$, podar al lui P, este la mijlocul O' al dreptei ce uneşte pe P cu isogonalul său P'; însă P se află pe cercul AB'C'H care — trecând prin două vârfuri şi două centre tritangente H şi A, este analagmatic în transformarea isogonală; P' se află deci pe acelaş cerc şi fiindcă A'P, A'P' sunt isogonale faţă de bisectoarea A'HA, care e şi diametru în cercul AB'C'H.

P şi P' sunt simetrice faţă de AH şi O' este proiecţia lui P pe AH, deci aparţine cercului de diametru PA', care mai trece şi prin α, β', γ'.

Observații. 1°. Soluția precedentă prezintă propoziția ca o aplicație a problemei 42. IX din Culegerea de Probleme de geometrie,

2°. D-l ION I. PETRESCU proiectează pe P în O′ pe înălțimea AA′ și demonstrează direct și foarte bine cu ajutorul patrulaterelor inscriptibile, că O′ este egal depărtat de α', β', γ'.

Din soluția D-sale se desprinde observațiile:

1. $\alpha\beta' = \alpha\gamma'$; 2. $\beta\alpha' = \beta\gamma'$; $\gamma\alpha' = \gamma\beta'$; 3. β, γ, α' sunt colineare ; 4. BB′ retaie cercul $P\alpha'\gamma'B'\beta$ în B_1 și CC′ retaie cercul $P\beta'\alpha'C'\gamma$ în C_1 ; βB_1 și γC_1 trec prin O′.

N. M.

PROBLEMA 4506. *Să se găsească în ce caz e adevărată egalitatea:*

$$\sin x + \sin y = \sin (x + y).$$

Aceeași chestiune pentru egalitatea:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} (x + y).$$

O. N. ȚINO.

Soluțiune dată de Domnii: MIRCEA A. NEGREA (Brăila); PANAIT C. MAZILU; CORNEL I. GHIȘOIU (Student București); CONST. N. GAVRILESCU (Bacău).

Transformând prima egalitate, avem succesiv:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \left(\cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) = 0$$

$$4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x+y}{2} = 0,$$

care are loc în următoarele trei cazuri:

a) $\sin \frac{x}{2} = 0$, deci $x = 2k\pi$, y *oarecare*

$(k = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \ldots ; \pm n ; \ldots)$

b) $\sin\frac{y}{2}=0$, deci $y=2k\pi$, x *oarecare*

$(k=0;\pm 1;\pm;,..)$

c) $\sin\frac{x+y}{2}=0$, deci $x+y=2\pi k$

$(k=0;\pm 1;\pm 2;...)$.

In acelaşi fel, transformând egalitatea a doua, avem succesiv :

$$\operatorname{tg}x\,.\,\operatorname{tg}y\left[1-\frac{1}{1-\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}y}\right]=0,$$

$$1-\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}y\neq 0\ ;\ \operatorname{tg}x\,.\,\operatorname{tg}y\,(\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y)=0,$$

care are loc în următoarele trei cazuri:

a) $\operatorname{tg}x=0$, deci $x=k:$, y *oarecare*

$(k=0;\pm 1;\pm 2;...)$

b) $\operatorname{tg}y=0$, deci $y=k\pi$, x *oarecare*

$(k=0;\pm 1;\pm 2;...)$

c) $\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(-y)$, $(1-\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}y=1+\operatorname{tg}^2y>0$ pentru valori reale), deci

$$x-y+k\pi,$$

sau încă :

$$x+y=k\pi$$

$(k=0;\pm 1;\pm 2;...)$.

Observare. Celelalte soluţiuni primite sunt sau incomplete sau conţin erori care le-au anulat.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4584. a, b, c *fiind numere reale date, să se arate că, dacă* $b^2-4ac>0$, *ecuaţiunea :*

$$acx^5+(ab+ac+bc)x^4+(a^2+b^2+c^2+ab+bc)$$
$$x^3+(a^2+b^2+c^2+ab+bc)\,x^2+(ab+ac+bc)\,x+ac=0$$

are toate rădăcinile sale reale.

Cum sunt rădăcinile acestei ecuaţiuni dacă $b^2-4ac=0$.

O. N. Ţino.

Soluțiune dată de D-nii: MIRCEA L. A. NEGREA (Brăila); NIC. N. ROȘCULEȚ, AL. D. STOICA (elev liceul «Marele Voevod Mihai»).

Ecuațiunea dată fiind reciprocă de grad impar și termenii corespunzători de acelaș semn, admite rădăcina — 1, celelalte patru fiind două câte două una inversa celeilalte, adică

$$x_1 \ , \ x_2 = \frac{1}{x_1} \ , \ x_3 \ , \ x_4 = \frac{1}{x_3} \ .$$

Dacă însemnăm cu:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \qquad (1)$$

ecuațiunea care admite rădăcinile x_1 și x_3, ecuațiunea care admite rădăcinile $\frac{1}{x_1}$ și $\frac{1}{x_3}$ este transformata ecuațiunii (1) când înlocuim pe x prin $\frac{1}{x}$, adică:

$$\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0. \qquad (2)$$

Produsul trinoamelor ecuațiunilor (1) și (2) trebuie să fie egal cu câtul obținut împărțind polinomul ecuațiunii date la $(x + 1)$, adică:

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)(\gamma x^2 + \beta x + \alpha) \equiv acx^4 + (ab + bc)$$

$$x^3 + (a^2 + b^2 + c^2) x^2 + (ab + bc) x + ac,$$

deci

$$\alpha\gamma = ac \ , \ \beta(\alpha + \gamma) = b(a + c) \ , \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

care sunt satisfăcute dacă luăm:

$$\beta = b \ , \ \alpha = a \ , \ \gamma = c.$$

Așa dar, ecuațiunea dată se descompune în trei ecuațiuni:

$x + 1 = 0$ (I) ; $ax^2 + bx + c = 0$ (II) și $cx^2 + bx + a = 0$ (III),

iar (II) și (III) au rădăcinile reale dacă $b^2 - 4ac > 0$.

In cazul când $b^2 - 4ac = 0$, ecuațiunea dată are două rădăcini duble, una inversă celeilalte.

Observare. Au rezolvat problema urmând procedeul de rezolvare a unei ecuațiuni reciproce, D-nii: GR. MARTEȘ (Șc. Navală, Constanța), EUGEN MARCOVICI (Iași), CĂLIN AL. BURSAN și ILIE C. BOROȘ (Lic. Militar Iași), MERBL A. IOSIF (Student Cluj), VASILE CEAUȘESCU (Lic. Militar Tg.-Mureș) și D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU (Lic. Carmen Sylva, Timișoara).

O. N. Ț.

PROBLEMA 4617. *Să se reconstruiască triunghiul* ABC *măsurându-i înălțimile* $\overline{AA'}$, $\overline{CB'}$ *și unghiul* ABC.

O. N. ȚINO.

Să presupunem, că unghiul măsurat ABC nu este unghiu drept. Construim un unghiu a_1bc_1 egal cu unghiul ABC al triunghiului considerat și astfel ca printr'o rotație care aduce bc_1 paralelă și de același sens cu latura BC a triunghiului considerat, să avem unghiul a_1bc_1 de aceeași orientare cu aceea a unghiului ABC. Observând acum că locul vârfului a, față de dreapta bc_1, pe care urmează să fie așezată baza bc se compune din două drepte Δ_a și Δ'_a paralele cu bc_1 și la distanța $\overline{AA'}$ fiecare de bc_1, iar locul vârfului c, față de dreapta ba_1, se compune din două drepte Δ_c și Δ'_c paralele la ba_1 și la distanța $\overline{CC'}$ fiecare de ea; urmează deci că problema are două triunghiuri soluțiuni, care se suprapun unul altuia printr'o mișcare de rotație de 180^0 în jurul vârfului comun b.

In cazul când unghiul ABC este unghiu drept, înălțimile măsurate sunt chiar catetele triunghiului dreptunghiu ABC.

Au rezolvat problema D-ra ALEXANDRA AL. VASILESCU și D-nii: AL. D. STOICA, D. ARDELEANU, ȘTEFAN M. MOISOVICI (Colegiul Carol I Craiova), C. N. GAVRILESCU (Bacău), CERCELARU GR. D-TRU, M. L. A. NEGREA, IOAN GR. BOGDAN, IOAN C. DIMITRIU, NĂSTASE MARIN (Lic. Militar «N. Filipescu»), IOSIF A. MERBL (Cluj).

O. N. Ț.

PROBLEMA 4623. *Ştiind că* x_1 *şi* x_2 *sunt rădăcinile ecuaţiei:*

$$x^2 - mx + 2 = 0$$

să se determine m *astfel încât să avem:*

$$x_1^3 + x_2^3 > m^2 .$$

MAIOR I. LINTEŞ.

Soluţie dată de D-nii: CHIRIŢĂ M. MIHAIL (Şcoala Ofiţeri Marină Constanţa), GHIŞOIU I. CORNELIU (Student Matematici Bucureşti), IOSIF A. MERBL (Student Cluj), BAL LASCU, NICOLAE ŞTEFĂNESCU (Lic. Militar N. Filipescu), ION LITINSKI şi CONST. GAVRILESCU (Bacău).

Avem:

$$x_1 + x_2 = m \quad \text{şi} \quad x_1 \cdot x_2 = 2$$

deci:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$= m^3 - 6m.$$

Trebue să avem:

$$m^3 - 6m > m^2.$$

sau:

$$m^3 - m^2 - 6m > 0$$

$$\therefore \quad m(m-3)(m+2) > 0.$$

Cu alte cuvinte acest produs de trei factori va fi positiv numai când:

— toţi factorii sunt pozitivi;

— unul pozitiv şi doi negativi;

Analizând aceste condiţii, găsim numai cazurile când:

$$m > 3 \quad \text{sau} \quad -2 < m < 0.$$

Alte soluţii date de D-nii: BUCUR N. VIRGIL, P. P. COJOCARU, D. CERCELARU, M. POPESCU, D. STOICA, A. CORNĂŢEANU, M. GOLDENBERG, I. BOROŞ, P. DOBRESCU, N. TĂTARU, I. BOGDAN, I. D. ENACHE şi ROŞCULEŢ.

Celelalte soluţiuni au avut greşeli, sau au fost incomplecte.

S'au mai primit soluţii dela: D-ra ALEXANDRA VASILESCU şi D-nii: C. CHIRIAC, V. FLORESCU, M. NEGREA, GH. SILAŞ şi I. STREDER.

PROBLEMA 4624. *Să se calculeze suma.*

$$1+2(1+2)+3(1+2+3)+\ldots+n(1+2+3+\ldots+n).$$

V. THÉBAULT.

Soluție și *generalizare,* date de D-l E. VIȘA (Profesor, Blaj).

Fie $a_1, a_2, \ldots a_n$ termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice de rație r. Ne propunem să calculăm suma

$$S = a_1 + a_2(a_1+a_2) + a_3(a_1+a_2+a_3) + \ldots + a_n(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Se observă că termenul de rang i al lui S este

$$u_i = a_i(a_1+a_2+\ldots+a_i) = a_i \times \frac{[2a_i+(i-1)r]\,i}{2}$$

sau înlocuind pe a_i prin egalul său $a_1+(i-1)r$ și făcând toate calculele

$$u_i = \frac{r^2i^3 + r(3a_1-r)\,i^2 + (r-a_1)(r-2a_1)\,n}{2}.$$

Dând lui i valorile dela 1 la n inclusiv, notând cu

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

și adunând se obține

$$2S = r^2S_3 + r(3a_1-2r)\,S_2 + (r-2a_1)(r-a_1)\,S_1.$$

Pentru cazul particular al problemei 4624 avem

$$a_1 = r = 1$$

$$S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\therefore\ S = \frac{S_2+S_3}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$$

Au rezolvat foarte bine problema în cazul particular al enunțului, D-șoara VASILESCU A. ALEXANDRA Clasa VI (Liceul Carmen Silva, Timișoara), și D-nii: NEGREA A. L. M. (Brăila); MERBL A. I., SILAȘ G. (studenți, Cluj); AMĂRĂȘTEANU F. M. (Liceul Fr. Buzești, Craiova); COJOCARU P. P. (Piatra Neamț); CHIRIAC I. C. (Școala Navală); COTESCU C. (Bacău); CHIRIȚĂ M. (Școala ofițeri de marină, Constanța); GHIȘOIU I. C. (Student, București); NĂSTASE M., ȘTEFĂNESCU D. N. DOBRESCU P., ȚIȚEICA I. I. (Liceul militar, N. Filipescu); GOLDENBERG E. M. (Liceul Marele Voevod Mihai, București); PETRESCU I. I., ȚARINĂ N., BUCUR N. V., CORNĂȚEANU I. A., CĂLIN I. C. D. ENACHE D. I., BOGDAN GR. I. (Liceul militar Iași); ROȘCULEȚ N., LASCU B., CĂLINESCU A. (Roșiorii de Vede).

Soluție bună dela D-l GR. MARTEȘ (Constanța).

In ultimul timp s'a primit o foarte bună soluție și generalizare dela D-l O. S. IANCULESCU (Timișoara).

EXERCIȚII

19. Se cere locul ortopolului w al diametrului cercului fix circumscris triunghiului ABC — trecând prin A — când BC e fixă și A variabil.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Fie A' piciorul înălțimii din A; B_1, C_1 proiecțiile vârfurilor B, C pe diametrul AO; B', C' proiecțiile punctelor B_1, C_1 pe AC, AB

$$\sphericalangle AB_1B' = 90^0 - \overset{\frown}{CAO} = \hat{B}\ ;\ \sphericalangle AB_1A' = 180^0 - \hat{B},$$

deci A', B_1, B' sunt colineare; ortopolul diametrului este A' și locul lui w este dreapta BC.

20. In două triunghiuri ABC și $A_1B_1C_1$, care au câte 2 laturi egale, iar unghiul A este complementul jumătății lui A_1, să se demonstreze că avem relația:

$$\frac{a^2 - a_1^2}{4bc} = \left(1 + \sin\frac{A}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \sin\frac{A}{2}\right).$$

PETRE MIRESCU.

R. Ținând seama de relațiile:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A_1$$

și

$$A_1 = 90 - \frac{A}{2}$$

relația din enunț apare imediat.

21. Fie A', B', C' proiecţiile de unghiu φ ale vârfurilor triunghiului ABC pe dreaptă Δ din plan. Paralelele duse prin A', B', C' respectiv la BC, CA, AB determină triunghiul $\omega_a\ \omega_b\ \omega_c$, al cărui cerc circumscris trece prin izopolul ω de unghiu φ al dreptei Δ faţă de ABC.

I. I. ŢIŢEICA.

R. Proiectantele de unghiu $(\pi - \varphi)$ ale punctelor A', B', C' pe BC, CA, AB sau $\omega_b\ \omega_c$, $\omega_c\ \omega_a$, $\omega_a\ \omega_b$ sunt concurente în ω. După reciproca generalizării dată de CARNOT teoremei lui SIMSON deducem că ω aparţine cercului $(\omega_a\ \omega_b\ \omega_c)$.

Pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$ obţinem o proprietate analoagă pentru ortopol.

22. Să se arate că în orice triunghiu avem relaţia:

$$(S - a\,R\,\cos A)\,\operatorname{cotg} A = (S - b\,R\,\cos B)\,\operatorname{cotg} B = (S - c\,R\,\cos C)\,\operatorname{cotg} C$$

notaţiile fiind cele obişnuite.

CEZAR IVĂNESCU.

R. Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad , \quad a = 2R \sin A \text{ etc.},$$

putem scrie succesiv:

$$S - aR\cos A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C - 2R^2 \sin A \cos A$$

$$= 2R^2 \sin A\,(\sin B \sin C - \cos A) = 2R^2 \sin A\,[\sin B \sin C + \cos (B + C)]$$

$$= 2R^2 \sin A\,[\sin B \sin C + \cos B \cos C - \sin B \sin C] = 2R^2 \sin A \cos B \cos C.$$

Deci

$$(S - aR\cos A)\operatorname{cotg} A = 2R^2 \sin A \cos B \cos C \frac{\cos A}{\sin A} = 2R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Analog avem:

$$(S - bR\cos B)\,\operatorname{cotg} B = 2R^2 \cos A \cos B \cos C$$

$$(S - cR\cos C)\,\operatorname{cotg} C = 2R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Prin urmare:

$$(S - aR\cos A)\,\operatorname{cotg} A = (S - bR\cos B)\,\operatorname{cotg} B = (S - cR\cos C)\,\operatorname{cotg} C$$

şi relaţia cerută este astfel stabilită.

23. Dacă: r, t, n, θ sunt; raza vectoare, subtangenta, subnormala şi unghiul ce-l face raza vectoare cu ox, să se determine curbele pentru care se au respectiv:

$$(1) \qquad \frac{2}{r} = \frac{1}{n} - \frac{1}{t} \quad , \quad (2) \quad \frac{n}{t} + 4\theta^2 = 0.$$

HARALAMB P. IONESCU-BISS.

R. Dacă pentru curbă avem ecuaţia:

$$\rho = f(\theta)$$

atunci se are:

$$r = f \quad , \quad n = f' \quad , \quad t = -\frac{f^2}{f'}$$

deci din (1) avem:

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{f'} + \frac{f'}{f^2} \qquad \therefore \quad f = f'$$

care ne arată că pentru (1) avem curba:

$$\rho = f(\theta) = e^{\theta}$$

o spirală logaritmică.

Pentru a doua se are analog:

$$\frac{\varphi'}{-\frac{\varphi^2}{\varphi'}} + 4\theta^2 = 0 \qquad \therefore \quad \varphi' = \pm 2\vartheta\varphi$$

deci pentru această avem ecuaţia:

$$\varphi = e^{\pm \theta^2}.$$

Pentru (2) în general putem avea:

$$\frac{n}{t} + m^2\theta^{2(m-1)} \qquad \therefore \quad \varphi = e^{\pm \theta^m}.$$

24. Să se rezolve ecuaţia funcţională:

$$f^m(x) - f^{m_1}(x+y) f^{m_2}(x-y) = 0.$$

HAR. IONESCU-BISS.

R. Făcând $y = 0$ se vede că trebue să avem:

$$m = m_1 + m_2.$$

Făcând $y = \pm x$ se are:

$$f^{m_1}(x) = f^{m_1}(2x)\, f^{m_2}(0) \quad ; \quad f^{m_1}(x) = f^{m_1}(0)\, f^{m_2}(2x)$$

$$\therefore \quad f^{m_1 - m_2}(2x) = f^{m_1 - m_2}(0)$$

şi eliminând soluţia $f(x) = \text{const.}$ avem:

$$m_1 = m_2 \quad \therefore \quad m = 2m_1 = 2n$$

şi ecuaţia devine:

$$f^{2n}(x) = f^n(x + y)\, f^n(x - y)$$

sau pentru

$$f^n(x) = \mathrm{F}(x)$$

se are:

$$\mathrm{F}^2(x) = \mathrm{F}(x + y)\, \mathrm{F}(x - y) \tag{1}$$

ecuaţie rezolvată în „G. M". — XXXII — 283, şi se are ca relaţie:

$$f(x) = ce^{kx}$$

soluţie ce s'ar vedea imediat făcându-se în (1) $y = x$; apoi $x = 0$.

PROBLEME PROPUSE

4651. Anul naşterii savantului francez AMPÈRE se scrie numai cu cifre neperechi, iar la anul morţii, numărul format de ultimele două cifre este dublul numărului format de primele două. Numărul anilor pe care i-a trăit se obţine scriind prima cifră a anului morţii după ultima cifră. In ce an a fost centenarul morţii lui?

ION IONESCU.

4652. Care este cea mai mică bază de numeraţie în care există un pătrat perfect de patru cifre astfel încât

$$aabb = (cd)^2,$$

unde a, b, c, d sunt cifre consecutive, iar $d < a < b < c$?

V. THÉBAULT.

4653. Să se găsească, *numai cu ajutorul compasului,* pe un cerc dat vârfurile unui pătrat.

GH. BASACOV.

4654. Fie MN un diametru fix al cercului O şi A un punct dat pe acest cerc. Să se construiască un triunghiu isoscel ABC, care are un vârf în A, un vârf într'un punct B (care urmează să fie găsit pe cercul O) şi al treilea vârf C, în proiecţia lui B pe MN.

G-L. GH. BUICLIU.

4655. O paralelă la latura BC a triunghiului ABC, taie laturile AC şi AB în E şi F. Punctele A', B', C' fiind mijloacele laturilor triunghiului ABC, centrul radical al cercurilor ABC, BB'E şi CC'F este aşezat pe mediana AA'.

N. N. MIHĂILEANU.

4656. Fie B_0 şi I punctele de intersecţie a două cercuri date. O dreaptă dată ce trece prin B_0 le taie în A_0 şi C_0. Se ia un punct oarecare B pe cercul A_0IC_0. Dreapta A_0B taie cercul A_0B_0I în C, iar CB_0 taie cercul B_0C_0I în A. Să se arate:

1°. Dreapta BA trece prin C_0;

2°. Triunghiul ABC rămâne asemenea cu el însuşi, iar laturile sale trec prin trei puncte fixe A_0, B_0, C_0 coliniare;

3°. Cercul circumscris triunghiului ABC trece prin I.

4°. Tangentele în A, B, C la cercurile B_0IC_0, C_0IA_0, A_0IB_0 se taie în acelaş punct M pe cercul ABCI.

N. ABRAMESCU.

4657. Să se arate în ce caz punctele interioare unui cerc de rază R, unde se taie laturile celor două triunghiuri isoscele ce se pot înscrie în acest cerc de rază R şi circumscrise unui cerc de rază r, sunt situate pe un cerc.

L-T. C. IONESCU-ŢIU.

4658. Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu, avem relația :

$$\frac{\cos(B-C)}{\cos A}+\frac{\cos(C-A)}{\cos B}+\frac{\cos(A-B)}{\cos C}+2 = \frac{\cos(B-C)\cos(C-A)\cos(A-B)}{\cos A\cos B\cos C}$$

GH. D. SIMIONESCU.

4659. A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, să se stabilească egalitatea

$$\Sigma(\sin^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C)(\sin^2 B+\cos^2 A-\cos^2 C) = 4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C.$$

C. IONESCU-BUJOR.

4660. Să se calculeze următoarele două sume

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(p+i)\sin(\alpha+ih) \text{ și } \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(p+i)\cos(\alpha+ih).$$

GH. VASILIU.

4661. Să se găsească valoarea lui m și apoi să se rezolve ecuația :

$$x^5-25x^4+mx^3-950x^2+1689x-945=0$$

știind că are rădăcinile în progresiune aritmetică.

L-T. C-DOR GH. NICULESCU.

4662. Să se demonstreze că între patru soluțiuni particulare ale ecuației diferențiale

$$(1)\qquad y'=A\sin y+B\cos y+C,$$

în care A, B, C sunt funcțiuni de x, există relațiunea

$$(2)\qquad \frac{\sin\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y_1-y_4}{2}\right)}:\frac{\sin\left(\frac{y_3-y_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y_3-y_4}{2}\right)}=\text{Const.}$$

2. Să se determine o schimbare de funcțiune $u = f(y)$, care să transforme ecuația dată într'una de tip RICCATI.

3. Să se arate că, reciproc, ecuațiunea cea mai generală de tip RICCATI se poate transforma în una de forma de mai sus (1).

4. Să se integreze complet ecuațiunea (1) în cazurile

$$B \pm C = 0.$$

M. GHERMĂNESCU.

RECTIFICARE. La soluția problemei Nr. 3368 din Vol. XLI, se vor face următoarele rectificări:

p. 244 la enunț; p. 245 rândurile 2, 14, 19; p. 246 rândul 4, se va pune $2p$ în loc de 2_p.

p. 244 rândul 1 de jos; p. 245, rândurile 2, 4, 6, 16, 19; p. 246 rândul 2, se va pune

$$\binom{m}{n}, \binom{2i}{2p}, \binom{2p}{i}, \binom{2i}{2p}, \binom{2x}{2p}, \binom{-2p-1}{2p}, \binom{-2p-1}{2p}, \binom{-2p-1}{2p},$$

în loc de

$$\binom{m}{n}, \binom{2i}{2p}, \binom{2p}{i}, \binom{2i}{2p}, \binom{2x}{2p}, \binom{-2p-1}{2p}, \binom{-2p-1}{2p}, \binom{-2p-1}{2p}$$

respectiv.

ERATĂ. I. In N-rul precedent al G. M. se fac următoarele rectificări:

1°. Pag. 380 nota de jos: *poligoane* în loc de *polinoame.*
2°. „ 387 mijloc: $f > a$, $fg > ab$ în loc de $f < a$, $fg < ab$.
3°. „ 388 „ : $3 \times 1cde$ în loc de $1 + 1cde$.
4°. „ 398 jos: *minimul* în loc de minusul.

II. In articolul *«Asupra unor configurații de puncte colineare»* publicat la pag. 375, relația (5) dela pag. 377, apărută fără membrul II, se completează astfel: „ $= O^n$.

III. La problema propusă cu Nr. 4648 (din No. 7) relația trebue citită astfel:

$$a^2 \geqslant \frac{b^2}{ch^2 x} - \frac{c^2}{sh^2 x}.$$

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Apostol R. (4460, 552, 82, 95); *Baumgartner I.* (4584); *Bogdan Gr. I.* (4422, 617); *Călinescu D.* (4549, 624); *Călinescu Paraschiva* (4632); *Cercelaru D.* (4599); *Costescu C.* (4617); *Dimitriu C. I.* (4422, 617); *Drăghicescu Iancu* (4585); *Eckstein Virgil* (4575, 94, 95, 621, 26, 43); *Enache D. I.* (4525); *Florescu L. V.* (4460, 518); *Ionescu Constanța* (4632); *Ianculescu O.* (3090, 300, 439, 72, 4509, 624, N, P); *Lascu Bal* (4617, 22, 37, 48); *Leahu D.* (4485, 524); *Leuco I.* (4532); *Marcovici E.* (4568, 99, 626); *Marteș Gr.* (4190, 232, 38, 48, 378, 471, 82, 85, 94, 504, 05, 07, 20, 24, 44, 70, 73, 85, 99, 600, 22, 24, 37); *Merbl I.* (4584, 85, 99, N); *Mihăilescu A.* (4422, 582); *Moisovici Șt.* (4554, 635); *Negrea M. L.* (1342, 3692, 4413, 617, 32, 37, 38, 46, 49); *Postelnicescu C. M.* (4394, 518); *Roșculeț N.* (4584); *Ștefănescu D. N.* (4460, 552, 55, 56, 95); *Stoicescu T.* (4410, 85, 504, 18, 24, 42, 56, 60, 70); *Streder I.* (4544, 82); *Teișanu C. S.* (4519, 20); *Țițeica I.* (4394, 518, 57, 620, 24); *Vasilescu A. Alexandra* (4584, 617); *Vasiloschi F.* (4582).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât și cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii și nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeași foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 . . . . . Lei 30

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

La aceste preţuri se vor adăogà taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa:

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN.**

C. 41047

1935/36

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 9. — MAI 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. Rezultatele concursului „Gazetei Matematice" *G. Țițeica.*
2. Scrierile matematice ale lui Gheorghe Lazăr (urmare) . . . . . *Victor Marian.*
3. Conicele de ramificare a trei conice în fascicol *D. Barbilian.*
4. Asupra problemelor 1386 și 2889 . . . . *M. Ghermănescu.*
5. Asupra unui triunghiu special . . . . . *Ilie Ioan Țițeica.*
6. Note Matematice: 37 — 38.
7. Chestiuni de examen.
8. Bibliografie.
9. Cereri: 256.
10. Diverse.
11. Probleme rezolvate: 1734, 3335, 3563, 4375, 4379, 4383, 4497, 4512.
12. Exerciții: 25 — 31.
13. Probleme propuse: 4663 — 4674.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea **„Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 89, 522, 23, 24, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 17, 26, 38, 45, 49, 52, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 79, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 98, 500, 03, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 30, 31, 33, 34, 47, 50, 58, 59, 61, 76, 78, 80, 83, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 96, 98, 601, 02, 03, 05, 07, 12, 13, 15, 18, 28, 30, 36, 40, 41, 45, 47, 50, 57, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *„Gazeta Matematică"* cu preţul de 12 lei.

„SPHINX“

REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE

DANS LE MONDE ENTIER

ABONNEMENTS 1 AN: BELGIQUE, 35 FR.; FRANCE, 25 FR.

ETRANGER, 10 BELGAS

ADMINISTRATION:

„SPHINX“, 75, Rue Philippe Baucq

R. C. 51922 Tel: 33.48.58

Ch. postaux { Bruxelles No. 192338 / Paris No. 160061

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 200 LEI

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 100 LEI

Director: Dr. I. BAIDAFF

SUNT CELE MAI IMPORTANTE REVISTE PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD, PUBLICATE ÎN BUENOS-AIRES

SE PRIMESC ABONAMENTE LA

„GAZETA MATEMATICĂ“, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLI *SUPLIMENT* No. 9

MASA DE SĂRBĂTORIRE A CELOR 40 ANI AI „GAZETEI MATEMATICE“

Istorica zi a sărbătorirei celor 40 ani de existență și de regulată apariție a *Gazetei Matematice,* când a avut loc o ședință solemnă în prezența M. S. REGELUI la Fundația Carol I, apoi o ședință festivă la Școala Politehnică, s'a terminat cu o bine meritată masă, pe care membrii, foști corespondenți, corespondenții și prietenii *Gazetei Matematice,* au luat-o împreună la Restaurantul Splendid Parc, în seara zilei de 17 Decembrie 1935.

Numărul comesenilor a fost foarte mare și — pentru prima oară — *Gazeta Matematică* a fost onorată de către sexul frumos, reprezentat prin Doamnele: ALEXANDRESCU, BUNESCU, CHIȚULESCU, CRISTESCU, IOANOVICI, MIRCEA, VASILACHE, VASILIU și D-rele: BUNGEȚEANU și ROMAN.

Iată și lista Domnilor prezenți:

V. ALACI, N. ABRAMESCU, E. ABASON, C. ANTONIU, A. BUNESCU, PROFESOR BALABAN, LT. I. BUCURESCU, I. BUȘILĂ, A. BRENER, G-L G. BUICLIU, V. BRUCKNER, L. BĂDESCU, D. CAMBUREANU, V. CAMBUREANU, I. I. CHIȚULESCU, G. CĂLIN, I. CHIȚULESCU (junior), G-L I. DEMETRESCU, B. ARG. DUMITRESCU, U. FLORESCU, G. FILIPESCU, LT. FOCȘENEANU, M. HANGAN, GH. T. GHEORGHIU, N. N. GEORGESCU, R. GABRIELESCU, MAIOR GHIMUȘ, PROFESOR GOROVEI, N. I. GEORGESCU, T. GÂLCĂ, ING. GUȚU, M. GHERMĂNESCU, I. IONESCU, A. GH. IOACHIMESCU, LT. IONESCU-ȚIU, GH. ILIESCU, D. V. IONESCU, GH. IOACHIMESCU, AL. IONESCU, A. IOANOVICI, R. IANCULESCU, H. IONESCU-BISS, MAIOR LINTEȘ, COL. GH. LITEANU, N. MIHĂILEANU, CR. MATEESCU, C. MALCOCI, CL. MITITELU, N. MUREȘANU, GH. NICHIFOR, AL. NICOLESCU, CR. NICULESCU, O. ONICESCU, GR. ORĂȘANU, A. PÂRVU, AL. PANTAZI, GR. PATRICIU, V. POPESCU, R. RACLIȘ, T. REVICI, AL. ROȘU, G.

D. SIMIONESCU, D. STAN, A. SMÂNTÂNESCU, P. SERGESCU, M. SARIAN, M. SALIGNY, D. STOICA, I. STAMATESCU, G. I. STAMATESCU, STAMATESCU (junior), G. THIERRIN, C. TEODORESCU, I. TOMESCU, CH. ȚIȚEICA, O. ȚINO, AL. ULESCU, I. VARDALA, GR. VASILESCU, I. VASILACHE, GH. VASILIU, M. VASILIU, A. VICIU, D. VASILIU, C. VIȘOIANU, GR. ZAMFIRESCU, N. ZAHARIA, CD. GR. ZAPAN.

Au trimis scrisori și telegrame, regretând că nu pot lua parte a această masă și făcând urări *Gazetei Matematice,* D-na V. I. D. TEODOR, D-nii: B. BAIDAFF, C. BUȘILĂ, M. MANOILESCU, V. TEODOREANU și alții.

După marele număr de comeseni am credința că aproape tot ce este matematic în această țară, se adunase acolo în acea memorabilă seară. Puțini x — și , y — ci, sau alte simboluri matematice, au mai rămas disponibile și în afară de acea adunare. Desigur că a fost cea mai săracă seară de matematici atunci, Gazeta adunând în jurul ei aproape pe toți matematicienii, lipsind astfel de: formule, ecuații, cifre, triunghiuri, conice, etc.... etc.... atâtea mese și mesuțe, unde în singurătate matematicienii își deapănă știința. Câtă hârtie albă și câte creioane nu s'au economisit în acea seară! Câte tratate de matematici vor fi rămas triste, părăsite de adoratorii lor, îngrozite la gândul — ferească Dumnezeu — al unei greve! Dacă ar fi știut ele că tocmai o colegă a lor, *Gazeta Matematică,* le-a făcut această teribilă figură, desigur..... Dar nu! nu! a doua zi, ștergându-și lacrămile, tratatele de matematici au aflat — spre marea lor mulțumire — că s'au speriat degeaba, matematicienii nu fuseseră în realitate, decât la sărbătorirea celor patruzeci de ani ai prea onorabilei Doamne *Gazeta Matematică.*

* * *

O sinceră atmosferă de cordialitate a stăpânit cu exces toată seara. Iubitori ai matematicilor din toată țara se adunaseră, nu să cerșească «voturi», nu în căutare de «partizani politici», nu să sărbătorească vre-un «oficial» și nici să-și desvălue talentele oratorice, se adunaseră acolo să proslăvească o formidabilă *muncă,* desfășurată zi de zi, timp de patruzeci de ani și sintetizată în aceste două cuvinte: **Gazeta Matematică.**

Ce înălțătoare atmosferă sufletească dăinuia în acea seară, între acei oameni, cari poate pentru prima oară se vedeau, dar cari

își strângeau mâna ca și cum s'ar fi cunoscut de zeci de ani. Și așa era, căci în fiecare retrăia spiritul unui PITAGORA, ARHIMEDE, PTOLOMEU și alții, cari își dăduseră întâlnire la acea masă.

* * *

După masă primul cuvânt îl pronunță D-l A. GH. IOACHIMESCU:

«Se cuvine ca primul nostru gând să fie îndreptat către M. S. REGELE CAROL II, care a înțeles că, nu numai prin putere fizică, dar și cu mintea se poate înfăptui ceva.

Să trăiască M. S. Regele».

Seria cuvântărilor astfel deschisă, se ridică apoi:

D-l I. IONESCU, care relevă elementul militar, propunând ca, de aci înainte D-sa să fie substituit ca *stâlp* prin D-l GENERAL BUICLIU, aduce apoi mulțumiri D-lui GENERAL DEMETRESCU, Directorul învățământului militar, și închină pentru sănătatea militarilor din *Gazeta Matematică*.

D-l GENERAL BUICLIU în ripostă, afirmă categoric că:

«Un stâlp nu poate fi niciodată substituit».

«Activitatea noastră, a urmașilor, nu este decât un slab reflex al exemplului dat de adevărații și eternii stâlpi ai Gazetei, cărora le urez din toată inima: *ani mulți*.

D-l GH. ȚIȚEICA, spune:

«Suntem datori, noi stâlpii, să ne spunem mai întâi cuvântul.

Părerea mea este că substituirea s'a făcut și aceasta se poate dovedi prin numeroasa asistență de astă seară.

Noi cei vechi, avem dragoste pentru tinerețe și atunci putem noi să ne mâhnim, pentru substituirea care s'a făcut dela sine?

Ridic dar paharul în sănătatea tuturor celor ce au dragoste pentru *Gazeta Matematică* și în particular pentru sănătatea D-lui ANGHELUȚĂ, care în ultimul timp a avut sănătatea puțin mai slăbită».

D-l GH. NICHIFOR, privind spațiul celor prezenți, în calitate de profesor de Geometrie Descriptivă, făcând apoi și o «perspectivă» retrospectivă, arată cum pe vremuri, împreună cu D-l avocat AL. IONESCU, cărau pachetele de «Gazete» la poștă, mergând pe jos, din mai multe motive. Comparând apoi prezentul, față de trecut și extrapolând, asigură pe «stâlpi» că, viitorul *Gazetei Matematice* nu poate fi decât foarte frumos.

D-l D. V. IONESCU, ţine apoi următoarea cuvântare:

«Sărbătorim astăzi un fapt de o deosebită însemnătate pentru viaţa culturală a ţării noastre şi deci socotesc, că este un prilej de a ne arăta întreaga recunoştinţă către cei dintâi conducători ai *Gazetei Matematice* reprezentaţi prin D-nii: I. IONESCU, A. GH. IOACHIMESCU, T. CONSTANTINESCU şi GH. ŢIŢEICA. Suntem recunoscători acestor mari întemeetori pentru ideea, entusiasmul şi sacrificiile făcute pentru *Gazeta Matematică,* pentru exemplul de armonie şi bună înţelegere care a domnit timp de 40 de ani, pentru tradiţia şi pentru acel «spirit al Gazetei» pe care l-aţi transmis rând pe rând tuturor membrilor, până la cei mai tineri. In fine, suntem recunoscători pentru organizarea şi grijea continuă pe care a avut-o de a aranja spiritul şi starea materială a Societăţii *Gazeta Matematică*, pentru ca aceasta să fie eternă şi să-şi continue neîntrerupt opera ei.

Ca fost corespondent al *Gazetei Matematice,* vă rog să-mi daţi voe să aduc în această zi de mare sărbătoare, omagiul meu de adâncă recunoştinţă către conducătorii ei.

Pomenesc, în această ordine de idei, cu adâncă recunoştinţă memoria a doi membri ai *Gazeţei Matematice,* cu care am avut relaţiuni mai strânse: GHEORGHE NICOLAEVICI, profesor de matematici la Liceul Sf. Sava şi TRAIAN LALESCU, profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti.

Deasemenea mărturisesc că, fiind bursierul *Gazetei Matematice,* graţie donaţiei făcută de unul din membrii fondatori, D-nul A. GH. IOACHIMESCU, aduc pe această cale omagiul meu de profundă recunoştinţă.

Incheind, ridic acum paharul pentru Societatea *Gazeta Matematică,* pentru sănătatea şi fericirea primilor ei conducători şi pentru sănătatea D-voastră a tuturora.

D-l V. ALACI, constată că la această masă iau parte trei «nobile echipe»: prima a *stâlpilor,* a doua *a celor ce au gustat din apele cristaline ale Gazetei,* luminându-şi mintea şi a treia a *tinerilor,* în care Gazeta îşi pune toată speranţa.

Arată apoi că matematicienii pot fi foarte bogaţi şi citează drept exemplu pe marele latifundiar GH. ŢIŢEICA, care are numeroase «suprafeţe» cu foarte multe «proprietăţi».

Inchină deci paharul în sănătatea acestui mare bogătaş spiritualiceşte.

D-l AVOCAT AL. IONESCU, ia cuvântul, provocat fiind de către D-l GH. NICHIFOR.

Arată că acum 20 de ani a fost cel mai mare cumulard din țara Românească: corector, curier, contabil, hamal, etc..., muncind cu plăcere pentru că a crezut în această «minune» *Gazeta Matematică* și iată că acum a văzut-o. Făcând apoi aluzie la discuțiunea asupra «substituției», arată că substituțiile testamentare sunt nule, dar o substituție sub formă de «prevedere» este necesară și o recomandă chiar, în calitate de «negustor de gâlceavă».

Închină pentru simbolul sănătății.

D-l CHIȚULESCU, este contra «substituției», spunând că, pe «stâlpi» trebue să se construiască «bolta» *Gazetei Matematice*. Ei vor rămâne deci eterni pentru noi.

D-l I. IONESCU, pentru a clarifica, spune:

«Stâlpii de aci sunt de carne și oase, deci nu de piatră, ca piramidele din Egipt».

D-l M. GHERMĂNESCU spune că stâlpi sunt «invarianții» substituției.

D-l GH. ȚIȚEICA observă însă că, «stâlpii» nu sunt invarianți absoluți, ci numai raportul dintre stâlpi este un invariant absolut și acel invariant este însuși *Gazeta Matematică*.

D-sa mai relevă apoi prezența printre comeseni a unui fost corespondent, D-l C. VIȘOIANU, astăzi devenit ministrul nostru în Polonia.

D-l GENERAL DEMETRESCU, vorbește cu mult suflet despre activitatea *Gazetei Matematice*, despre eforturile depuse, despre mijloacele de propagare și despre modul cum «stâlpii» au știut să o facă înțeleasă și iubită de tineret. Făgăduește apoi, că va face tot posibilul ca atmosfera dela *Gazeta Matematică* să dăinuiască la toate Liceele Milatare. Închină pentru stâlpi și pentru Liceele Militare.

D-l GENERAL BUICLIU, evidențiind dragostea pentru matematici păstrată în Liceele Militare, grație în bună parte numai D-lui GENERAL DEMETRESCU, închină paharul în sănătatea D-sale.

D-l ADVOCAT AL. IONESCU povestește cum, pe vremuri, trimițând o «Gazetă» la Seminarul Nifon, intendentul i-a retrimis-o cu mențiunea: «asemenea reviste imorale n'au ce căuta la noi!».

D-l C. VIŞOIANU face o subtilă comparaţie între problemele de matematici şi cele diplomatice, în primul caz ele fiind rezolvate, în al doilea caz ele fiind eludate.

Ca fost corespondent, drept recunoştinţă, donează *Gazetei Matematice* suma de 10.000 lei pentru premianţii anului următor.

* * *

Dar vremea trece, mai ales când frumoasele cuvântări sunt împletite şi cu vesele anecdote, povestite cu mult humor de către D-nii: GH. NICHIFOR, GH. BUICLIU, GR. ZAPAN şi GH. PATRICIU.

* * *

Se apropie momentul despărţirei.

D-l COL LITEANU cere asistenţei, drept o pioasă amintire, un minut de reculegere pentru mult regretaţii şi veneraţii: I. ALEXANDRESCU, O. ALEXANDRINI, V. BALABAN, V. CRISTESCU, EM. DAVIDESCU, TR. DORDEA C. ERBICEANU, V. EVOLCEANU, TR. LALESCU, ŞT. MIREA, I. MOŢOI, D. NĂSTURAŞ, G. NICOLAEVICI, N. NICOLESCU, M. ROCO, AL. ROŞU, A. SALIGNY, I. TEODOR, I. S. TEODORESCU şî G. ZOTTU.

* * *

D-l GH. ŢIŢEICA închee seria cuvântărilor spunând: «Să ne reamintim că fiecare din noi este chemat la muncă. Propun dar să ne despărţim, deşi cu părere de rău, totuşi cu o plăcută amintire şi cu speranţa că ne vom mai revedea.

Rog dar pe toţi să bea ultima picătură de vin, în cinstea *Gazetei Matematice*».

* * *

Dar rugămintea D-lui ŢIŢEICA nu a fost — de astă dată — ascultată, decât de foarte puţini, majoritatea, în frunte cu D-l I. IONESCU, refuzând să părăsească câmpul de luptă.

Un impresionant duel urmează între D-l GHERMĂNESCU şi D-l TOMESCU, ambii cântând frumoase arii. Bine înţeles primul a învins, căci ultima romanţă:

„Bătrâneţe! Haine grele!"

a făcut să lăcrămeze pe mulţi, cari în mod cu totul discret, dădeau a înţelege că totuşi, hainele lor... «nu sunt prea grele!» deşi pudra le albise din abudenţă tâmplele.

O avalanşă de anecdote se declanşează iară şi la fiecare eruditii matematicieni se întreceau în observaţiuni, particularizări şi generalizări, dovedind cu prisosinţă că «spiritul matematic» este departe de a fi strâns într'un făgaş inexpugnabil.

Dar D-l I. IONESCU se întrece cu gluma, deşi târziu, D-sa nici nu se clinteşte de pe scaun. In privirile D-sale se cetea cu toată claritatea cea mai mare mulţumire şi — dacă îmi este ertată indiscreţia — sunt convins că, niciodată D-sa nu a fost mai fericit ca în acea seară. Scumpa lui «fiică», *Gazeta Matematică*, ruptă din suflet şi crescută cu multă trudă, îşi serba azi cei 40 de ani în deplină preamărire, oare, puţin lucru este, în astfel de împrejurări, pentru mulţumirea unui părinte?

* * *

In sfârşit, târziu de tot, cu foarte mult regret, sunt sigur, D-l I. IONESCU s'a hotărît să se retragă.

Candidat, fără contra-candidat, la preşedenţia celor rămaşi a fost D-l AL. IONESCU, zis şi «Conu Alecu».

A, vesel şi animator om! De geaba şi-a zis «negustor de gâlceavă», nu prea era aşa, mai degrabă şi-ar fi zis «negustor de bună dispoziţie».

Privind şi ascultând pe un astfel de om vesel, gata oricând şi la muncă şi la petrecere, mă întrebam: Cum să nu fi trecut *Gazeta Matematică* cu uşurinţă, «pe vremuri», toate greutăţile, toate năcazurile cu astfel de: contabili, casieri, corectori, hamali, etc... personificaţi într'un «Conu Alecu»?

Dar «Conu Alecu» este hotărît să prezideze, pe întârziaţii matematiciani, cu metode practice şi atunci ordonă:

«Ţigani!»

«Să vină ţigani!»

«Să ne cânte... aşa... pe coarda a groasă!».

Şi au venit «ţigani» şi ne-au cântat şi s'au mai golit câteva sticle de vin şi iar s'au mai spus anecdote şi iar s'au mai cântat romanţe.

Ah! mult năcaz a prins atunci cronicarul acestor rânduri pe GHERMĂNESCU, căci de câte ori vroia s'o şteargă englezeşte, GHERMĂNESCU începea să cânte:

„Pentru ochii tăi frumoşi!“

sau

„La fântâna cu găleata!“

BIBLIOTECA CENTRALA A ACADEMIEI R.P.R. FILIALA CLUJ

sau cine ştie ce altă romanţă, şi atunci rămânea pironit pe scaun, spre marea mulţumire a lui «Conu Alecu», care trăgând cu coada ochiului, într'o parte sau în alta, (ager preşedinte Domnule şi «Conu Alecu»!) îndemna mereu să cânte, când pe GHERMĂNESCU, când pe TOMESCU.

* * *

Inchei această cronică cerând ertare, dacă multe din cele petrecute la masă, nu au fost menţionate. Declar, cu toată sinceritatea, că memorie bună nu am avut niciodată şi cu atât mai mult, cu cât în acea seară camaradul meu ZAPAN era secretar special de serviciu, aşa încât principala grijă a subsemnatului era mâncare şi mai cu seamă băutura, căci colegul TOMESCU din faţa mea nu mă slăbea deloc, noroc cu vecinul din stânga, PANTAZI cari — fiind probabil acţionar la vre-o fabrică de sifoane — îmi turna sifon mereu în pahar. Intâmplarea făcând însă ca ZAPAN să fie foarte ocupat, m'a rugat să fac eu pe cronicarul.

Mulţumesc dar celor ce mi-au pus notiţele şi însemnările din acea seară la dispoziţie şi în special D-rei ROMAN, D-lui COMANDOR ZAPAN şi D-lui Inginer U. FLORESCU, precum şi celor ce verbal, mi-au mai reamintit câte ceva.

MAIOR I. LINTEŞ.

REZULTATELE CONCURSULUI „GAZETEI MATEMATICE“

1. Cu împrejurarea serbărilor organizate la împlinirea a patruzeci de ani de apariţie regulată a *Gazetei Matematice,* s'a arătat şi rolul înalt educativ pe care l-a îndeplinit această revistă cu regularitate matematică. Concursurile anuale ale *Gazetei,* prin sforţarea pe care o face fiecare candidat de a se pregăti cât mai bine, prin întrecerea firească între candidaţi, dau, din punctul de vedere educativ, cele mai frumoase rezultate.

De aceea, în fiecare an, în numărul Gazetei din luna Septemvrie apare înştiinţarea despre Concursul Gazetei, iar în numărul din luna Februarie care urmează, se găseşte lista candidaţilor admişi să se prezinte la concurs, precum şi amănunte privitoare la ţinerea concursului. Toate acestea fac parte din viaţa însăşi a *Gazetei Matematice* şi corespondenţii noştri le cunosc foarte bine.

In anul acesta au fost admişi să se prezinte la Concurs 93 de candidaţi, dintre care 3 candidate. Dintre cei admişi au lipsit 16, dela lucrarea scrisă s'au retras 4 şi au fost admişi să treacă examenul oral 32 de candidaţi.

Se poate vedea de aci cernerea serioasă pe care a făcut-o comisiunea chiar dela lucrarea scrisă. Putem spune că sita a fost cam deasă, căci, din an în an, începem să descoperim printre candidaţi elemente din ce în ce mai bune, dar în număr restrâns. E îmbucurător, dar nu e de ajuns.

Comisiunea pentru ţinerea concursului a fost formată din D-nii: N. Botea, I. Chiţulescu, U. Florescu, G. T. Gheorghiu, M. Ghermănescu, C. Ionescu-Bujor, Al. Roşu şi Ov. N. Ţino, iar la probele orale au pus chestiuni ca de obicei, şi alţi membri ai Societăţii *Gazeta Matematică.*

De altfel, ca în toţi anii, foarte mulţi membri ai Societăţii noastre s'au interesat de mersul Concursului şi anume D-nii: E. Abason, I. S. Antoniu, Gh. Buicliu, Al. D. Bunescu, E. Carafoli, Adr. Gheorghiu, G. Iliescu, A. G. Ioachimescu, D. V. Ionescu, H. P. Ionescu-Biss, C. D. Ionescu-Ţiu, I. Ionescu, I. Linteş, G. I. Liteanu. Gr. I. Livadă, N. N. Mihăileanu, Miron Nicolescu, C. D. Orăşeanu, M. Sarian, P. Sergescu, G. D. Simionescu, G. I. Stamatescu şi R. Woinarosky.

La proba orală de algebră şi geometrie din după amiaza zilei de Vineri 17 Aprilie au asistat D-nii: Prof. A. Mieli din Roma, directorul revistei *Archeion* şi Prof. A. Singh dela Universitatea din *Luknov,* India.

Ambii profesori au participat la congresul internaţional de ştiinţe istorice, care s'a ţinut în Luna Aprilie la Cluj şi la Bucureşti.

2. Din desfăşurarea totală a Concursului, precum şi din amănuntele lui, putem afirma cu siguranţă că pregătirea candidaţilor e în creştere. Siguranţă în calcul, siguranţă în raţionament şi siguranţă în cunoştinţă am găsit la mulţi dintre candidaţi. Rezultatele concursului par mai slabe de cât în anii trecuţi, deoarece n'am putut aşeza printre premianţi de cât patru candidaţi. In realitate nivelul general e mai ridicat şi aceasta e esenţial. Iată acum clasificarea şi cu premiile acordate.

I. In rândul întâi a ieşit D-l Ion A. Ilie, elev în clasa V-a la liceul militar *Mânăstirea Dealu,* prin preciziunea şi siguranţa calculului şi raţionamentului la lucrarea scrisă şi la proba orală, amândouă excelente, prin cunoştinţele întinse şi sigure la probele de geometrie, amândouă foarte bune. I se acordă ca premiu volumele următoare: F. G. M. (Exercices de Géométrie), F. G. M. (Exercices d'Arithmétique), Aubert et Papelier (Exercices d'Algèbre, etc.), F. G. M. (Cours de Mécanique), P. Sergescu (Gândirea matematică), I. Ionescu (Beton Armat), J. Dupuis (Tables de logarithmes), *Gazeta Matematică* (volum jubilar).

II. In rândul al doilea a ieşit D-l Ştefănescu D. N., elev în clasa VI-a la *Mânăstirea Dealu,* mai ales pentru probele de geometrie, amândouă foarte bune şi în care a dat dovadă de o disciplină serioasă a inteligenţei şi prin oralul excelent de trigonometrie, unde a dovedit siguranţă desăvârşită de calcul, lucrarea scrisă fiind mai mult de cât bună. I se dă ca premiu volumele: N. Abramescu, (Lecţiuni de Geometrie analitică), M. Ghermănescu (Curs de Algebră superioară), F. G. M. (Exercices de Géométrie descriptive), E. Humbert (Traité d'Arithmétique), F. G. M. (Cours de Mécanique), I. Ionescu (Beton armat), *Gazeta Matematică* (volum jubilar).

III. In rândul al treilea a ieşit D-l Florescu Victor, elev în clasa V-a la *Mânăstirea Dealu,* prin toate probele sale atât scrise cât şi orale, de Algebră şi Geometrie, toate foarte bune, dând dovadă de o pregătire omogenă serioasă. I se dau ca premiu volumele:

A. ANGELESCU (Lecţiuni de Calcul diferenţial), F. G. M. (Exercices d'Algébre), F. G. M. (Exercices de Trigonométrie), P. SERGESCU (Gândirea matematică), I. IONESCU (Beton armat), *Gazeta Matematică* (volum jubilar).

IV. In rândul al patrulea a ieşit D-l CRĂCIUNESCU MARCEL, elev în clasa II-a la liceul militar *Mânăstirea Dealu*, înscris să treacă concursul pentru clasa IV-a, prin probele sale orale excelente, care au pus în mirare Comisiunea din cauza contrastului dintre vârsta candidatului şi maturitatea sa de gândire. Rezultatul a fost slăbit din cauza probelor scrise neîndemânatece sau necomplecte. Dacă pregătirea acestui candidat se va face cu grijă şi fără pripire, se pot pune mari speranţe pentru viitorul său. I se dau ca premiu volumele: F. G. M. (Exercices d'Arithmétiques), F. G. M. (Cours d'Algèbre élémentaire), J. DUPUIS (Tables de logarithmes), I. IONESCU (Beton Armat), *Gazeta Matematică* (volum jubilar).

3. Foarte mulţi candidaţi au făcut câte o probă scrisă sau orală la una din materiile la care s'au înscris sau la amândouă. Ii menţionăm pe clase în tabela următoare şi li se acordă la fiecare volumele: A. ANGELESCU (Lecţiuni de Calcul diferenţial), *Gazeta Matematică* (volum jubilar).

Clasa IV-a: IONESCU STELIAN dela liceul militar Cernăuţi (lucrarea scrisă de Geometrie), VASILESCU STABU MIRCEA dela liceul Diaconovici-Loga Timişoara (lucrarea scrisă de Algebră).

Clasa V-a: BODNĂRESCU HORIA dela Seminarul pedagogic Titu Maiorescu Bucureşti (Oralul de Geometrie), PASERE AUREL dela liceul militar Tg.-Mureş (Oralul de Geometrie), RĂDULESCU OCTAVIAN, Mânăstirea Dealu (lucrarea scrisă de Geometrie).

Clasa VI-a: APOSTOL RADU dela Mânăstirea Dealu (Oralul de Geometrie), D-ra ROMAŞCAN GEORGETA dela Şcoala Centrală de fete Bucureşti (Oralul de Geometrie), ŞAICHIN O. A. dela liceul Matei Basarab Bucureşti (Lucrarea scrisă de Trigonometrie).

Clasa VII-a: BUZINCU ION dela liceul militar Iaşi (Oralul de Algebră), GALAN I. I. dela liceul militar Cernăuţi (lucrarea de geometrie descriptivă), NĂSTASE MARIN dela liceul Mânăstirea Dealu (amândouă probele de Geometrie descriptivă), TANASICIUC CLAUDIUS dela liceul militar Cernăuţi (lucrarea scrisă de Geometrie descriptivă), ŢIŢEICA ILIE dela Mânăstirea Dealu (lucrarea de Geometrie descriptivă).

Clasa VIII-a: CEAUŞESCU VASILE dela liceul militar Târgu-Mureş (Oralul de Algebră), GRIGORESCU VINTILĂ dela Mânăstirea Dealu (probele orale), ŞABAC ION dela Mânăstirea Dealu (probele de Mecanică, STĂNESCU EM. dela liceul militar Craiova (Oralul de Algebră).

Precum se vede liceele militare şi în special Mânăstirea Dealu in fruntea. Aşteptăm, la rând, liceele civile.

DELEGAT PENTRU RAPOARTE

G. ŢIŢEICA.

SCRIERILE MATEMATICE ALE LUI GHEORGHE LAZĂR

(Urmare dela pag. 414)

In ce priveşte *Geometria* lui LAZĂR, deşi manuscrisul s'a pierdut, ne putem da seama de cuprinsul ei din *„Punerile de Geometrie"*, adecă tabla de materii alcătuită de însuşi LAZĂR şi care e publicată în volumul scos de Ministerul Instrucţiunii. Terminologia întrebuinţată de LAZĂR a fost studiată de D-l I. IONESCU în *Gazeta Matematică*" vol. XL. *„Punerile"* urmează punct cu punct ordinea şi programul geometriei din compendiul lui WOLFF. O confruntare amănunţită a acestor *„Puneri"* cu textul lui WOLFF ne arată în mod neîndoielnic, că geometria lui LAZĂR a fost tradusă după compendiul acestuia, cuprinzând tot materialul tratat de WOLFF. Lui LAZĂR îi aparţine numai împărţirea materiei în capitole separate de Geometrie, Arii, Inălţime şi Solidometrie, ceeace nu se află la autor. Capitolul de geometrie ocupă la WOLFF 99 de pagini şi cuprinde pe lângă studiul figurilor plane şi solide şi elementele de inginerie practică, precum măsurări pe teren, ridicări de planuri etc.

Aritmetica şi geometria lui WOLFF se utilizau şi în şcoala elenică dela Iaşi în prelucrarea în greceşte făcută la 1801 de NICOLAI CERCEL. Această prelucrare încă a rămas nepublicată.

Temeiurile trigonometriei cei drepte" a lui LAZĂR nu mai e după WOLFF, deci îndoiala lui LALESCU în această privinţă e justificată. E interesant de relevat, că LALESCU necunoscând izvorul de care s'a servit LAZĂR a avut de întâmpinat unele dificultăţi cu

tipărirea lucrării, căci LAZĂR în graba de a termina manuscrisul nu a pus figuri în text. Lui LALESCU i-a reuşit însă să reconstruiască admirabil figurile servindu-se numai de textul lui LAZĂR. O singură figură care se referă la un caz limită nu a putut fi refăcută de LALESCU; în textul tipărit lipseşte astfel figura 6.

Trigonometria lui LAZĂR e în întregime şi textual tradusă după tratatul mai sus amintit al lui METZBURG. Capitolul de trigonometrie se află în volumul al treilea al acestui autor şi poartă titlul: „*Elementa trigonometriae planae*". Materialul tratat de METZBURG e mai vast decât cel din compendiul lui WOLFF sau din oricare manual de liceu de pe acele vremuri, iar expunerea e foarte clară. Alegând ca manual pentru studiul trigonometriei cartea lui METZBURG, LAZĂR voia de sigur să dea viitorilor ingineri şi o pregătire teoretică serioasă. Traducerea lui LAZĂR este bine făcută. Dau mai jos câteva exemple din care se vede felul în care s'a achitat LAZĂR de această sarcină:

Trigonometria lui METZBURG:

§ 1. Trigonometria plana est scientia resoluendi triangulum rectilinium in plano descriptum, hoc est: determinandi quantitatem laterum, & angulorum (pag. 1).

§ 18. In circulis quibuscunque aequalis est ratio radiorum ad sinus, tangentes, secantes, & ad cosinus, cotangentes & c, & c. aequalium angulorum (pag. 6).

Trigonometria lui LAZĂR:

§ 1. Trigonometria cea dreaptă este ştiinţa care ne învaţă a desface pe triunghiu dreptlineat în plan scris; adecă a hotărî cătăţimea laturilor şi unghiurilor. (pag. 1).

§ 18. In fieşcare cercuri asemenea este cuvântul razelor la sinuri, atingătoare, tăetoare, precum şi la cosinuri, coatingătoare & c, & c. (pag. 37).

Dacă ţinem seamă de faptul, că înaintea lui LAZĂR nu exista trigonometrie scrisă în limba română, ne putem da seamă de greutăţile ce a avut să învingă în ce priveşte termenii tehnici potriviţi, pe cari el trebuia să-i creeze. Dau ca exemplu termenii şi notaţiile întrebuinţate de LAZĂR pentru funcţiunile trigonometrice. Astfel el scrie: „*sinul să scrie = sin., consinul = cos., atingătoarea = at., coatingătoarea = coat., tăietoarea = cot., sinul întors = sin. in., cosinul întors = cos. în*". Astăzi, afară de notaţiile pentru sinus şi

cosinus, celelalte nu se mai întrebuinţează, ele rămân însă ca dovezi de încercările făcute de LAZĂR pentru crearea unei terminologii matematice româneşti.

La sfârşitul trigonometriei LAZĂR scrie: *„Acum urmează temeiurile geometriei practiceşti"*. Se pare deci, că el intenţiona să traducă şi o geometrie practică. Suntem chiar conduşi a crede, că această traducere urma să o facă tot după METZBURG, în tratatul căruia imediat după trigonometrie urmează capitolul: *„Elementa geometriae practicae"*, capitol bogat în exemple practice şi în admirabile figuri explicative. Nu există însă nicio indicaţie că această traducere ar fi avut loc.

* * *

Din cele de mai sus rezultă în mod clar că manuscrisele lui LAZĂR: aritmetica, geometria şi trigonometria sunt traduceri după manuale străine scrise în latineşte sau nemţeşte. Este evident, că valoarea lor ar fi cu totul alta dacă ele ar fi fost alcătuite de el. De altcum nefiind tipărite la timp, influenţa lor asupra contemporanilor şi a posterităţii e şi ea mică. Ele au totuşi o mare valoare pentru istoria începutului ştiinţelor matematice la noi şi a terminologiei acestora, fiind printre cele dintâi scrieri matematice de un nivel mai înalt, în limba română.

VICTOR MARIAN.

CONICELE DE RAMIFICARE A TREI CONICE IN FASCICOL

§ 1. Introducerea conicelor de ramificare.

1°. In ceeace urmează s înseamnă parametrul binar

$$s\ ,\ \bar{s}\ ;$$

factorii de felul (ab), determinanţi de felul

$$(ab) \equiv \begin{vmatrix} a & \bar{a} \\ b & \bar{b} \end{vmatrix} ;$$

puterea simbolică $(\sigma s)^3$, forma cubică binară de coeficienți $(-1)^i \sigma_{ij}$:

$$(\sigma s)^3 \equiv \sigma_{03} s^3 - 3\sigma_{12} \bar{s} s^2 + 3\sigma_{21} \bar{s}^2 s - \sigma_{30} \bar{s}^3 .$$

Însfârșit, prin σ^i $(i = 1, 2, 3)$ înțelegem rădăcinile formei cubice $(\sigma s)^3$, adică

$$\sigma^i , \bar{\sigma}^i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Exponenții efectivi, spre deosebire de exponenții simbolici sau de indicii superiori, sunt barați. Astfel $(\sigma s)^{\bar{3}}$ înseamnă cubul determinantului $\begin{vmatrix} \sigma & \bar{\sigma} \\ s & \bar{s} \end{vmatrix}$ și nu forma cubică de coeficienți $(-1)^i \sigma_{ij}$.

Fiindcă în tot ceeace urmează nu apare, în afară de puteri simbolice, nici o înmulțire simbolică, vom suprima punctul prin care în Calculul Simbolic astfel de înmulțiri sunt deosebite de înmulțirile efective.

2^0. Fie următorul fascicol punctual de conice

$$(1) \qquad s O + \bar{s} \bar{O} = 0$$

raportat la parametrul binar s (O și $\bar{O}$ fiind două forme pătratice ternare).

Considerăm în acest fascicol terna S^i $(i = 1, 2, 3)$ a conicelor singulare și o a doua ternă O^i $(i = 1, 2, 3)$ de conice propriu zise, dar altfel arbitrare. Parametrii lor σ^i și ω^i $(i = 1, 2, 3)$ sunt rădăcinile următoarelor forme cubice binare

$$(2) \qquad (\sigma s)^3 \ , \ (\omega s)^3 .$$

Introducem involuția cubică

$$(3) \qquad (\pi s)^3 \equiv k (\omega s)^3 + \bar{k} (\sigma s)^3$$

unde k e un parametru binar variabil. Există, cum se știe, patru valori k^i ale acestui parametru, pentru care forma variabilă $(\pi s)^3$ devine singulară

$$(4) \qquad (\pi_i s)^3 \equiv (\zeta^i s) (\zeta^i s)^{\bar{2}} , \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Formele bipătratice

$$(5) \qquad (\zeta s)^4 \ , \ (\iota s)^4$$

de rădăcini ζ^i şi ι^i $(i = 1, 2, 3)$ sunt, respectiv, *covariantul de ramificaţie* şi *jacobianul* cubicelor (2).

Din (3) scoatem, oricare ar fi k

$$(6) \qquad \frac{(\pi\omega^1)^3}{(\sigma\omega^1)^3} = \frac{(\pi\omega^2)^3}{(\sigma\omega^2)^3} = \frac{(\pi\omega^3)^3}{(\sigma\omega^3)^3} \ .$$

Dacă s şi s^* sunt două, oarecari, din rădăcinile asociate ζ^i şi ι^i ale covarianţilor (5) avem, în virtutea lui (6)

$$(7) \qquad \boxed{\frac{(\omega^1 s)\,(\omega^1 s^*)^{\bar{2}}}{(\sigma\omega^1)^3} = \frac{(\omega^2 s)\,(\omega^2 s^*)^{\bar{2}}}{(\sigma\omega^2)^3} = \frac{(\omega^3 s)\,(\omega^3 s^*)^{\bar{2}}}{(\sigma\omega^3)^3}} \ .$$

Aceste relaţii sunt caracteristice pentru o pereche de rădăcini asociate ale covarianţilor (5). Int'adevăr, însemnând cu $\bar{k}$ valoarea comună a rapoartelor (7), e clar că o consecinţă a lui (7) este următoarea legătură lineară între formele cubice în discuţie

$$k\,(\omega t)^3 + \bar{k}\,(\sigma t)^3 \equiv (st)\,(s^* t)^{\bar{2}}$$

unde variabila binară a fost însemnată de data aceasta cu t.

Adică tocmai identitatea (4).

Numim *conice de ramificare* şi *conice jacobiane* ale ternei O^i $(i = 1, 2, 3)$ conicele Z_i şi J_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ ale fascicolului (1) ai căror parametri binari ζ^i şi ι^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ sunt rădăcinile covarianţilor de acelaşi nume din (5).

3⁰. Să dăm o interpretare geometrică definiţiei algebrice din alineatul precedent.

Cazul unui fascicol bitangent de conice odată exclus, putem găsi totdeauna în planul fascicolului punctual (1) o dreaptă p ale cărei poluri P faţă de conicele (O) ale fascicolului să descrie o conică propriu zisă $\mathfrak{D}$ (conica celor 9 puncte, când p e dreapta dela infinit).

E clar că triunghiul conjugat $S^1S^2S^3$ şi triunghiul $O^1O^2O^3$ format de polurile lui p faţă de conicele de acelaş nume sunt două triunghiuri înscrise în $\mathfrak{T}$. Există aşa dar o conică $\mathfrak{Z}$ şi o conică $\mathfrak{J}$ cărora triunghiurile $S^1S^2S^3$ şi $O^1O^2O^3$ sunt respectiv circumscrise şi conjugate.

Dar $\mathfrak{Z}$ şi $\mathfrak{T}$ deoparte şi $\mathfrak{J}$ şi $\mathfrak{T}$, de alta, au o întreagă serie lineară de triunghiuri circumscrise şi înscrise sau conjugate şi înscrise. Aceste două serii lineare având două elemente distincte $S^1S^2S^3$ şi $O^1O^2O^3$ în comun, se reduc la una şi aceeaş serie de triunghiuri $P^1P^2P^3$: imagină proiectivă, în domeniul binar al conicei $\mathfrak{T}$ a involuţiei de forme cubice (4).

Fie Z_i şi J_i ($i = 0, 1, 2, 3$) intersecţiile perechilor de conice $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}$ şi $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{T}$. E clar că

$$\text{pentru } P^1 \equiv Z_i \rightarrow P^2 \equiv P^3$$

$$\text{» } P^1 \equiv J_i \rightarrow P^1 \equiv P^2 \text{ (sau } P^3).$$

Aceste observaţii geometrice sunt echivalente relaţiilor de descompunere (4). Ele arată că Z_i şi J_i ($i = 0, 1, 2, 3$) sunt imaginele, în domeniul binar al conicei $\mathfrak{T}$, ale rădăcinilor covarianţilor (5). Conicele fascicolului (1), ale căror poluri (P) cad în Z_i şi J_i, sunt deci *conicele de ramificare* şi *conicele jacobiane* ale ternei O^i ($i = 1, 2, 3$), definite algebric la alineatul 2^0.

§ 2. **Caracterizări ternare ale conicelor de ramificare.**

4^0. In paragraful precedent conicele de ramificare Z_i şi conicele jacobiane J_i au fost definite prin anume proprietăţi de invarianţă în domeniul binar al fascicolului fundamental (1).

Una din ideile fecunde ale Geometriei Proiective şi ale Teoriei Formelor este caracterizarea proprietăţilor binare prin proprietăţi din cuprinsul planului proiectiv (proprietăţi ternare) sau al spaţiului proiectiv (proprietăţi cuaterne). Alte ori problema constă în caracterizarea invarianţilor ternari prin invarianţi binari.

Ne propunem să facem o aplicaţie a acestei metode la problema particulară a conicelor de ramificare. Impărţim cercetarea în două paragrafe: *caracterizări ternare iraţionale,* adică proprietăţi din plan nesimetrice faţă de grupa celor 4 intersecţii ale conicelor fas-

cicolului (1); şi *caracterizări ternare raţionale,* unde intervine o astfel de simetrie.

In expunerea caracterizărilor iraţionale e nimerit să întrebuinţăm limbagiul metric, mai concis decât cel proiectiv, presupunând că (1) e un fascicol linear de cercuri, ceeace din punct de vedere proiectiv nu e o restrângere a problemei.

Inainte de a trece la problema care ne ocupă, vom desfăşura pe scurt teoria *dreptei de segmentare echiunghiulară* a trei tangente concurente la trei cercuri în fascicol. (Pentru cazul a două cercuri şi a unei direcţii perpendiculare pe linia centrelor, atribuită, prin definiţie, dreptei de segmentare echiunghiulară, a se vedea articolul *Asupra fascicolelor de cercuri,* G. M., anul XLI, No. 1). Avem, în proprietăţile acestei drepte, elementul ternar de caracterizare (iraţională) a cercurilor de ramificare Z_i ($i = 0, 1, 2, 3$) relative la trei cercuri O^i ($i = 1, 2, 3$) în fascicol.

5⁰. *Definiţie.* Numim Δ dreapta de segmentare echiunghiulară a grupei de tangente FG^i, duse printr'un punct F la trei cercuri O^i ($i = 1, 2, 3$) în fascicol, dacă avem egalităţile de unghiuri orientate, definite modulo π:

$$\overline{FO^iE^i} = \overline{FO^jF^j} \qquad (\text{mod } \pi) \tag{8}$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

unde O^i sunt centrele cercurilor de acelaşi nume, iar E^i intersecţiile tangentelor FG^i cu Δ.

Unicitatea acestei drepte şi un mijloc simplu de a o construi sunt date de următoarea

Lemmă.

Există o singură dreaptă Δ de segmentare echiunghiulară pentru trei tangente concurente FG^i ($i = 1, 2, 3$).

Dacă însemnăm cu Φ^i ($i = 1, 2, 3$) punctele dela infinit ale direcţiilor care fac cu linia centrelor unghiurile

$$\varphi_i = \overline{O_i FG^i}\ , \qquad (\text{mod } \pi), \tag{9}$$

dreapta Δ e chiar axa proiectivităţii (sau dreapta lui PAPPUS) *a următoarelor terne de pe linia centrelor şi dreapta dela infinit:*

$$\begin{pmatrix} O^1 & O^2 & O^3 \\ \Phi^1 & \Phi^2 & \Phi^3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Fie i, j, k una din aşezările indicilor 1, 2, 3. Cercul O^i F O^j taie a doua oară tangentele FG^i , FG^j în P^{ik} , P^{jk} . Egalităţile (8) arată că punctul H^{ij} al dreptelor $O^i E^i$ şi $O^j E^j$ se găseşte pe cercul O^i F O^j . Din exagonul lui PASCAL

$$P^{ik} \, F \, P^{jk} \, O^i \, H^{ij} \, O^j$$

se vede că dreapta $E^i E^j$, adică Δ, trece prin intersecţia M^{ij} a dreptelor $O^i P^{jk}$ şi $O^j P^{ik}$.

Dar avem, prin măsuri de unghiuri

$$\overline{O^j O^i P^{jk}} = \overline{O^j F G^j} = \varphi^j , \quad \overline{O^i O^j P^{ik}} = \overline{O^i F G^i} = \varphi^i \pmod{\pi}.$$

Aceste înclinări ale dreptelor $O^i P^{jk}$, şi $O^j P^{ik}$, faţă de linia centrelor, ne arată pe M^{ij} ca punct de încrucişare al perechilor omoloage

$$\begin{matrix} O^i & O^j \\ \Phi^i & \Phi^j \end{matrix}$$

din (10). Dreapta Δ conţinând cele trei puncte M^{ij} e axa proiectivităţii (10).

6°. Să trecem dela grupa de tangente FG^i la configuraţia celor opt grupe similare cu cele trei perechi de tangente

$$FG^i_\varepsilon \quad (i = 1, 2, 3 \; ; \; \varepsilon = \pm 1)$$

duse prin F la cercurile O^i $(i = 1, 2, 3)$.

Aceste perechi dau loc, prin gruparea lor sistematică (în legătură cu structura unui anume grup Γ_8 de permutări al indicilor inferiori) la două *tablouri sizigetice*

$$(11) \qquad \begin{matrix} FG^1_+ & FG^2_+ & FG^3_+ \\ FG^1_+ & FG^2_- & FG^3_- \\ FG^1_- & FG^2_+ & FG^3_- \\ FG^1_- & FG^2_- & FG^3_+ \end{matrix} \qquad (11') \qquad \begin{matrix} FG^1_- & FG^2_- & FG^3_- \\ FG^1_- & FG^2_+ & FG^3_+ \\ FG^1_+ & FG^2_- & FG^3_+ \\ FG^1_+ & FG^2_+ & FG^3_- \end{matrix} .$$

Tabloul sizigetic drept corespunde condiţiei $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1$; cel stâng, condiţiei $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$. Fiecare tablou cuprinde patru terne.

Potrivit acestor tablouri avem o despărțire a dreptelor de segmentare echiunghiulară $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ într'un sistem direct sau stâng, după cum

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1 \quad , \quad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1.$$

Cercetarea noastră se simplifică mult și poate fi mărginită la unul singur din sistemele sizigetice prin următoarea

7⁰. **Teoremă.**

Patrulaterul stâng $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1)$ *și patrulaterul direct* $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1)$ *sunt simetrice față de linia centrelor. Diviziunea de patru puncte* $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ *determinată de acestea pe linia centrelor, rămâne fixă când punctul generator* F *descrie un cerc* O *din fascicolul (1).*

Intr'adevăr, unghiurile (9) extinse la întreaga configurație sunt

$$(9') \qquad \varphi^i_\varepsilon = \overline{O^i F G^i_\varepsilon} \quad , \qquad (\text{mod } \pi)$$

$$i = 1, 2, 3 \quad , \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Intre două unghiuri care diferă numai prin indicele inferior, avem

$$\varphi^i_\varepsilon = -\varphi^i_{-\varepsilon}$$

cum ușor se recunoaște pe figură. Deci, în virtutea construcției prin care le-am definit, punctele de încrucișare

$$M^{ij}_{\varepsilon_i\,\varepsilon_j} \quad , \quad M^{ij}_{-\varepsilon_i\,-\varepsilon_j}$$

sunt simetrice față de linia centrelor. Urmează de aici simetria față de aceeaș linie a dreptelor

$$\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \quad , \quad \Delta_{-\varepsilon_1\,-\varepsilon_2\,-\varepsilon_3}.$$

Pentru a demonstra a doua parte a teoremei, observăm că avem

$$(12) \qquad \varepsilon FG^i_\varepsilon = R^i \operatorname{cotg}\varphi^i_\varepsilon$$

unde R^i e raza cercului O^i.

Când punctul F descrie un cerc al fascicolului, primii membrii din (12) pentru $i = 1, 2, 3$, $\varepsilon = \pm 1$ rămân toți proporționali cu

anumite constante. Fie ρ factorul variabil de proporţionalitate. E clar că valorile cotangentelor din membrul al doilea sunt legate omografic prin mijlocirea lui ρ. Aşa dar fascicolele

$$O^i\ \Phi^j_{\varepsilon j}\ ,\ O^j\ \Phi^i_{\varepsilon i}$$

unde $\Phi^i_{\varepsilon i}$ e direcţia care face cu linia centrelor unghiul $\varphi^i_{\varepsilon i}$, sunt proiective. Considerând în particular razele relative la valorile $\rho = \infty$ şi $\rho = 0$, conchidem că razele omoloage ale fascicolelor de felul celor de mai sus, limitate la sistemul sizigetic direct, se taie în $3 \times 4 = 12$ puncte

$$(13) \qquad M^{ij}_{\varepsilon i\, \varepsilon j}$$

care descriu pe tot atâtea drepte perpendiculare pe linia centrelor diviziuni asemenea, în care punctele de pe linia centrelor se corespund.

Se vede acum uşor că două sisteme de puncte (13), relative la două stări de mărime ale lui ρ, se corespund într'o omologie a planului de centru: punctul dela infinit al direcţiei perpendiculare pe linia centrelor şi de axă: linia centrelor.

Insă punctele (13) sunt colineare, câte trei, pe dreptele $\Delta^*_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$. Deci aceste drepte suferă aceeaşi omologie. Rezultă că diviziunea punctelor $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ rămâne fixă.

In virtutea teoremei demonstrate aici, vom considera în cele ce urmează numai dreptele de segmentare echiunghiulară $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ ale sistemului direct $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1$.

(Va urma). D. BARBILIAN.

ASUPRA PROBLEMELOR 1386 şi 2889

Aceste probleme, a căror soluţie comună s'a publicat în *Gazetă* [XL, pag. 311], au provocat un interes deosebit, dovadă articolele D-lor GENERAL GH. I. POPESCU [1]) şi LOCOT. M. FOCŞENEANU [2]). problema 3760, propusă de D-l GENERAL G. BUICLIU, precum şi

1) G. M. XLI, pag. 127.
2) G. M. XLI, pag. 425.

rândurile de față. Păcat că corespondenții noștrii, n'au știut să găsească același interes pentru această chestiune care, chiar cu rândurile de față, nu se poate considera închisă.

Observ mai întâiu că cele două probleme sunt identice în fond, căci segmentele determinate pe o secantă de o iperbolă și asimptotele sale au același mijloc, iar dacă aceasta se află pe curbă, secanta devine tangenta iperbolei, punctul de contact fiind extremitatea diametrului iperbolei, conjugat direcțiunii tangentei căutate.

Acestea stabilite, dacă iperbola în chestiune este tangentă unui cerc dat, aceste două curbe admit aceeași tangentă în punctul de contact, deci și aceeași normală care, fiind raza cercului, trece mereu prin centrul acestuia. Punctele de contact ale tangentelor căutate, vor fi deci picioarele normalelor la iperbola căutată, duse din centrul fix al cercului dat. Ori acestea se găsesc pe iperbola lui APPOLONIUS relativă la centrul cercului și la iperbola căutată. Ori, se știe că iperbolele cari au ca asimptote două drepte date admit aceeași iperbolă a lui APPOLONIUS, relativă la un punct dat, în speță centrul cercului dat, care este circumscrisă patrulaterului determinat de centrul comun al iperbolelor considerate (intersecția dreptelor date), centrul cercului dat și proiecțiunile acestuia pe dreptele date, având centrul în mijlocul segmentului care unește cele două proecțiuni de mai sus, iar ca asimptote bisectoarele unghiului celor două drepte. Această iperbolă este astfel complect determinată, iar intersecțiile sale cu cercul dat vor fi punctele de contact ale tangentelor cerute în problema 1386. Fiecare punct de intersecție determină complect o iperbolă având ca asimptote dreptele date și tangenta cercului dat, astfel că obținem soluțiile problemei 2889.

Se vede imediat că această iperbolă este identică cu cea obținută de D-l GENERAL GH. I. POPESCU, însă calea urmată de noi este mult mai directă și mai naturală, punând în adevărata sa lumină rostul iperbolei echilatere descoperită pe căi deosebite.

Cu acestea, problemele nu se pot considera ca rezolvate căci rămâne de determinat intersecțiile iperbolei cu cercul, ceeace nu se poate efectua numai cu rigla și compasul căci ar urma ca în acest fel să putem construi rădăcinele unei ecuații de gradul al patrulea, la care conduce calculul algebric, concluzie absurdă ca și ipoteza.

Totuşi neputând merge mai departe pe această cale, putem socoti geometriceşte problemele ca rezolvate, rămânând încă de examinat numărul soluţiilor pe cari acestea le admit.

Inainte de a aborda această chestiune, ţin să subliniez iperbola descoperită de D-l M. FOCŞENEANU prin calcul, care îmi pare foarte curioasă prin imixtiunea ei în această problemă (1386 — 2889) şi căreia ar trebui să i se găsească o raţiune *geometrică* de a exista.

* * *

Pentru determinarea numărului de soluţiuni admise de problema 1386 — 2889, voi proceda prin calcul, pe care-l voi conduce de o manieră nouă, inspirată de una din consideraţiunile geometrice ce am făcut mai sus.

Aleg ca axe bisectoarele unghiului celor două drepte, al căror unghiu îl notez cu 2θ. Punând $\operatorname{tg}\theta = k$, ecuaţiile iperbolelor admiţând dreptele date ca asimptote vor fi.

$$y^2 - k^2x^2 + \lambda = 0, \tag{1}$$

λ variind dela o iperbolă la alta. Hiperbola lui APPOLONIUS relativă la toate iperbolele (1) şi la un punct fix $P(a, b)$ va avea ecuaţia

$$(1 + k)yx - bk^2x - ay = 0 \tag{2}$$

independentă de λ, iar un cerc cu centrul în $P(a, b)$ şi de rază R, va avea ecuaţia

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{3}$$

Punctele de contact ale tangentelor căutate se află, după cum am stabilit mai sus, la intersecţiile iperbolei (2) cu cercul (3) pe de o parte, iar pe de alta, sunt extremităţile diametrilor iperbolelor (1), conjugaţi direcţiunilor tangentelor căutate. Fie $y = mx$ ecuaţia unui asemenea diametru. Eliminând x şi y între ecuaţiile (2), (3) şi $y = mx$, obţinem pentru determinarea direcţiunii m, următoarea ecuaţie de gradul al patrulea

$$f(m) = \left(\frac{b - am}{1 + k^2}\right)^2 (k^4 + m^2) - R_m^{22} = 0. \tag{4}$$

Cercul fiind cuprins între două drepte $y = \pm kx$, ne vor interesa numai rădăcinile ecuației (4) cuprinse între $-k$ și $+k$, interval care se poate restrânge și mai mult, anume la (m_1, m_2), aceste valori fiind coeficienții unghiulari ai tangentelor la cerc, duse din origină, adică rădăcinile ecuației

$$(5) \qquad (b - am)^2 = R^2(1 + m^2).$$

Ba încă, de oarece ramura de iperbolă (2) care întâlnește cercul este situată deasupra axei Ox [1]), vom căuta numai rădăcinile pozitive ale ecuației (4) mai mici decât $m_1 > m_2$.

Observăm că $f(0) > 0$, $f\left(\frac{b}{a}\right) < 0$, deci avem întotdeauna o rădăcină pozitivă, cuprinsă în intervalul $\left(0, \frac{b}{a}\right)$, pentru ecuația (4).

Fie m_1 rădăcina cea mai mare a ecuației (5). Pentru această valoare, ecuația (4) devine

$$(1 + k^2)^2 f(m_1) = R^2 (m_1^2 - k^2)^2 > 0,$$

deci ecuația (4) are întotdeauna o rădăcină cuprinsă în intervalul $\left(\frac{b}{a}, m_1\right)$. La fel se găsește $f(m_2) > 0$, deci dacă $m_2 > 0$, intervalele în cari se găsesc rădăcinile pozitive ale ecuuației (4) sunt

$$\left(m_2, \frac{b}{a}\right), \left(\frac{b}{a}, m_1\right).$$

Las restul discuțiunii în grija corespondenților.

M. GHERMĂNESCU.

---

1) Dacă P (a, b) este deasupra acestei axe, adică $b > 0$. Dacă $b < 0$, iperbola se află dedesubt dar în acest caz vom căuta numai rădăcinile negative.

ASUPRA UNUI TRIUNGHIU SPECIAL

Să notăm cu Δ_{60} triunghiul, care are un unghiu de 60^0. Acest triunghiu se bucură de proprietăţi speciale, pe care le vom expune în acest articol.

Fie deci Δ_{60} ABC ($A = 60^0$; $BC = a, \ldots$) O, H, O_9, I, $I_a, \ldots$ notaţii clasice într'un triunghiu ; p, R, r notaţii cunoscute ; O_a, cercul (BIC) ; φ, punctul lui FEUERBACH ; $AA_h, \ldots$ înălţimele ; $M_a \ldots$ punctele euleriene ; $AA_i, \ldots$ bisectoarele ; $A_m, \ldots$ mijloacele laturilor.

1°. *Proecţiile medianelor corespunzătoare laturilor unghiului de 60° pe aceste laturi sunt egale.*

Să arătăm că :

$$B_h B_m = C_h C_m .$$

Evident B_h e deoparte, iar C_h de cealaltă a lui $B_m C_m$.

$$\widehat{B_m A_m C_m} = A \qquad \widehat{B_h A_h C_h} = \pi - 2A = A,$$

Dar :

$$\widehat{B_h A_h C_h} = \widehat{B_h A_m C_h} \qquad \text{— deci —} \quad \widehat{B_h A_m C_h} = \widehat{B_m A_m C_m}$$

ceeace implică :

$$\widehat{B_h A_m B_m} = \widehat{C_h A_m C_m}$$

prin urmare :

$$B_h B_m = C_h C_m .$$

Reciproca acestei proprietăţi este imediată.

2°. *Triunghiul* $A_m B_h C_m$ *e echilateral,* având :

$$\widehat{B_h A_m C_h} = \widehat{B_h C_h A_m} = A \ldots$$

Deasemenea triunghiurile $AB_m C_h$ şi $AB_h C_m$.

Patrulaterul inscriptibil $B_h B_m C_h C_m$ e trapez isoscel — rezultă dela 1°. Deci :

$$\widehat{AB_m C_h} = AC_h B_m = A$$

şi la fel corespondentele ...

3°. *Proecţia unei laturi a unghiului de 60° pe cealaltă este egală cu jumătatea celei care se proectă.*

Triunghiurile $AB_m C_h$, $AB_h C_m$ fiind echilaterale, deducem:

$$AB_m = AC_h \quad \text{şi} \quad AC_m = AB_h .$$

4°. *Porţiunea de înălţime ce pleacă din* A, *cuprinsă între vârf şi ortocentru, e egală cu raza cercului circumscris.*

$$AH = 2R \cos A = 2R \cos 60^0 = R,$$

5°. *Patrulaterul* $AI B_i B_i$ *este inscriptibil.*

$$\widehat{B_i I C} = \tfrac{1}{2}(B + C) = A \ldots$$

6°. *Porţiunea din bisectoarea lui* A, *cuprinsă între vârf şi centrul cercului înscris, este egală cu diametrul acestui cerc.*

$$r = AI \sin \tfrac{1}{2} A = AI \sin 30^0 \qquad AI = 2r.$$

7°. *Punctele* B, C, O, H, I, I_a *sunt pe un cerc simetric cercului circumscris în raport cu* BC.

Se ştie că O_a, centrul cercului BIC, se află în mijlocul arcului BC şi că acest cerc trece şi prin I_a, centrul cercului exînscris. (A se vedea de exemplu «Exercices de Géométrie» par F. G. M., 701, pag. 294). Raza acestui cerc e egală cu R, căci $O_a B$ şi $O_a C$ sunt laturi ale exagonului regulat înscris, BC fiind latura triunghiului echilateral. Deducem:

$$O_a B = O_a C = O_a O = O_a I = O_a I_a = R$$

ceeace arată că şi O e pe cercul (BCH_a) de rază R şi de centru O_a, simetricul lui O faţă de BC. Să arătăm că şi H. Condiţia:

$$\widehat{OBH} = \widehat{OCH} \quad \text{sau} \quad C - A = A - B$$

se vede că-i satisfăcută.

8°. *Punctele* A, B_h, C_h, H, O_g *sunt pe un cerc simetric cercului lui* EULER *în raport cu* $B_h C_h$.

A, B_h, C_h, H sunt pe cercul de diametru AH, deci de rază $\frac{1}{2}$ R. Dar:

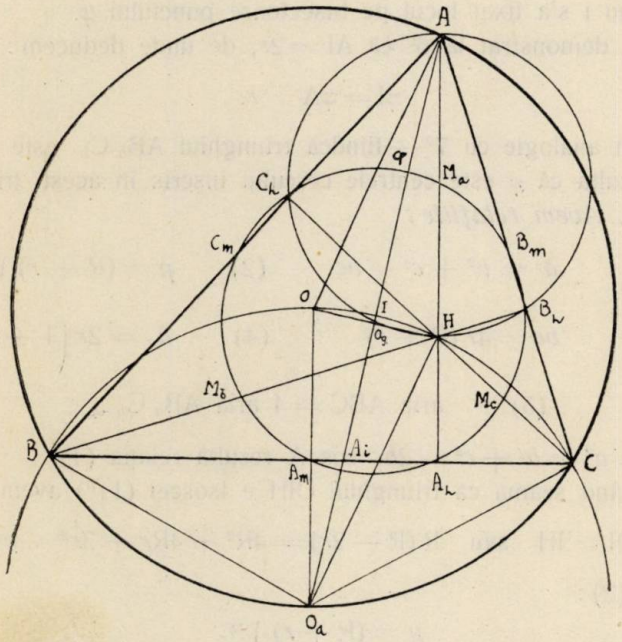
$$M_a O_9 = \tfrac{1}{2} R$$

ceeace arată că şi O_9 e pe acest cerc. Prin analogie cu 7°, deoarece şi triunghiul ortic $A_h B_h C_h$ este Δ_{60}, deducem că cercul $AB_h C_h HO_9$ trece prin ortocentrul acestui triunghiu.

9°. *Patrulaterul* $AHOO_a$ *e romb,* deoarece avem :

$$AH = HO_a = O_a O = OA = R.$$

Diagonalele acestui romb sunt bisectoarea unghiului A şi dreapta lui EULER. Conchidem deci ; într'un Δ_{60} $(A = 60°)$:



10°. *Bisectoarea interioară a unghiului* A, *limitată la cercul circumscris* şi *dreapta lui* EULER *sunt perpendiculare, tăindu-se reciproc în părţi egale.*

11°. *Triunghiul* OIH *este isoscel,* având unghiurile în O şi H, egale.

12°. *Centrul* O_9, *al cercului lui* EULER, *se găseşte în mijlocul bisectoarei* AO_a.

Această proprietate se poate enunţa şi ca loc geometric, astfel :

Locul centrelor cercurilor lui EULER, când BC este fixă, e un cerc cu centrul în A_m de rază R/2. Notând cu α', α'' respectiv punctele unde $O_a B$, $O_a C$ tae acest cerc, se vede că nu fac parte din loc decât arcul $\alpha' O \alpha''$.

13°. *Punctul* φ, *al lui* FEUERBACH, *se găseşte pe bisectoarea lui* A, *în mijlocul lui* AI.

E consecinţa faptului că centrul cercului lui EULER se află pe bisectoare. Această proprietate face subiectul problemei 4325 propusă de D-l V. THÉBAULT, căreia nu i s'a dat o soluţie geometrică şi nu i s'a fixat locul pe bisectoare punctului φ.

Am demonstrat la 6° că $AI = 2r$, de unde deducem:

$$\varphi I = \varphi A = r.$$

Prin analogie cu 7° — fiindcă triunghiul $AB_h C_h$ este evident Δ_{60} — rezultă că φ este centrele cercului înscris în acest triunghiu.

14°. *Avem relaţiile:*

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ (2) $p = (R + r)\sqrt{3}$

(3) $bc = 4r(R + r)$ (4) $h_a = 2r\left(1 + \frac{r}{R}\right)$

(5) aria ABC = 4 aria $AB_h C_h$.

Din $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ rezultă relaţia (1).

Ţinând seamă că triunghiul OIH e isoscel (11°) avem:

$$OI = IH \quad \text{sau} \quad R(R - 2r) = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$$

care dă (2):

$$p = (R + r)\sqrt{3}.$$

Scriind:

$$S = \tfrac{1}{4} bc\sqrt{3} = pr = r(R + r)\sqrt{3}$$

deducem (3): $bc = 4r(R + r)$.

Insemnând cu h_a înălţimea din A, putem scrie:

$$h_a = \frac{bc}{2R} = \frac{4r(R + r)}{2R} = \frac{2r(R + r)}{R} = 2r\left(1 + \frac{r}{R}\right) \quad (4)$$

Relaţia (5) între arii rezultă uşor, având în vedere 3°.

15°. *Se demonstrează uşor, că într'un* Δ_{60}, *triunghiurile: ortic, al contacturilor, tangenţial şi* $I_a I_b I_c$ *sunt deasemenea* Δ_{60}.

Notă. In 1851, IACOBI numeşte un asemenea triunghiu semiregulat în unghiuri.

DR. E. WÖEFFING în articolul „Uber specielle Dreiecke" menţionează următoarea proprietate ale Δ_{60}-lui în revista „Die Mathematich-naturwissenschaftlichen Mitteilungen" 1901 — 2, Band, Seite 53 :

Să notăm cu D intersecţia medianei lui AB cu înălţimea lui AC şi cu D' intersecţia medianei lui AC cu înălţimea lui AB.

Punctele D şi D' sunt pe bisectoarea unghiului $A = 60°$.

ILIE IOAN ŢIŢEICA
Elev, liceul militar M-rea Dealu

NOTE MATEMATICE

37. **Acum o sută de ani în lumea matematică.** *Date culese în biblioteca Seminarului Matematic din Iaşi din publicaţiile timpului.*

Acum o sută de ani trăiau matematicienii GAUSS, CAUCHY, JACOBI. GAUSS se ocupa, în această epocă aproape exclusiv cu fizica. CAUCHY publica diverse lucrări de teoria funcţiunilor şi de teoria ecuaţiilor diferenţiale. JACOBI mai publica lucrări de teoria funcţiunilor eliptice şi se ocupa cu teoria ecuaţiilor diferenţiale şi cu calculul variaţiilor.

In 1836 n'au apărut lucrări de importanţă fundamentală cum sunt de pildă «Disquisitiones» a lui GAUSS sau «Geometria imaginară» a lui LOBATCHEVSKI. Au apărut însă lucrări foarte importante ale lui CAUCHY, JACOBI, STURM, LIOUVILLE etc. Cu acestea ne vom mai ocupa.

Un eveniment important al anului a fost apariţia «Jurnalului de Matematici pure şi aplicate».

I. JOSEPH LIOUVILLE *înfiinţează „Journal de Mathématiques pures et appliquées"*. Această revistă, care mai apare şi azi, este menită, după cum se spune în prefaţa primului număr, să ia locul publicaţiunii «Annales de Mathématiques pures et appliquées» (a lui GERGONNE), care îşi încetase apariţia în 1831.

Citãm din prefațã: «Depinde acum de geometrii și mai ales de geometrii francezi să facă să prospere această întreprindere. Cei mai însemnați dintre ei ne-au și promis articole și, fără îndoială, își vor ține promisiunea».

Și-au ținut-o în adevăr. Dintre colaboratorii primului volum menționăm: AMPÈRE, CHASLES, PLUCKER, LAMÉ, CORIOLIS, JACOBI, LIOUVILLE, STURM. Jurnalul lui LIOUVILLE a fost și este până azi una din cele mai importante reviste de matematici din întreaga lume.

38. *Rezolvarea unui sistem diofantian în numere întregi.* Fie de rezolvat în numere întregi sistemul

$$b^2 + c^2 + d^2 = 2a^2 \tag{1}$$

$$b^4 + c^4 + d^4 = 2a^4. \tag{2}$$

Presupun $d = 1$ și caut o soluție rațională a sistemului. Din (1) și (2) se scoate

$$b^4 + c^4 + d^4 = 2(b^2c^2 + c^2d^2 + d^2b^2)$$

$$\therefore \quad (b^2 - c^2)^2 = d^2[2(b^2 + c^2) - d^2]$$

care pentru $d = 1$ necesită

$$2(b^2 + c^2) - 1 - z^2$$

$$b^2 - c^2 = z$$

de unde

$$b^2 = \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 \quad \text{și} \quad c^2 = \left(\frac{z-1}{2}\right)^2. \tag{3}$$

Ducând aceste valori în (1), unde se face $d = 1$, găsim

$$2a^2 = \frac{z^2 + 3}{2}. \tag{4}$$

Să determinăm pe z așa ca $z^2 + 3$ să fie pătrat. Pentru aceasta este suficient a lua

$$z^2 + 3 = (z + t)^2 \tag{5}$$

unde t este un număr întreg.

Din (5) se scoate

$$z = \frac{3 - t^2}{2t}$$

care dus în (3) şi (4) dă sistemul

$$a = \frac{z + t}{2} = \frac{3 + t^2}{4t}$$

$$b = \frac{3 - 2t^2 + 2t}{4t}$$

$$c = \frac{3 - t^2 - 2t}{4t}$$

care satisface sistemul (1) , (2) pentru $d = 1$, în numere raţionale şi adică avem

$$\left(\frac{3 - t^2 + 2t}{4t}\right)^x + \left(\frac{3 - t^2 - 2t}{4t}\right)^x + 1 = 2\left(\frac{3 + t^2}{4t}\right)^x$$

sau

$$\left(\frac{t^2 - 2t - 3}{4t}\right)^x + \left(\frac{t^2 + 2t - 3}{4t}\right)^x + 1 = 2\left(\frac{3 + t^2}{4t}\right)^x$$

unde $x = 2$ şi 4. De aici se deduce imediat o soluţie în numere întregi

$$(t^2 - 2t - 3)^x + (t^2 + 2t - 3)^x + (4t)^x = 2(3 + t^2)^x$$

pentru $x = 2$ şi 4.

Ca aplicaţiuni numerice pentru $t = 2$; 4 găsim următoarele rezultate:

$$t = 2 \quad \begin{cases} 3^2 + 5^2 + 8^2 = 2 \cdot 7^2 = 98 \\ 3^4 + 5^4 + 8^4 = 2 \cdot 7^4 = 4802 \end{cases}$$

$$t = 4 \quad \begin{cases} 5^2 + 16^2 + 21^2 = 2 \cdot 19^2 = 722 \\ 5^4 + 16^4 + 21^4 = 2 \cdot 19^4 = 260642 . \end{cases}$$

A. GLODEN
(Prof. Ateneul din Luxemburg).

CHESTIUNI DE EXAMEN

CONCURSUL « GAZETEI MATEMATICE »

16 Aprilie 1936

CLASA IV-a

Geometria în spaţiu. Un trapez isoscel ABCD are baza mare $BC = 18$, baza mică $\overline{AD} = 6$ şi perimetrul egal cu $12\,(2+\sqrt{2})$.

Se construeşte dreptunghiul CDEF (CD fiind una din laturile egale ale trapezului) aşa fel încât trapezul şi dreptunghiul să nu fie de aceeaşi parte a dreptei CD, iar $\overline{DE} = 10\sqrt{2}$.

a) Să se arate că volumul corpului obţinut prin rotaţia trapezului ABCD în jurul dreptei CD este a treia parte din volumul corpului obţinut prin rotaţia trapezului în jurul dreptei EF.

b) Pe tangenta în B la cercul descris de punctul B în rotaţia în jurul dreptei EF se ia punctul G. Să se dovedească relaţia:

$$2\,\overline{AG}^2 + \overline{DG}^2 = 2\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2.$$

Algebra elementară. I. Unui comerciant i se iartă 60% din datoriile sale, printre altele cu condiţiunea de a depune la Stat o cotă de 1% din restul rămas de plată, plus 2% din suma iertată.

Achitând datoria redusă şi depunând cota fixată câştigă 116.800 lei faţă de cazul când nu ar fi plătit nici o cotă, dar ar fi trebuit să achite datoriile integral.

Ce datorii avea acel comerciant?

II. Ştiind că $i^2 = -1$.

1°. Să se efectueze calculul:

$$(1-i)\,(2-i)^2\,(3-i)^3.$$

2°. Să se arate că:

$$\left[[(1+i)^2 - i]^4 + i\right]^2 - i\Big]^4 \equiv 1.$$

(Ambele chestiuni sunt obligatorii).

CLASA V-a

Geometria plană. In trapezul dreptunghic ABCD, AD este latura perpendiculară pe baze. Cercul (C) descris pe una din baze AB ca diametru întâlneşte latura BC în M, iar paralela dusă prin B la diagonala AC în N.

Dacă P este simetricul punctului N în raport cu latura AB, să se arate că punctele D, M, P sunt în linie dreaptă.

Algebra elementară. Se dă ecuaţia:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

având rădăcinile egale.

Se cere:

1°. Să se găsească un număr λ diferit de zero astfel ca mărind coeficienţii ecuaţiei date cu acel număr să obţinem o ecuaţie care să aibă rădăcinile tot egale.

2°. Să se scrie ecuaţia astfel obţinută.

3°. Să se arate că nu există decât o singură valoare pentru λ.

4°. Să se deducă egalitatea:

$$4(2b - a - 4c)(2b - c - 4a) = (5b - 4a - 4c)^2,$$

valabilă în condiţiunile din enunţ.

5°. Să se găsească raportul dintre rădăcinile celor 2 ecuaţii.

Aplicaţie: $a = 4$; $b = 12$; $c = 9$.

CLASA VI-a

Geometria în spaţiu. Un trapez isoscel ABCD are baza mare $\overline{BC} = 6a$, baza mică $\overline{AD} = 2a$ şi perimetrul egal cu $4a(2 + \sqrt{2})$.

1°. Să se afle volumul corpului S format când se roteşte trapezul ABCD în jurul dreptei CD (CD fiind una din laturile egale).

2°. La ce distanţă de CD trebue dusă o paralelă xy dreptei CD pentru ca volumul corpului S' rezultat din rotirea trapezului ABCD în jurul dreptei xy să fie în raportul k cu volumul corpului S.

3°. Pe tangentele în A şi B la cercurile corpului S', trecând prin A şi B se ia respectiv segmentele:

$$\overline{AF} = b \ , \ \overline{BE} = 3b.$$

Să se arate că dreptele CE şi DF sunt în acelaş plan. Să se calculeze lungimea segmentului DE.

BIBLIOTECA CENTRALA ASOCIAŢIUNII SIBIIU

Trigonometria. I. Se dă: $\operatorname{tg} 2a = m$. Se cere să se calculeze $\operatorname{tg} 3a$. Să se explice pentru ce se găsesc două valori, şi să se arate că aceste valori sunt rădăcinile ecuaţiei

$$m(m^2 - 3)t^3 + 2(3m^2 - 1)t - m(m^2 - 3) = 0.$$

II. Se consideră un punct M în interiorul unui triunghiu ABC. Se notează cu

$$(AB, AM) = \varphi_1 \ ; \ (BC, BM) = \varphi_2 \ ; \ (CA, CM) = \varphi_3.$$

Să se demonstreze relaţiile:

1°. $$\sum \frac{a^2}{\operatorname{cotg}\varphi_2 + \operatorname{cotg}(C - \varphi_3)} = 2S;$$

2°. $$\operatorname{cotg}\varphi_1 \operatorname{cotg}\varphi_2 \operatorname{cotg}\varphi_3 - \sum \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}\varphi_2 \operatorname{cotg}\varphi_3 + \sum \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}\varphi_3 = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C.$$

CLASA VII-a

Geometria descriptivă. Pe pagina a doua a foii de hârtie se va executa următoarea epură:

O linie dreaptă, de profil, GM, trece prin punctul T (40, 40, 61) *) şi face cu planul orizontal un unghiu de două ori mai mare decât cel pe care îl face cu planul vertical de proiecţiune (G este urma verticală şi M urma orizontală a dreptei).

Se ia, pe linia pământului, plecând dela linia de ordine a punctului T, spre dreapta, punctul I, situat la o distanţă egală cu de două ori cea mai mică distanţă dintre linia pământului şi dreapta GM, şi se construeşte triunghiul GMI.

Se cere să se construiască adevărata mărime a triunghiului GMI, cu minimum de construcţii.

Linia pământului paralelă cu marginile mici ale paginei şi la 170 mm de sus în jos.

Algebra. I. Se consideră toate produsele de forma $x_i x_j$, unde i şi j sunt două numere întregi diferite şi cuprinse între 0 şi n (n întreg şi pozitiv). Se cere:

1°. Numărul acestor produse;

2°. Suma tuturor indicilor lor;

3°. Suma produselor indicilor acestor produse.

II. Să se studieze variaţia funcţiunii:

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^m},$$

după diversele valori ale lui m. Să se reprezinte grafic pentru $m = 1$ şi $m = 2$.

CLASA VIII-a

Geometria analitică. I. Se consideră o conică (C) şi o direcţiune (Δ). Pe fiecare coardă paralelă cu Δ se înseamnă punctele M, care determină segmente al căror raport este egal cu $(-k)$, parametrul k fiind o constantă numerică dată.

1°. Să se găsească locul punctelor M.

2°. Să se examineze cazul limită $k = -1$.

3°. Deasemenea să se examineze cazurile particulare, când Δ este direcţiunea axei conicei.

4°. a şi b fiind semiaxele conicei date, cu centru la distanţă finită, să se construiască locul punctelor M în cazul particular $k = \frac{ab + 1}{ab - 1}$, iar Δ reprezentând direcţiunea bisectoarei a doua a unghiului axelor conicei date.

II. In planul a două axe ortogonale, OX, OY, sunt date două puncte: A (a, a'), B (b, b').

*) Primul număr reprezintă depărtarea liniei de ordine a punctului T, dela marginea din stânga a hârtiei; al doilea număr depărtarea şi al treilea cota.

1°. Să se găsească locul punctelor M din plan, astfel încât MA şi MB să determine pe una din axe puncte simetrice în raport cu originea O.

2°. Să se construiască locul punctelor M.

3°. Să se examineze cazul când punctele date A şi B sunt simetrice în raport cu una din axe sau în raport cu originea O.

4°. Să se dea alte cazuri particulare interesante.

Algebra. Se dă ecuaţia de gradul al patrulea

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

1°. Să se arate că între rădăcinile ei există o relaţie de forma

$$x_3^2 + x_4^2 = u\,(x_1^2 + x_2^2),$$

u fiind rădăcina unei ecuaţii reciproce $\varphi(u) = 0$, de gradul al şaselea în u.

2°. Să se explice rezultatul.

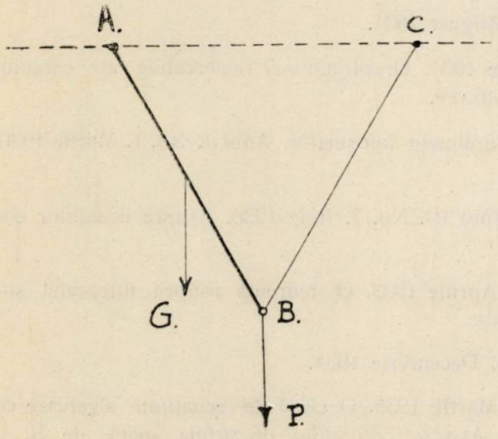
3°. Să se reducă ecuaţia $\varphi(u) = 0$ la o ecuaţie $\Psi(v) = 0$, de gradul al treilea în v şi să se deducă condiţia ca $\varphi(u) = 0$ să aibă două rădăcini reale, efectuând schimbarea de necunoscută

$$z = \frac{v - 2}{v + 2}. \qquad (v \text{ real})$$

4°. Să se deducă o metodă pentru rezolvarea ecuaţiei de gradul al patrulea $f(x) = 0$.

5°. Aplicaţie pentru $a = -11$, $b = 41$, $c = -61$, $d = 30$.

Mecanica. I. O bară AB omogenă de lungime l=1m şi greutate G=4 kg este articulată în A, astfel că se poate roti într'un plan vertical. Un fir flexibil, legat într'un punct fix C pe orizontala lui A la distanţa AC = l, trece printr'un inel foarte mic fixat în B şi este întins de o greutate P.



1. Ştiind că bara AB este în echilibru atunci când figura ABC este un triunghiu echilateral se cere să se calculeze valoarea greutăţii P.

Se vor neglija toate frecările.

2. Se dă drumul barei AB din poziţia orizontală (când B coincide cu C), până în poziţia de echilibru arătată mai sus. Să se calculeze lucrul mecanic total efectuat de P şi G şi să se exprime rezultatul în kgm şi unităţi C. G. S.

II. Dintr'un avion ce sboară pe orizontală cu vitesa uniformă V la înălţimea H se dă drumul unei bombe de masă *m*.

La ce distanţă dela verticala punctului de lansare va ajunge bomba pe pământ ?

Nu se va ţine seama de rezistenţa aerului.

III. Diagonala AC a unui patrulater oarecare ABCD împarte patrulaterul în două triunghiuri ale căror centre de greutate fie M şi N ; să notăm cu I punctul de intersecţie al dreptelor MN şi AC.

Să se demonstreze că punctul G situat pe MN între M şi N astfel ca să avem :

$$MG = NI$$

este centrul de greutate al suprafeţei patrulaterului.

(Timpul acordat : 3 ore).

BIBLIOGRAFIE

Boletin Matematico Elemental. Anul I. No. 7. Septemvrie 1930 Buenos-Aires.

Idem. No. 9 — 10. Noemvrie-Decemvrie 1930.

Idem. Anul II. No. 1. Martie 1931.

Idem. No. 2. Aprilie 1931.

Idem. No. 5 — 6. Iulie-August 1931.

Idem. No. 7. Septemvrie 1931 Dreptunghiuri remarcabile ale cercului celor nouă puncte de B. I. BAIDAFF.

Boletin Matematico. Supliment informativ. Anul I. No. 1. Martie 1930. Buenos-Aires.

Boletin Matematico. Anul III. No. 7. Iulie 1930. Asupra ecuaţiilor conicelor, de C. DIEULEFAIT.

Idem. Anul VI. No. 2. Aprilie 1933. O teoremă asupra integralei sumabile (L, δ), de J. C. VIGNAUX.

Idem. Anul VII. No. 10. Decemvrie 1934.

Idem. Anul IX. No. 1. Martie 1935. O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice, de V. ALACI. Triunghiul de prima speţă, de B. I. BAIDAFF.

CERERI

256. De curând a murit D-na CONSTANȚA ZOSIMA, licențiată în matematici dela Paris, în 1895, — născută POMPILIAN, — fostă redactoare la *Gazeta Matematică*. Care au fost licențiatele în matematici înainte de dânsa ?

I. I.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

PAUL STÄCKEL & FRIEDRICH ENGEL. GAUSS, les deux BOLYAI et la géométrie non euclidienne. Traduit par L. LAUGEL. Paris 1897.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

C. ALASIA. Sul triangolo di specie data inscritto in un triangolo. Livorno 1915.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 1734. *Se consideră funcțiunea :*

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & x & x+1 \\ x & x+1 & ax \\ x+1 & x & 0 \end{vmatrix},$$

și se cere :

1°. *Să se determine* a *astfel ca această funcțiune să nu aibă nici maximum, nici minimum.*

2°. *Să se studieze pentru toate valorile lui* a *variația funcțiunei*

$$\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

T. LALESCU.

Soluția. 1°. Dezvoltând determinantul, se găsește că

$$f(x) = 2(a-1)x^2 - 3x - 1.$$

Pentru ca această funcțiune să nu aibă nici maximum, nici minimum, trebue ca derivata sa

$$f'(x) = 4(a-1)x - 3,$$

să păstreze un semn constant. Acest lucru se întâmplă când $a = 1$.

2°. Avem de studiat variația funcțiunei

$$y = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4(a-1)x - 3}{2(a-1)x^2 - 3x - 1},$$

care are ca derivată

$$y' = -\frac{8(a-1)^2x^2 - 12(a-1)x + 4(a-1) + 9}{[2(a-1)x^2 - 3x - 1]^2}.$$

Numărătorul acestei fracții se anulează pentru

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-8a-1}}{4(a-1)}.$$

Funcțiunea devine discontinuă pentru valorile

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{8a+1}}{4(a-1)}.$$

Variația funcțiunei se desparte acum în 5 cazuri după valorile lui a.

I. $a < -\frac{1}{8}$. Tabloul variației funcțiunei este

x	$-\infty$		$\frac{3+\sqrt{-8a-1}}{4(a-1)}$		$\frac{3-\sqrt{-8a-1}}{4(a-1)}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	descr.	$\frac{4(a-1)}{\sqrt{-8a-1}}$ Minim	cr.	$\frac{4(a-1)}{-\sqrt{-8a-1}}$ Maxim	descr.	0

II. $a = -\frac{1}{8}$. Funcțiunea se reduce la: $y = \frac{6}{3x+2}$ și tabloul de variație este

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	0	descr.	$-\infty \mid +\infty$	descr.	0

Curba reprezentativă este o hiperbolă echilateră.

III. $-\frac{1}{8} < a < 1$. Tabloul de variație este

x	$-\infty$		$\frac{3+\sqrt{8a+1}}{4(a-1)}$		$\frac{3-\sqrt{8a+1}}{4(a-1)}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	
y	0	descr.	$-\infty \mid +\infty$	descr.	$-\infty \mid +\infty$	descr.	0

(Curba reprezentativă are trei asimptote).

IV. $a = 1$. Funcțiunea se reduce la: $y = \frac{3}{3x+1}$ și tabloul de variație este

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	0	descr.	$-\infty \mid +\infty$	descr.	0

Curba reprezentativă este o hiperbolă echilateră.

V. $a > 1$. Tabloul de variație este

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{8a+1}}{4(a-1)}$		$\frac{3+\sqrt{8a+1}}{4(a-1)}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	
y	0	descr.	$-\infty \mid +\infty$	descr.	$-\infty \mid +\infty$	descr.	0

(Curba reprezentativă are trei asimptote).

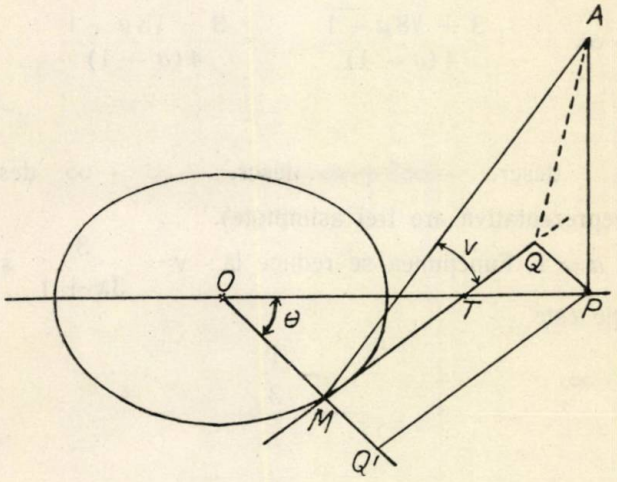
S'a primit o soluție necompletă dela D-l G. G. CONSTANTINESCU.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 3335. *Să se găsească pe un cerc dat, punctele în care unghiul format de tangenta în acele puncte, cu dreapta care le unește cu un punct dat (afară din planul cercului sau în plan) este maxim sau minim. Generalizare.*

B. IG. BAIDAFF.

Fie (O, r) cercul dat, A un punct fix oarecare în spațiu, P proiecția lui A pe planul cercului O, M un punct variabil pe O, T intersecția lui OP cu tangenta în M la O, Q proiecția lui P pe MT, v unghiul AMQ, θ unghiul MOT și Q' proiecția lui P pe OM.



Din construcțiile făcute rezultă că $AQ \perp MQ$ și deci triunghiul dreptunghic AQM dă

$$\operatorname{tg} AMQ = \frac{QA}{MQ} = \operatorname{tg} v. \qquad (1)$$

Trebue aflat maximul și minimul lui v dat de (1). Dacă notăm cu p și q lungimile OP și PA și urmărim figura se găsește cu ușurință

$$QA = \sqrt{\overline{QP}^2 + \overline{PA}^2} = \sqrt{\overline{TP}^2 \cos^2\theta + d^2}\,.$$

Dar

$$TP = OP - OT = p - \frac{r}{\cos\theta}$$

aşa că

$$QA = \sqrt{\left(p - \frac{r}{\cos\theta}\right)^2 \cos^2\theta + d^2} = \sqrt{p^2\cos^2\theta - 2pr\cos\theta + r^2 + d^2}. \quad (2)$$

Apoi

$$MQ = Q'P = OP \sin\theta = p \sin\theta. \quad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) se scoate

$$\operatorname{tg} v = \frac{\sqrt{p^2\cos^2\theta - 2pr\cos\theta + r^2 + d^2}}{p\sin\theta}$$

$$\therefore \quad v = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{p^2\cos^2\theta - 2pr\cos\theta + r^2 + d^2}}{p\sin\theta} \quad (4)$$

$$\therefore \quad v' = p\frac{pr\cos^2\theta - (p^2 + r^2 + d^2)\cos\theta + pr}{(p^2 - 2pr\cos\theta + r^2 + d^2)\sqrt{(p\cos\theta - r)^2 + d^2}}. \quad (5)$$

Numitorul lui v' fiind totdeauna pozitiv, ne vom ocupa numai de numărător. Rădăcinile ecuaţiei

$$pr\cos^2\theta - (p^2 + r^2 + d^2)\cos\theta + pr = 0$$

sunt reale, una din ele are valoare absolută mai mare decât 1 deci nu e admisibilă, cealaltă are valoarea

$$\cos\theta = \frac{p^2 + r^2 + d^2 - \sqrt{(p^2 + r^2 + d^2) - 4p^2r^2}}{2pr}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{p^2 + r^2 + d^2 - \sqrt{[(p+r)^2 + d^2][(p-r)^2 + d^2]}}{2pr}. \quad (6)$$

Pentru θ dat de (6) derivat v' anulându-se vom avea pentru v maxim sau minim. Făcând în (5) pe θ să varieze dela 0 la 2π, observăm că pentru $\theta = 0$ numărătorul lui (5) e negativ, pentru

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < 3\frac{\pi}{2}$$

acelaşi numărător e pozitiv pentru a deveni negativ pentru

$$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi.$$

Din aceasta rezultă dacă $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, v descreşte, iar dacă $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, v creşte. Prin urmare v dat de (4) are un minim pentru θ dat de (6) când acea valoare e cuprinsă între 0 şi $\frac{\pi}{2}$ şi un maxim când valoarea lui θ dat de (6) e cuprinsă între $\frac{3\pi}{2}$ şi 2π.

Observ ţiuni. 1°. Formula (6) se mai poate scrie:

$$\cos\theta = \frac{[\sqrt{(p+r)^2+d^2} - \sqrt{(p-r)^2+d^2}]^2}{(p+r)^2-(p-r)^2}$$

şi dacă punem:

$$p + r = d\,\mathrm{tg}\gamma \quad , \quad p - r = d\,\mathrm{cotg}\beta$$

se găseşte

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{\sin\beta\sin\gamma}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \,. \tag{7}$$

2°. Unghiul θ dat de (6 se poate construi geometriceşte cu ajutorul formulelor (7) în felul următor. Se construeşte un triunghiu ABC în care unghiurile B şi C sunt respectiv egale cu β şi γ. Din C se duce perpendiculara CD pe bisectoarea AE a triunghiului ABC. Se construeşte un triunghiu MNP, dreptunghic în N şi care să aibă ipotenuza MP şi cateta MN respectiv egale cu AD şi DE. Unghiul PMN este tocmai unghiul θ dat de (7, după cum se poate verifica uşor cu ajutorul relaţiilor metrice între elementele unui triunghiu.

Generalizare. Să considerăm în general familia de curbe

$$(1) \qquad F(x, y, z, \alpha) = 0 \quad , \quad G(x, y, z, \alpha) = 0$$

şi suprafaţa

$$(2) \qquad H(x, y, z) = 0.$$

Pentru o valoare dată lui α se va stabili cosinusul unghiului format de tangenta la curba (1) şi tangenta la curba dată de (2) şi una din suprafeţele (1) în un punct comun.

B. IG. B.

Notă. 1°. O soluţiune parţială pentru un caz cu totul particular a dat D-l GH. M. ŞEREMET.

2°. A se vedea şi soluţia parţială dela pag. 182, Vol. XXXVII.

PROBLEMA 3563. *In orice triunghiu avem relaţia*

$$\frac{a'^2(r+r_a)}{r_a}+\frac{b'^2(r+r_b)}{r_b}+\frac{c'^2(r+r_c)}{r_c}=12r^2,$$

notaţiile fiind cele cunoscute, iar a', b', c' *laturile triunghiului ortic.*

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: I. BUCURESCU, C. COŞNIŢĂ, C. V. COSTĂCHESCU, I. N. CRAIU, P. I. GHIŞOIU, I. VASILIEV şi GH. GH. VASILIU.

Folosind formulele cunoscute precum şi

$$a'^2=4r^2\cos^2\tfrac{1}{2}A=4r^2\cdot\frac{p(p-a)}{bc},$$

avem

$$\frac{a'^2(r+r_a)}{r_a}=4r^2\frac{\frac{p(p-a)}{bc}\left(\frac{S}{p}+\frac{S}{p-a}\right)}{\frac{S}{p-a}}$$

$$=4r^2\frac{\frac{2p-a}{bc}}{\frac{1}{p-a}}=4r^2\frac{a(b+c)(b+c-a)}{2abc},$$

şi la fel pentru celelalte două rapoarte. Prima parte a identităţii este deci egală cu

$$\frac{2r^2}{abc}[a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)]$$

$$=\frac{2r^2}{abc}\cdot 6abc$$

adică tocmai partea a doua.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4375. *Intr'un triunghiu, există relaţia:*

$$\sum \frac{bc}{\alpha^2} = 2 + \frac{R}{r}$$

notaţiile fiind cele obişnuite, iar α, β, γ *semnificând segmentele de bisectoare interioare, corespunzând vârfurilor* A, B, C, *cuprinse între vârfuri şi laturile opuse.*

C. IONESCU-BUJOR.

Dacă

$$\overline{AD} = \alpha \text{ , din triunghiul ABD,}$$

$$\frac{\alpha}{\sin B} = \frac{c}{\sin \widehat{ADB}};$$

dar

$$\sin\widehat{ADB} = \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{B-C}{2},$$

deci

$$\alpha = \frac{c \sin B}{\cos\dfrac{B-C}{2}}. \tag{1}$$

De asemenea, din triunghiul ADC,

$$\alpha = \frac{b \sin C}{\cos\dfrac{B-C}{2}}, \tag{2}$$

iar din egalităţile (1) şi (2),

$$\frac{bc}{\alpha^2} = \frac{\cos^2\dfrac{B-C}{2}}{\sin B \sin C}, \tag{3}$$

deci

$$\sum \frac{bc}{\alpha^2} = \frac{1}{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C} \sum \sin A \cos^2\frac{B-C}{2}. \tag{4}$$

Transformând succesiv,

$$\sum \sin A \cos^2 \frac{B-C}{2} = \sum 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

$$= \sum \frac{1}{2} (\sin B + \sin C)(\cos B + \cos C)$$

$$= \sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C + \frac{1}{2} \sum \sin (B + C)$$

$$= \frac{1}{2} [\sum \sin 2A + \sum \sin A]$$

$$= 2 \left(\sin A \sin B \sin C + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \right).$$

Inlocuind în (4),

$$\sum \frac{bc}{\alpha^2} = 2 + \frac{1}{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = 2 + \frac{abc}{4 (p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= 2 + \frac{pabc}{4s^2} = 2 + \frac{R}{r}.$$

Au rezolvat problema D-nii : CSEKE WILHELM (student, Cluj), MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU (Liceul Fraţii Buzeşti, Craiova), VASILE GR. BOGZA, P. P. COJOCARU (Piatra Neamţ), A. DOBRESCU (R.-Sărat), VINTILĂ GRIGORESCU, DIMITRIE MAVRODIN, NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila), MILU I. NICOLAE (Liceul militar Chişinău); RADU APOSTOL, DAN MARIN, PAUL DOBRESCU, M. MĂNAC, M. C. POSTELNICESCU, I. GH. ŞABAC, NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU, ILIE ION ŢIŢEICA (Liceul militar Nicolae Filipescu); IANCU N. SAGER, TUDOR STOICESCU, GHEORGHE TUDOREL (Brăila); IOAN GR. BOGDAN, BUCUR N. VIRGIL, ION I. BUZINCU, CEAUŞESCU VASILE, I. D. ENACHE, ENĂŞESCU D. D. VICTOR, C. N. GAVRILESCU (Liceul militar Iaşi), C. S. COTESCU şi CĂLIN I. C. DIMITRIU.

Notă. a) *Dacă* α', β', γ' *reprezintă segmentele de bisectoare exterioare, corespunzând vârfurilor* A, B, C, *cuprinse între vârfuri şi laturile opuse, există relaţia*

$$\sum \frac{bc}{\alpha'^2} = \frac{R}{r} - 2. \qquad (5)$$

Notând $AD' = \alpha'$, triunghiul DAD' este dreptunghiu, deci

$$\sin\widehat{AD'D} = \cos\widehat{ADB} = -\cos\left(B + \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{B-C}{2}.$$

Din triunghiul AD'B se deduce

$$\alpha' = \frac{c\sin B}{\sin\dfrac{B-C}{2}}, \tag{6}$$

iar din triunghiul AD'C,

$$\alpha' = \frac{b\sin C}{\sin\dfrac{B-C}{2}}. \tag{7}$$

Deci

$$\frac{bc}{\alpha'^2} = \frac{\sin^2\dfrac{B-C}{2}}{\sin B\,\sin C} \tag{8}$$

$$\sum\frac{bc}{\alpha'^2} = \frac{1}{\sin A\,.\,\sin B\,.\,\sin C}\sum\sin A\,\sin^2\frac{B-C}{2}. \tag{9}$$

Dar

$$\sum\sin A\,\sin^2\frac{B-C}{2} = \sum 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{B-C}{2}$$

$$= \sum\frac{1}{2}(\sin B - \sin C)(\cos C - \cos B) = \sum\frac{1}{2}\sin(B+C) - \sum\sin A\,\cos A$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum\sin A - \sum\sin 2A\right) = 2\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin A\,\sin B\,\sin C\right)$$

și înlocuind în (9),

$$\sum\frac{bc}{\alpha'^2} = \frac{1}{4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}} - 2 = \frac{R}{r} - 2.$$

b) *In orice triunghiu, există relația*

$$\sum bc\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha'^2}\right) = 4$$

α și α' reprezentând segmentele de bisectoare interioară și exterioară, corespunzătoare unghiului A, *cuprinse între vârf și latura opusă.*

C. I. B.

PROBLEMA 4379. *Să se rezolve ecuația :*

$$(\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x)^3 = \sin^3 x + \cos^3 x + \operatorname{tg}^3 x.$$

BOIAN ION.

Soluție dată de D-nii: P. COJOCARU (Piatra Neamț), PAUL DOBRESCU (Liceul militar «N. Filipescu»), E. M. I. GOLDENBERG (Liceul «N. Bălcescu» Brăila), VINTILĂ GRIGORESCU, DAN MARIN (Liceul militar «Mânăstirea Dealu»), GR. MARTEȘ (Școala Navală), D. D. MAVRODIN (Liceul «M. Eminescu»), L. M. A. NEGREA (Brăila) și MAZILU C. PANAIT (elev inginer).

Ținând seamă de identitatea:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

ecuația dată se reduce la:

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{tg} x) = 0.$$

Ecuația:

$$\sin x + \cos x = 0 \quad ; \quad \frac{\sin x}{\cos x} + 1 = 0 \quad ; \quad \operatorname{tg} x = -1$$

ne dă rădăcinile:

$$x = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Ecuația:

$$\sin x + \operatorname{tg} x = 0 \quad \text{dă:} \quad \sin x = 0 \text{ și } \cos x = -1$$

cu rădăcinile:

$$x = k\pi \quad ; \quad x = (2k+1)\pi.$$

Ultima ecuație:

$\cos x + \operatorname{tg} x = 0$ se transformă în: $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$$\therefore \quad \sin x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ocupându-ne numai de soluția posibilă și servindu-ne de valoarea

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

vom putea scrie :

$$\sin x' = 2\sin 18^0 \qquad (-x = x')$$

care ne dă :

$$x' = 38^0 10' 22''$$

$$x = 2k\pi - 38^0 10' 22'' \quad \text{sau} \quad x = (2k+1)\pi + 38^0 10' 22''.$$

Notă. Din cauză că toţi rezolvitorii au efectuat valoarea lui $\sqrt{5}$ rezultatele au variat între : 37°20'11'' şi 38°11'31'' cel mai apropiat fiind al D-lu P. COJOCARU (38°10'25'').

LT. C-DOR. GH. N.

PROBLEMA 4383. *Se proiectează un punct* M, *de pe înălţimea* BD *a triunghiului* ABC, *în* E *şi* F *pe bisectoarele unghiului* A. *Fie* P *intersecţia lui* EF *cu* AB *şi* Q *intersecţia lui* AE *cu perpendiculara în* P *pe* FP. *Să se demonstreze că* FQ *trece printr'un punct fix când* B *se mişcă pe o perpendiculară la* AC.

G-L GH. BUICLIU.

Soluţie dată de D-nii: W. CSEKE (Student, Cluj); V. CEAUŞESCU (Liceul militar, Iaşi); I. I. ŢIŢEICA, M. C. POSTELNICESCU, R. V. APOSTOL, I. GH. ŞABAC (Liceul militar, Mânăstirea Dealului); A. DOBRESCU (R.-Sărat); AL. D. STOICA (Liceul Marele Voevod Mihai, Bucureşti); D. I. LEBĂDĂ (Giuranda-Botoşani) şi I. I. PETRESCU.

Prin construcţie punctele A, E, D, M, F sunt conciclice deci

$$\sphericalangle EFD = \sphericalangle EAD. \qquad (1)$$

De asemeni patrulaterul FAPQ este inscriptibil având unghiurile FAQ, FPQ drepte, urmează că

$$\sphericalangle QFP = \sphericalangle QAP$$

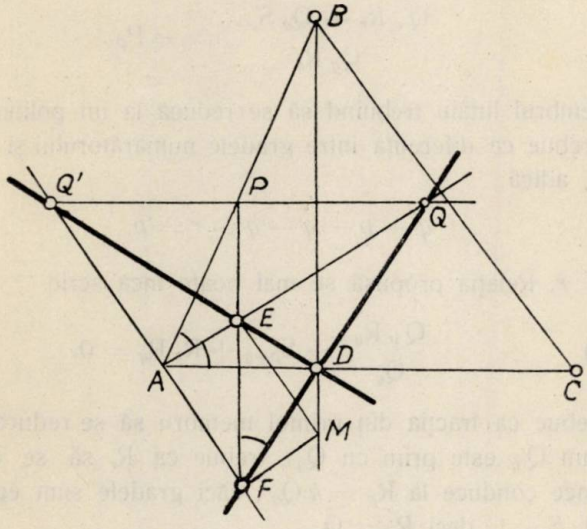
şi fiindcă AQ este bisectoarea lui A :

$$\sphericalangle QFP = \sphericalangle QAP = \sphericalangle QAD \qquad (2)$$

care comparată cu (1) arată că

$$\sphericalangle PFQ = \sphericalangle EFD.$$

Deci dreptele FD, FQ se confundă. Conchidem că oriunde ar fi B pe BD dreapta FQ trece prin D.



Notă. 1°. Dacă PQ taie pe AF în Q', se demonstrează la fel că EQ' trece prin D.

2°. De oarece QA şi Q'D sunt înălţimi în triunghiul FQQ', rezultă că FP este a treia înălţime, deci este paralelă cu BD.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4497. *Între polinoamele* P_p , Q_q , R_r , S_{p+q} *există relaţia :*

$$P_p Q_q R_r + Q'_q R_r + Q_q S_{p+q} = 0,$$

indicii fiind gradele respective, iar Q' *fiind derivata lui* Q.

Să se demonstreze că dacă ecuaţia $Q_q = 0$ *are numai rădăcini simple, atunci* $R = Q$.

Ce putem spune când aceeaşi ecuaţiune are rădăcini multiple ?

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-ra MARGARETA CARACUDOVICI şi D-nii: S. TARASIUC şi CSEKE WILHELM.

Relaţia dată se mai poate scrie

$$\frac{Q'_q R_r + Q_q S_{p+q}}{Q_q R_r} = -P_p .$$

Membrul întâiu trebuind să se reducă la un polinom de gradul p, trebue ca diferenţa între gradele numărătorului şi numitorului să fie p, adică

$$q + p + q - q - r = p,$$

deci $q = r$. Relaţia propusă se mai poate încă scrie

$$(\alpha) \qquad \frac{Q'_q R_q}{Q_q} + S_{p+q} + R_p R_q = 0.$$

Trebue ca fracţia din primul membru să se reducă la un polinom. Cum Q'_q este prim cu Q_q, trebue ca R_r să se dividă prin Q_q, ceeace conduce la $R_q = k Q_q$, căci gradele sunt egale. Putem lua chiar $k = 1$, deci $R_r = Q_q$.

Dacă $Q_q = 0$ are rădăcini multiple, deoarece o rădăcină de multiplicitate α este de ordinul $\alpha - 1$ de multiplicitate pentru $Q' = 0$, relaţiunea dată, scrisă sub forma (α), arată că $R_q = 0$ admite ca rădăcini, *cel puţin simple,* toate rădăcinile ecuaţiei $Q_q = 0$.

Notă. Nu s'ar putea deduce, în această ultimă ipoteză, chiar $Q = R$?

M. G.

PROBLEMA 4512. *Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte o dată, să se scrie două numere aşa ca unul să fie dublul celuilalt.*

V. THÉBAULT.

Fie

$$n = abcd \quad , \quad N = efghi$$

numerele cerute astfel că

$$2n = N \quad \text{sau} \quad 2 \times abcd = efghi.$$

Se observă că: $a \neq 5$ căci altfel ef ar fi 10 sau 11; $a \geqslant 6$ căci altfel N ar fi de 4 cifre; $e = 1$; niciuna din cifrele lui n nu poate fi 5 căci atunci una din cifrele lui N, alta decât e ar fi 0 sau 1.

Deoarece

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

rezultă

$$N + n = 2n + n = 9m$$

deci n se divide cu 3. Rezultă

$$(1) \qquad S = a + b + c + d = 3p.$$

Cea mai mică şi cea mai mare valoare a lui S putând fi 10 şi, respectiv 30, urmează după (1) că

$$(2) \qquad 12 \leqslant S = a + b + c + d \leqslant 30.$$

Să dăm acum lui S pe rând valorile 6, 7, 8, 9.

1°. $a = 6$. Vom avea:

$$2 \times 6bcd = 1fghi$$

de unde urmează că f nu poate fi decât 2 sau 3 deci n nu va putea avea ambele aceste cifre deodată. Apoi: i este pereche şi diferit de 6, deci d nu este nici 3 nici 8.

Ţinând seamă de aceste observaţiuni, de (1) şi de (2) nu vom putea avea decât:

$$15 \leqslant s' = b + c + d \leqslant 24$$

$$\therefore \quad s' = 15,\ 18,\ 21,\ 24.$$

Fie

$$s' = 15,\ b = 2$$

rezultă

$$c + d = 13$$

$$\therefore \quad \begin{cases} c = 4, \\ h = 9, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} c = 9, \\ h = 7, \end{cases}$$

şi n va fi căutat între numerele

$$6249;\ 6297$$

care nu dau soluţii.

Urmând pe această cale pentru toate valorile lui a şi pentru toate valorile lui s' corespunzător fiecărei valori a lui a se găsesc următoarele 12 soluţiuni:

$$13458 = 2 \times 6729 \; ; \quad 13584 = 2 \times 6792 \; ; \quad 13854 = 2 \times 6927$$

$$14538 = 2 \times 7269 \; ; \quad 14586 = 2 \times 7293 \; ; \quad 14658 = 2 \times 7329$$

$$15384 = 2 \times 7692 \; ; \quad 15846 = 2 \times 7923 \; ; \quad 15864 = 2 \times 7932$$

$$18534 = 2 \times 9267 \; ; \quad 18546 = 2 \times 9273 \; ; \quad 18654 = 2 \times 9327.$$

Notă. 1°. D-l M. F. AMĂRĂŞTEANU (Liceul Fraţii Buzeşti, Craiova) a rezolvat foarte bine problema găsind toate soluţiunile pe o cale diferită de precedenta.

2°. D-l M. L. NEGREA (Brăila) a indicat soluţiile date de D-l V. THÉBAULT în *Mathesis.*

3°. Au găsit pe diferite căi: 10 soluţiuni D-l C. N. GAVRILESCU (Bacău); 6 soluţiuni D-l M. GRUMĂZESCU (Şc. ofiţeri de artilerie).

4°. Problema 4512, este unul din cazurile următoarei probleme:

Cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate câte o singură dată să se formeze un număr de 4 cifre şi unul de 5 cifre astfel ca acesta din urmă sa fie un multiplu al primului.

Această problemă este propusă şi rezolvată de D-l V. THÉBAULT în suplimentul la *Mathesis* No. 3 şi 4 din anul 1934, Vol. XLIX.

G-L GH. B.

EXERCIŢII

25. In triunghiul ABC, fie I'_a, I'_b, I'_c contactele cercului înscris (I) pe laturi $AI'a$ taie din nou cercul în A'. Tangenta dusă în A' la cercul înscris, taie pe AB, AC, în A_b, A_c. Dreptele $A_b I'_b$, $A_c I'_c$ intersectează în M_a, M_b M_c fiind puncte analoage, AM_a, CM_b, CM_c concură în punctul lui GERGONNE.

N. N. MIHĂILEANU.

R. (I) este cercul exînscris triunghiului $AA_b A_c$ şi dreptele $A_b I'_b$, $A_c I'_c$, AA' sunt concurente. Rezultă că Ma se află pe $AI'a$.

26. Fie A_i, B_i, C_i, contactele cercului înscris I, pe laturile triunghiului ABC şi A''_i, B''_i, C''_i diametral opuse punctelor A_i, B_i, C_i în acelaş cerc. Dreptele AA''_i, BB''_i, CC''_i concură în punctul lui NAGEL al triunghiului.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Fie I_a , I_b , I_c centrele cercurilor exînscrise şi I_a , I_b , I_c contactelor lor pe laturi şi cuprinse între B şi C şi A, A şi B

$$\frac{AI}{AI_a} = \frac{r}{r_a} = \frac{IA''_i}{I_a I'_a}, \text{ etc.,}$$

şi punctele A, A''_i , I'_a şi analoagele sunt colineare.

27. Perpendicularele coborîte din α, β, γ, mijloacele laturilor triunghiului ortic A_h B_h C_h pe laturile corespunzătoare ale triunghiului de referinţă ABC, sunt concurente.

N. N. MIHĂILEANU.

R. α are puteri egale faţă de cercurile exînscrise triunghiului ortic, relativ la B_h, C_h, de centre B, C deci perpendiculare din α pe BC este ax radical al acestor cercuri şi deci concură cu analoagele, în centrul lor radical.

28. In triunghiul ABC, fie O_a O_b O_c centrele CARNOT, R raza cercului circumscris triunghiului de referinţă şi ρ_a , ρ_b , ρ_c razele cercurilor exînscrise triunghiului ortic.

$$\frac{\overline{AO_a}^2}{R+4\rho_a} = \frac{\overline{BO_b}^2}{R+4\rho_b} = \frac{\overline{CO_c}^2}{R+4\rho_c} .$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. $AO_a = R\sqrt{1 + 8\ \cos A\ \sin B\ \sin C}$

$$\rho a = 2R\ \cos A\ \sin B\ \sin C, \text{ etc} \ldots$$

29. Ecuaţiunea

$$3x^2 + 5 = y^2$$

nu este posibilă în numere întregi.

G-L GH. B.

R. Dacă se examinează terminaţiunile unui pătrat perfect se găseşte că numai pentru $x = 5u$ membrul I ar putea avea la unimi terminaţiune de pătrat perfect. Dar în acest caz trebue ca $y = 5v$ şi ecuaţia devine

$$15u^2 + 1 = 5v^2$$

imposibilă în numere întregi.

30. Dacă o ecuaţie de gradul al treilea are rădăcinile în progresie aritmetică, atunci avem relaţia :

$$27a^2d + 2b^3 = 9abc$$

între coeficienţii acelei ecuaţii.

LT.-COMANDOR GH. NICULESCU.

R. Fie

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ecuaţia considerată. Avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \; ; \; 2x_1 = x_2 + x_3 \text{ deci } x_1 = -\frac{b}{3a} .$$

Inlocuim rădăcina x_1 în ecuaţie şi obţinem relaţia din enunţ.

31. Dacă ecuaţia

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

are rădăcinile în progresie aritmetică, atunci avem totdeauna:

$$27a^2 d - b^3 \neq 0 \; ; \; 3ac - b^2 \neq 0.$$

LT.-COMANDOR GH. NICULESCU.

R: Ţinând seamă de rezultatele din articolul „Asupra ecuaţiunilor cu rădăcinile în progresie aritmetică „G. M.“ XLI, pag. 378, vom scrie:

$$f(x_1) = f''(x_1) = 0 \text{ şi } f'(x_1) \neq 0.$$

Ca atare:

$$f'\left(-\frac{b}{3a}\right) \neq 0$$

ne va da egalitatea a doua din enunţ. Pentru a obţine şi pe prima ne servim de relaţia din exerciţiul precedent pe care o vom scrie astfel:

$$27a^2d - b^3 + 3b^3 = 9abc$$

$$\therefore \; 27a^2d - b^3 = 3b(3ac - b^2).$$

Membrul al doilea fiind diferit de zero, primul va fi şi el diferit de zero.

PROBLEME PROPUSE

4663. Dacă m este un număr întreg, medie aritmetică a numerelor întregi $a, b, c, \ldots, k, l$, atunci orice număr de două cifre privit ca scris în sistemul de numeraţie m este medie aritmetică a numerelor ce se obţin privind acel număr ca scris în sistemele de numeraţiune, $a, b, c, \ldots, k, l$.

I. IONESCU.

4664. Care este cel mai mare pătrat cu toate cifrele diferite şi pare?

Dar cu toate cifrele diferite şi impare?

Problemă analoagă pentru cuburi.

ULPIU M. FLORESCU.

4665. Fie p un număr prim dat, diferit de 2. Să se demonstreze că produsul a două numere întregi care diferă cu p, nu poate fi un patrat decât pentru o singură valoare a factorilor.

P. SERGESCU.

4666. Fie α, β, γ punctele unde o dreaptă Δ intersectează laturile triunghiului ortic $H_a H_b H_c$ al triunghiului ABC.

Să se arate, că perpendicularele coborîte din vârfurile triunghiului ABC respectiv pe dreptele, ce trec prin ortocentrul H a triunghiului ABC şi punctele α, β, γ, sunt concurente.

TEODOR GH. COCEA.

4667. O fiind un punct fix din planul unui patrulater inscriptibil ABCD, să se stabilească relaţiunea:

$$\overline{OA} \cdot BCD + \overline{OC} \cdot ABD = \overline{OB} \cdot ACD + \overline{OD} \cdot ABC,$$

ABC fiind aria triunghiului ABC, etc.

Să se demonstreze că această proprietate este caracteristică patrulaterelor inscriptibile.

M. GHERMĂNESCU.

4668. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2 + px + q = 0,$$

ştiind că avem:

$$x_1 = px_2 + q,$$

x_1 şi x_2 fiind rădăcinile.

MAIOR I. LINTEŞ.

4669. Să se stabilească identitatea

$$(8\cos^4 x - 12\cos^2 x + 5)(8\sin^4 x - 12\sin^2 x + 5) = 4\cos^2 2x + \cos^2 4x.$$

N. N. MIHĂILEANU.

4670. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\cos^5\alpha + \cos^5\beta}{\sin^5\alpha + \sin^5\beta} = a \ , \ \operatorname{cotg}\frac{\alpha - \beta}{2} = b \ .$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN.

4671. Intr'un rezervor cilindric circular drept, de dimensiuni date, se află apă până la o înălțime oarecare. Culcând cilindrul pe o generatoare, apa se ridică până la aceeași înălțime. Care este acea înălțime?

ION C. SCHILERU-DILI.

4672. Toate ecuațiunile de grad impar obținute prin derivarea repetată a unei ecuațiuni cu rădăcinile în progresie aritmetică, au fiecare cel puțin trei rădăcini în progresie aritmetică.

LT.-COMANDOR GH. NICULESCU.

4673. Să se stabilească viteza în km/oră a avionului care sburând de-alungul unei paralele date, la o înălțime constantă dată, trece asupra fiecărui punct al paralelei la ora 12.

Nu se va ține seamă de variația densității atmosferei în raport cu înălțimea.

ALEXANDRU D. BUNESCU.

4674. Fie $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ derivatele de primul și al doilea ordin ale funcțiunii $\varphi(x)$. Să se integreze ecuația diferențială:

$$y' + \frac{\varphi''}{\varphi'} \cdot y = \left[\frac{\varphi'}{\cos 2\varphi}\right]^2 \cdot y^2 \ .$$

N. BOTEA.

ERATĂ. La Nota 34 publicată în Nr. 8, pag. 432, se vor face următoarele corecturi:

1. *La pag. 432* — ultimul rând — exponentul 2 se introduce în cadru,
2. *La pag. 434* — ultimul rând al notei — primul factor este

$(B_1B_2B_3A_4)$ în loc de $(B_1B_2B_3B_4)$

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu F. Marcel (4532, 634, 46, 51, 58, 59, C); *Apostol Radu* (4632, 34, 58); *Buzincu Ioan* (4387, 414, 582, 643, 59, 61); *Chiriac M.* (4634): *Cojocaru P. P.* (4414, 52, 659, 61); *Crăciunescu I. M.* (N); *Dobrescu A.* (N); *Eckstein Virgil* (4655, 58, 59); *Eckstein Z.* (4606, 42); *Enache D. I.* (4585); *Florescu L. V.* (4634, 53, 54, 59, 61); *Grabovschi F. E* (4557, 67, 653); *Grumăzescu Mircea* (4429, 541, 85, 608, 51); *Ionescu Constanța* (4631); *Ioniță V. Iulian* (4485, 658); *Lenco Ion* (4545, 661); *Marcovici E.* (4651, 61); *Mavrodin D. D.* (2510, 4505, 21, 95, 662); *Mihăilescu A.* (4442, 658); *Milu I. Nicolae* (4570), *Moisovici Şt.* (4646, 61); *Negrea A. Mircea Leonte* (2569, 4622, 43, 44, 48, 51, 56, 58, 59, 60, 62); *Pădureț A. V.* (4485, 502, 85); *Podocef A. Vasile* (4570); *Săndulache C.* (4627, 61, 62); *Scobiola A. Cosma* (4658); *Ştefănescu D. N.* (4525, 616, 51, 52, 53, 54, 61), *Streder Ioan* (4658, 59); *Thébault V.* (N. P); *Timiş Ion* (4661); *Vasilescu A. Alexandra* (4579, 604, 06, 27, 31, 32, 39); *Vasilovski E. F.* (4485, 658); *Vişa Eug.* (4629, 61, 62, P); *Vissarion C. I. V.* (4661); *Zăhărescu E. I.* (4485, 659).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie**, *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie **pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN.**

C. 41319

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 10. — IUNIE 1936

SUMARUL

1. Cuvântare rostită la desvelirea bustului Ing. I. D. Teodor . . . . . *G. Borneanu.*
2. André-Marie Ampère (1775 — 1836) . . . . *Ion Ionescu.*
3. Tabla Ţibetului . . . . . *Victor Marian.*
4. Conicele de ramificare a trei conice în fascicol (urmare) . . . . . *D. Barbilian.*
5. Raportul comisiunii pentru acordarea premiului V. Cristescu.
6. Note Matematice: 39 — 42.
7. Bibliografie.
8. Cereri: 257.
9. Diverse.
10. Probleme rezolvate: 4314, 4387, 4422, 4472, 4541, 4582, 4651.
11. Exerciţii: 32 — 38.
12. Probleme propuse: 4675 — 4686.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 89, 522, 23, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 26, 38, 45, 49, 52, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 79, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 98, 500, 03, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 30, 31, 33, 34, 47, 50, 58, 59, 61, 78, 80, 87, 88, 90, 92, 93, 96, 98, 601, 02, 03, 05, 12, 13, 15, 18, 28, 30, 36, 41, 45, 47, 50, 57, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

„SPHINX“

REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE

DANS LE MONDE ENTIER

ABONNEMENTS 1 AN: BELGIQUE, 35 FR.; FRANCE, 25 FR.

ETRANGER, 10 BELGAS

ADMINISTRATION:

„SPHINX“, 75, Rue Philippe Baucq

R. C. 51922 Tel: 33.48.58

Ch. postaux { Bruxelles No. 192338
Paris No. 160061

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 200 LEI

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 100 LEI

Director: Dr. I. BAIDAFF

SUNT CELE MAI IMPORTANTE REVISTE PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD, PUBLICATE ÎN BUENOS-AIRES

SE PRIMESC ABONAMENTE LA

„GAZETA MATEMATICĂ“, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

GAZETA MATEMATICĂ

ANUL XLI *SUPLIMENT* No. 10

DARE DE SEAMĂ

Asupra Mesei Comune care a încheiat Concursul Societăţii „Gazeta Matematică", în seara de 18 Aprilie 1936

Mesele comune, care încheie anual concursurile *Gazetei Matematice*, nu au în ele nimic din atmosfera acelor kermese flamande nemurite de Rubens.

De o intimitate nobilă, ele sunt lipsite de multicolorul vulgar, îmbrăcând, fără rigiditate, haina cenuşie atât de bine potrivită ştiinţei.

Fără rigiditate, pentrucă sentimentul îşi are de astă dată potecile lui de pătrundere în suflet.

Mai clar decât oricând, îţi poţi imagina, în cadrul acestor reuniuni, ce vor fi fost acele şcoli antice, în care înţelepciunea creştea umbrită de dafini şi mirţi.

Chiar sectarismul pitagorician prinde un sens. Semnificaţia meselor comune este dublă: iniţiere spirituală a celor ce vor jertfi Matematicei, construcţie a unui unghiu mistic sub care să se vadă cea mai frumoasă şi mai nobilă ştiinţă, este apoi prilej de împrospătare a energiei sufleteşti pentru cei iniţiaţi, o împărtăşire cu un tainic Sf. Graal, o înviere, în alt plan, a practicelor Cavalerilor regelui Arthus.

Această oficiere, care urmează concursurilor *Gazetei Matematice*, nu şi-a fixat încă altarul — casa *Gazetei Matematice* neavând şi o sală de festivităţi — de aceea, pentru a treia oară, s'a desfăşurat şi anul acesta în sala de mese a Căminului Ofiţerilor din str. Cobălcescu.

Prezenta cronică m'a adus cu mult înainte de ora 21, în sala simplă, ce mi-a părut chiar austeră, luminată — cum era atunci — cu un număr mic de becuri. D-l G. ILIESCU făcea ultimele corecturi aranjării mesei, în forma tradiţională.

Treptat, sala înveselită de izbucnirea luminii, îşi primea oaspeţii. Nimeni nu se simţea străin. Cei mai mulţi concurenţi mai luaseră parte anul trecut la serbarea analoagă. Se cunoşteau între ei, cunoşteau sala, cunoşteau ritul. Unii erau chiar poliveterani ai concursului.

Desigur sufletul concurenţilor clasei VIII era umbrit de melancolia ultimei întrevederi — în cadrul mesei comune — cu colegii lor, cu membrii *Gazetei Matematice*.

Membrii *Gazetei* formau grupuri; un grup principal, D-nii: I. IONESCU, G. ŢIŢEICA, I. VARDALA şi A. IOACHIMESCU, generaţia eroică, apoi un subgrup compact — membrii tineri — ultima decadă a *Gazetei Matematice* — în jurul profilului D-lui AL. A. ROŞU, profil care sfârşit cu o geometrică barbă, îţi aminteşte atât de riguros bărbaţii anticei Helade pe care am evocat-o mai sus, etc.

Când pendulele situate la $1^h\ 44^m\ 23^s$ longitudine estică şi $+44^0\ 24'\ 51''$ latitudine arătau 21 ore, luau loc în jurul mesei D-nii: GENERAL I. DEMETRESCU, LT.-COL. C. PANĂ şi MAIOR P. JUGĂNARU, conducători ai învăţământului liceelor militare şi prieteni aleşi ai *Gazetei Matematice*, D-nii: LT-COL. REZ. ŞTEFĂNESCU, ROMAŞCAN şi D-nii ofiţeri însoţitori ai elevilor; D-nii: I. IONESCU, A. G. IOACHIMESCU, G. ŢIŢEICA, şi GENERAL G. BUICLIU stâlpi ai *Gazetei Matematice*; D-nii: E. ABASON, I. BUŞILĂ, AL. BUNESCU, I. CHIŢULESCU, U. FLORESCU, M. GHERMĂNESCU, N. GEORGESCU, MAIOR GHIMUŞ, ADR. GHEORGHIU, A. IOANOVICI, G. A. IOACHIMESCU, G. ILIESCU, C. IONESCU-BUJOR, C. IONESCU-ŢIU, COL. G. LITEANU, MAIOR I. LINTEŞ, LIVADA, N. N. MIHĂILEANU, C. ORĂŞEANU, AL. A. ROŞU, P. SERGESCU, G. D. SIMIONESCU, DILI SCHILERU, A. STOICA, I. VARDALA şi A. VICIU, membri ai *Gazetei Matematice;*

D-RA G. ROMAŞCAN şi D-NII: M. CRĂCIUNESCU, ST. IONESCU, M. VASILESCU-STABU, ION A. ILIE, V. FLORESCU, H. BODNĂRESCU, A. PASERE, O. RĂDULESCU, R. APOSTOL, N. D. ŞTEFĂNESCU, D. BOIAN, T. PRECIADO, A. O. ŞAICHIN, D. I. CIOC, I. STREDER, I. BUZINCU, I. I. GALAN, M. NĂSTASE, C. TANASICIUC, I. I ŢIŢEICA, V. CEAUŞESCU, V. GRIGORESCU, I. ŞABAC, E. STĂNESCU, M. AMĂRĂŞTEANU, A CEHAN, D. CERCELARU, P. DOBRESCU, P. P. COJOCARU, H. FLORESCU, concurenţi.

Timpul pare că şi-a accelerat mersul — mai bine zis, am uitat existenţa sa. Se formează nuclee de conversaţie şi bună dispoziţie pe firul mesei — fenomen pentru care Jazzul aviaţiei se dovedeşte bun catalizator. Suntem în domeniul de existenţă al unei poliarmonii cristaline.

Şi pentru ca ţinuta armonios clasică a mesei Comune să fie întregită, în jurul orei 23, D-l A. G. IOACHIMESCU, începe seria toasturilor astfel:

«In întrunirea de astăseară — ca buni români — îndreptăm gândul spre ţara noastră, spre M. S. Regele Carol II. Să urăm Majestăţii Sale sănătate şi putere de muncă, pentru a realiza ce au realizat Augustii Săi înaintaşi, să urăm Majestăţii Sale viaţă lungă împreună cu Augusta Familie».

Când entuziastele urări adresate Tronului au luat sfârşit, ne vorbeşte D-l I. IONESCU:

«Dacă la masa de astăseară vedeţi numai atâţi concurenţi, este pentrucă s'au făcut două amputări grave. Din 163 înscrişi am eliminat 71. Poate că am greşit astfel; după cum poate am greşit că au venit aici numai acei cu teze bune. Am procedat astfel din cauza lipsei de bani. Dacă deficitul totuş nu apare este pentrucă l-a acoperit D-l A. IOANOVICI.

Concursul s'a putut ţine pentrucă autorităţile militare au dat tot sprijinul. Le mulţumim şi închin paharul în sănătatea D-lui GENERAL I. DEMETRESCU.

Urmează îndată replica D-lui GENERAL I. DEMETRESCU.

«Societatea **Gazeta Matematică** *eşită din avânt, întreţinută din entuziasm, perseverenţă şi ideal, eîn Romînia Mare o instituţiune, o adevărată şi sănătoasă şcoală morală şi intelectuală pentru tineretul din şcoalele militare.*

E o şcoală intelectuală prin gimnastica judecăţii pe care o fac elevii şi morală, prin punctualitatea cerută.

In legătură cu problema educaţiei, D-l G. ŢIŢEICA *a spus că disciplina e o constrângere impusă cuiva de o autoritate.*

Gazeta Matematică *impune împlinirea datoriei din convingere. Iată dece. Invăţământul Militar aduce azi omagii* **Gazetei Matematice.** *Ne îndreptăm azi gândul spre stâlpii ei, D-nii:* A. IOACHMESCU, I. IONESCU *şi* G. ŢIŢEICA *şi către colaboratorii Domniilor lor.*

Permiteţi-mi, ca director al învăţământului militar, să spun că eu, profesorii liceelor militare şi elevii, acordăm **Gazetei Matematice** *toată prietenia. Dorim să fim şi activi, ajutând ascensiunea sa. Voiu aminti că fratele D-lui* I. IONESCU, *avocat, fără a fi membru, a sprijinit* **Gazeta Matematică** *40 de ani.*

Pe cât mi-a fost şi mie cu putinţă am sprijinit **Gazeta Matematică.** *Voiu sprijini şi de acum înainte înălţarea acestui edificiu naţional.*

Declar, că dela 1 Septemvrie, voiu mări numărul abonamentelor la **Gazeta Matematică,** *la 100.*

Asigur stâlpii societăţii că principiile şi conceptul D-lor de viaţă şi conducere, vor fi pentru noi principii de conducere la şcoalele militare. Rog întreaga asistenţă şi în special pe elevi şi ofiţeri, să strige cu mine Să Trăiască Stâlpii **Gazetei Matematice!**».

Stâlpii *Gazetei Matematice* sunt mult ovaţionaţi. Apoi pentru a se vedea simpatia de care se bucură *Gazeta Matematică* în şcoalele militare, D-sa citeşte un fragment dintr'o scrisoare a D-lui MAIOR P. JUGĂNARU, publicată în Revista *Ştiinţă şi progres*, a liceelor militare, şi în care sunt grupate impresiile crescute dintr'un banchet al *Gazetei Matematice.*

«Nici odată nu am asistat la o mai sinceră armonizare între lumea civilă şi cea militară», scrie D-l MAIOR P. JUGĂNARU.

Aceste sentimente ne-au mişcat mult. Vedeam că dragostea pentru *Gazeta Matematică* a întrecut cadrul membrilor ei, al corespondenţilor ei, s'a prelungit în domeniul factorilor conducători ai şcoalei.

In asemenea atmosferă cordială se plasează cuvântarea morală a D-lui G. ŢIŢEICA.

«După tradiţia **Gazetei matematice,** spune D-sa, *trebue să ţin cuvântarea morală. Ea nu e scrisă pe lista de bucate — dar unde e scris tort — cetiţi tortură şi o aflaţi.*

E o tradiţie, ca la fiecare masă, să fie un cuvânt de îmbărbătare morală. Pentru tinerii de aici trebue să pară ciudat că avem atâta atenţie pentru ei şi trebue să işi închipue că este o schimbare de atmosferă.

Să fie încredinţaţi că e aceeaşi atmosferă ca în timpul concursului. Cu aceeaşi dragoste v'am ascultat, cu aceeaşi vă vedem aici, pentrucă D-v.

sunteţi speranţele noastre şi le veţi realiza, pentrucă avem încredere în virtutea ştiinţelor matematice. Acestea sunt ca o sapă ce răscoleşte pământul.

Suntem încredinţaţi că românii noştri au însuşiri, câte odată, excepţionale — le lipseşte însă disciplina, obişnuinţa de a se înhăma la o treabă grea şi de a o duce la capăt.

Credem că contactul cu ştiinţele matematice va realiza disciplina. Veţi păstra amintirea că o treabă bună duce la un rezultat. Şi în timpurile de azi, când ameninţarea pluteşte; nu se ştie de unde, trebue să avem tărie.

Mai zilele trecute am fost la Constanţa. Era vânt şi frig. Valurile veneau puternic, dar digul era tare şi nu-mi era teamă că mă vor da jos. Asemenea dig să fiţi. «Deaceea 'nchin pentru sănătatea D-voastră.

Sămânţa aruncată de D-l G. ŢIŢEICA, în sufletele abia defrişate, va da rodul dorit. A spus-o D-sa, o simţim noi, o simt tinerii noştri invitaţi. In numele lor răspunde elevul P. DOBRESCU :

«Aduc — în numele colegilor — mulţumiri celor ce ne-au călăuzit primii paşi stângaci. Vă asigurăm că sămânţa aruncată de D-voastră va rodi. Urăm stâlpilor şi tuturor celor ce ne-au condus formarea noastră matematică sănătate spre a ne desăvârşi».

D-l GENERAL G. BUICLIU adresează cuvântul de recunoştinţă autorităţilor ce ne-au sprijinit concursul :

D-lui VASILESCU-KARPEN, care ne-a dat ospitalitate pentru ţinerea concursului, D-lui Ministru al Comunicaţiilor şi C. F. R. care ne-au înlesnit aducerea concurenţilor, D-lui GENERAL MACICI care ne-a găzduit cei 8 elevi civili, oferindu-le masa.

D-sa subliniază 2 caracteristici de mare importanţă ale concursului şi ale acestei mese.

«Anul acesta ne-au vizitat şi au asistat la concurs D-nii : PROF. A. MIELI *din Roma şi* PROF. A. SINGH *din Luknov. India — în trecere prin România cu ocazia congresului istoricilor. In semn de omagiu, Societatea* **Gazeta Matematică** *le-a oferit un volum jubiliar.*

A doua caracteristică : Deşi Matematica e de gen femenin, iar ramurile ei tot de gen femenin sunt, până azi, n'am avut participanţi de gen femenin la concurs.

O avem azi pe D-ra G. ROMAŞCAN *căreia îi urăm să fie simbol al viitoarelor concurente».*

Aplauze numeroase asociază toată asistenţa la această urare.

D-l GENERAL G. BUICLIU urmează :

«Apoi remarc că avem şi o soluţie singulară. Printre candidaţi e şi un copil, care deşi în clasa II a dat concurs pentru clasa IV».

Adresându-se elevului M. CRĂCIUNESCU — soluţia singulară — D-sa îi spune : *«Dragă tinere, îţi urez să îţi păstrezi elanul şi să înveţi a păstra ce ai câştigat».*

Şi mă gândeam atunci la munca acestui copil excepţional, la emoţiile cărora sacrificase distracţiile de suprafaţă ale celor de o vârstă cu el. Lauda,

pe care o primea astă seară, era şi lauda acestei tenacităţi pe care am dori-o generalizată.

Nu copilul păpuşe, nu copilul căruia să i se netezească totul în cale, nu copilul pe care îl crează această dulceagă şcoală de azi, ne trebue mâine.

* * *

Treptat, ne-am apropiat de miezul nopţii. E timpul să înceapă a doua parte a mesei comune, partea artistică. Ea va arăta celor tineri că matemacianul nu trebue să fie străin frumosului.

I se cer D-lui C. ORĂŞANU. tradiţionalele versuri.

D-sa examinând, în mod obişnuit, la concursul *Gazetei Matematice*, Cosmografia şi Astronomia, e mai aproape de Pegas decât ceilalţi membri ai *«Gazetei»*. Dar anul acesta, nu s'au prezentat concurenţi la Cosmografie, Pegas s'a supărat şi D-l C. ORĂŞEANU a încercat să treacă greaua sarcină D-lui M. GHERMĂNESCU.

Dar D-sa răspunde prompt : *Protestez !*

— *«Să protestezi pe note»!* — intervine D-l I. CHIŢULESCU. Şi vedeţi în chip cât de natural s'a introdus partea muzicală a şedinţei noastre.

D-l M. GHERMĂNESCU (bariton) şi P. SERGESCU, (tenor) încep duetul primăverii — al sosirii rândunelelor, din patria lui Ptolomeu şi a lui Platon — : *Rândunele uşoare pe cerul strălucit...*, duet transformat în trio prin asocierea D-lui COLONEL G. LITEANU.

Şi porţile sufletului se deschid larg şi carul apolinic al imaginaţiei pătrunde în suflet, cu soarele vioiu al primăverii, cu svon de ciripit, cu şoapte de frunze plăpânde, cu murmurul pâraelor ascunse în iarbă.

O, primăvară ! Cum descreţeşti toate frunţile, cum îţi surâde fiecare ! Noi uităm că odinioară, când Matematica avea numai o energie potenţială, strămoşii noştri îngenunchind, sărutau smaraldul, azuriul şi aurul vestmântului tău ; dar sângele nostru, care e sângele lor, nu uită.

Acum ascultăm corul elevilor, condus şi animat de D-nii P. SERGESCU şi M. GHERMĂNESCU.

«De-ar fi mândra în deal la cruce» — Cântul eternei dragoste ce înfloreşte în fiecare primăvară, apoi

«Cristos a înviat» — imnul acelei primăveri sociale de acum 2000 de ani, *«Gaudeamus igitur»*.

Acest Gaudeamus al nostru, al celor ce ne trăim întreaga viaţă în lumea cărţilor, al sufletelor veşnic tinere, îndrăgostite de ştiinţă şi de tradiţia ştiinţifică, e atât de fanatic întonat, încât D-l G. ŢIŢEICA, mişcat, ne spune :

«Toate au un sfârşit şi e bine totdeauna ca sfârşitul să fie frumos ; iar astă seară nici nu poate fi altul mai frumos, decât acel pe care l-a încheiat D-l SERGESCU.

Masa comună s'a sfârşit. Curând orologiile vor saluta miezul de noapte Ne despărţim. Drumurile ne sunt atât de felurite ! D-l SERGESCU va pleca la Cluj, elevii în alte colţuri de ţară, alţii se vor risipi într'un Bucureşti imens.

Dar toţi avem acelaş cult al Matematicelor şi el ne-a unit astăseară.

Am fost ramuri ale aceluiaş trunchiu — ramuri şi muguri — şi tuturor ne-a bătut inima cu putere şi toţi, poate, ne-am stăpânit o lacrimă sub gene, când cântam, când ascultam, acel Gaudeamus avântat al tinereţei ce-şi sărbătoreşte munca.

Până târziu, repetam în minte corul, aşa cum îl ascultasem. Şi realizarea unei cetăţi cristaline, a gândului şi a muncii, mi se părea mai puţin decât oricând o utopie.

C. IONESCU-BUJOR.

CUVÂNTARE ROSTITĂ LA DESVELIREA BUSTULUI ING. I. D. TEODOR

31 Maiu 1936

Mult Stimată Doamnă şi Onoraţi Ascultători,

Am cinstea să aduc din partea Societăţii *Gazeta Matematică*, în faţa Dv., cuvântul şi omagiul său pentru fostul ei casier Ing. Ion D. Teodor, al cărui chip turnat în bronz, ni-l readuce înaintea ochilor aşa cum era acum 12 ani, aşa cum îl avem şi îl vom avea totdeauna în minte şi în suflet acei cari l-am cunoscut, l-am iubit şi l-am admirat.

Societatea *Gazeta Matematică*, — parte din Dv. nu o ştiţi, şi deaceea îmi permit a o spune — este o societate pur culturală. Scopul ei este răspândirea gustului pentru ştiinţele matematice la generaţiile tinere şi studioase. Ea continuă activitatea grupării formată pentru tipărirea revistei *Gazeta Matematică*, a cărei vechime atinge azi peste 40 de ani. Pentru ţara noastră cu o desvoltare culturală atât de tânără, existenţa timp de 40 de ani a unei reviste ştiinţifice, şi mai ales de matematică, reprezintă un fenomen excepţional. El nu s'a putut produce decât datorită concepţiei de apostolat a fondatorilor şi a devotaţilor ei membri de mai târziu. Astăzi, toţi dintre noi cari am îmbrăţişat cariere legate cu ştiinţele matematice, profesori, ingineri, ofiţeri, funcţionari, datorăm pregătirea noastră *Gazetei Matematice.*

Conducerea Societăţii o are o delegaţie de 3 membri. Unul dintre ei este casierul. El are de fapt întreaga conducere materială, procurarea veniturilor, administrarea fondurilor, tipărirea şi răspândirea revistei.

Rolul acesta l-a avut Ing. I. D. Teodor timp de 15 ani, din anul 1909 până în anul 1924. Şi a împlinit astfel acest rol încât astăzi încă posibilitatea materială de continuare a publicării revistei i se datoreşte în întregime. De aceea, multe generaţii de tineri matematicieni îi vor datora încă o bună parte din posibilitatea pregătirii lor.

Imi venia să spun că în activitatea lui pentru propăşirea *Gazetei Matematice*, Ion D, Teodor a pus tot ce a avut mai frumos şi mai entuziast în suflet.. Aş fi greşit. Intreaga lui acti-

vitate, sub orice formă s'ar fi manifestat ea, a fost caracterizată de acelaş entuziasm creator şi de aceeaşi tendinţă de a face un apostolat pentru propăşirea ideilor înalte şi generoase.

Astăzi, după atâta vreme de când l-am pierdut, când durerea violentă a despărţirii a fost înăbuşită sub greutatea anilor ce au trecut, mintea vorbeşte înaintea sufletului. Intâmplările trăite se detaşează din cadrul lor sentimental şi se plasează într'o perspectivă din care judecata se face cu totul obiectlv.

Această perspectivă, astăzi, nu reduce nimic din valoarea calităţilor lui, ci — din potrivă — le potenţiază. Pe fondul trecutului, figura lui se proectează clară şi luminoasă.

Erà un visător, ca o consecinţă logică a minunatei lui alcătuiri sufleteşti. Iar visările le realisà prin puterea de concretizare pe care cultura inginerească i-o dase. Această cultură o dobândise în fosta noastră Şcoală Naţioală de Poduri şi Şosele, unde ca şef de promoţie şi-a înscris numele cu litere de aur pe tabla de onoare a Şcolii şi unde apoi, curând după terminare, a devenit un emerit profesor.

Realizările le făcea cu o artă deosebită de a place, de a subjuga, de a fi amabil chiar în constrângere.

Erà un fin manierat, un estet în toate manifestările, un complex rar de energie şi de profundă bunătatate.

Vi-l aduceţi aminte, desigur, ca şi mine, mai ales în aceste locuri, unde şi-a trecut cei mai frumoşi ani din viaţă şi unde a conceput şi a înfăptuit aproape tot ce cuprinde privirea. Aci îl rechiamă fiecare atelier modern şi spaţios, fiecare stradă drept trasată, fiecare din clădirile acestea frumoase şi sănătoase unde atâtea familii, pe care el le-a ocrotit, îşi împletesc în trecerea vieţii necazurile şi mulţumirile.

Ca şi mine, probabil, simţiţi în clipa aceasta cum reînvie de undeva privirea ochilor săi atât de vii, care ne învăluia pe toţi într'o binevoitoare înţelegere. Iar pe cei mulţi, pe cei mulţi cari munciau, pe lucrătorii şi funcţionarii lui, îi iubia cu adevărat, cu o dragoste de părinte strâns legat de copiii lui sufleteşti.

Dela el — o recunoaştem cu mândrie cei cari prin meseria noastră am început a conduce muncitori din fabrici sub direcţia lui — am învăţat să înţelegem, să preţuim şi să iubim pe aceşti bravi colaboratori ai noştri, pe lucrători.

MONUMENTUL ING. I. D. TEODOR
Fost Director General R. M. S., ridicat în Cartierul C. A. M.-Filaret

Iubirea şi preocuparea de buna lor stare a avut-o şi a manifestat-o în toate treptele ierarhiei pe care cu strălucire le-a ridicat, dela subdirector de fabrică până la director general al fostei Regii a Monopolurilor Statului.

In aceeaşi preocupare, cu câtă înţelepciune, dar cu ce grea luptă sufletească a isbutit prin măsurile luate de el să înfrângă aci, la Fabrica de Chibrituri, violentele mişcări de descompunere care au ameninţat, până acum cincisprezece ani, aşezarea noastră socială.

Un istoric general al mişcărilor de atunci nu s'a făcut. Nu se cunoaşte public valoarea diferitelor manifestări şi legăturile dintre ele. Au trecut ca un vis urât. Dar cei cari au fost martori de aproape ai acestor frământări — şi sunt atâţia între cei de faţă — ştiu că şi aci spiritul clar văzător al lui I. D. Teodor a fost un nepreţuit folos pentru ţară.

Devreme, cu mult prea devreme, în vârstă numai de 45 de ani, a fost doborît de coasa eternităţii. Tot ce mai plănuia tot ce ar fi putut încă să înfăptuiască, a rămas pierdut pentru noi toţi. In locul lui, aci unde începe viaţa de colectivitate a celor ce i-au fost atât de dragi, rămâne chipul său în bronz, simbol al unui trecut de virtuţi şi îndemn de sufletească înălţare.

Dincolo de acest simbol, amintirea lui se va perpetua în sufletele noastre şi ale celor ce vor veni după noi. Căci despre ea se pot spune versurile poetului Horaţiu, încheiate cu acel celebru „aere perennius“ — va fi mai durabilă decât bronzul.

George Borneanu

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE (1775—1836)

In luna aceasta s'a împlinit un secol dela moartea ilustrului matematician, fizician şi filosof francez Ampère. Lumea ştiinţifică şi industrială au sărbătorit acest centenar cu multă însufleţire, căci Ampère nu a fost numai un om de ştiinţă ci şi un mare binefăcător al omenirii. *Gazeta Matematică* se asociază la aceste manifestări de recunoştinţă memoriei lui Ampère şi îi consacră câteva pagini pentru a arăta vieaţa lui plină de învăţăminte şi măreaţa operă ştiinţifică a lui.

AMPÈRE s'a născut la Lyon în anul 1775, în ziua de 22 Ianuarie. Străbunul său fusese cioplitor de piatră, bunicul lui arhitect-antreprenor iar tatăl său, JEAN-JACQUES AMPÈRE, ajunsese fabricant de stofe de mătase la Lyon. El era un om cult, poet şi autor dramatic, a dus o căsnicie fericită cu ANTOINETTE-JEANNE SARCEY DE SUTIÈRES şi a avut un fiu, pe ADRÉ-MARIE. In 1771 el şi-a cumpărat o mică proprietate la vreo 15 km spre Nord de Lyon, în satul Poleymieux, unde s'a retras din 1782 spre a se ocupa cu educaţia fiului său, după principiile din *Emile* al lui ROUSSEAU, unde a mai avut şi o ocupaţiune la Castelanul din localitate.

JEAN-JACQUES AMPÈRE a ţinut să dea singur cultura fiului său; a fost ajutat la aceasta de o memorie extraordinară a lui ANDRÉ-MARIE şi de o curiozitate nesăţioasă a acestuia de a cunoaşte şi de a învăţa, în cât chiar cititul l'a învăţat aproape singur. Cu modul acesta AMPÈRE nu a urmat nicio şcoală, inferioară sau superioară; nu a auzit nicăeri, nici odată, niciun profesor predând sau explicând la tablă!

El a fost un autodidact general. Toate cărţile care îi intrau în mână, de orice specialitate, le citea din scoarţă în scoarţă, fără o ordine stabilită, luând una când se plictisea cu alta. Până la etatea de 12 ani citise toate cărţile care erau în Biblioteca tatălui său, în afară de cele ce i se împrumutau sau i se cumpărau. Chiar mai târziu nu s'a mărginit la câteva ramuri de ştiinţe ci s'a ocupat de toate! Până la etatea de 18 ani citise toate cele 20 volume ale marei *Enciclopedii* a secolului XVIII, alcătuită sub conducerea lui D'ALEMBERT şi DIDEROT, şi a citit-o cu atâta atenţiune în cât la etatea de 50 ani reproducea din gând pasaje întregi dintr'însa! El a început prin a produce lucrări de matematică, apoi de fizică, chimie, ştiinţe naturale; s'a ocupat de muzică şi literatură, şi nu a neglijat filosofia şi sociologia. La 12 ani a început să înveţe calculul diferenţial şi integral, după câteva convorbiri pe care le-a avut cu DABURON, profesor la Lyon, iar la 18 ani făcuse cu condeiul în mână, toată mecanica analitică a lui LAGRANGE.

După ce terminase de citit toate cărţile din Biblioteca tatălui său, cerând acestuia să-i mai cumpere altele, a fost dus la Biblioteca din Lyon, unde a cerut să i se dea din operele lui EULER, BERNOULLI şi D'ALEMBERT. Bibliotecarul îi spune zâmbind că acele cărţi sunt de matematici înalte şi că nu are să le priceapă!

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE
După un tablou reprodus în *L'Ilustration* din 7 Martie 1936

El îi răspunde că speră să le poată înţelege căci cunoaşte calculul diferenţial şi integral. După ce i se dă din acele opere, rămâne înmărmurit: în adevăr nu le putea pricepe, căci ele erau scrise în limba latină pe care nu o cunoştea. Se duce acasă amărît şi se apucă de învăţat latina. ARAGO ne spune că numai după câteva săptămâni, — iar nu după luni şi ani, — AMPÈRE a învăţat latineşte şi s'a putut duce la Lyon ca să citească acolo, la Bibliotecă, cărţi scrise în limba latină. El a mai învăţat singur greaca şi italiana.

Din citirea Enciclopediei, el a luat cunoştinţă de legenda *Turnului Babel*, unde s'au amestecat limbile, a tras concluzia că mai înainte fusese o singură limbă universală, şi s'a apucat să o reconstituiască, făcându-i o gramatică şi un dicţionar. Aceasta este o încercare interesantă de crearea unei limbi universale. Ceeace este mai curios este că mai târziu s'a văzut că unele cuvinte reconstituite de el s'au găsit prin vechile limbi asiatice, iar altele se găsesc şi azi pe la unele popoare sălbatice din Africa. A scris şi o poemă în acea limbă!

La 1789 izbucneşte Revoluţia franceză. Tatăl lui AMPÈRE, discipol al lui ROUSSEAU şi al enciclopediştilor francezi, se duce la Lyon unde i se dau funcţiunile de judecător de pace la Hala de cereale şi de magistrat municipal. Acuzat mai târziu de moderantism şi apoi ca fiind reacţionar, el este închis şi decapitat în Noemvrie 1793. In ultima lui scrisoare către soţia sa, spune între altele şi următoarele:

«J'ai reçu, mon ange, ton billet consolateur; il a versé un baume vivifiant sur les plaies morales que fait à mon âme le regret d'être méconnu par mes concitoyens, qui m'interdisent par la plus cruelle séparation, ma patrie tant chérie et dont j'ai eu tant à coeur la prospérité.

Je désire que ma mort soit le sceau d'une réconciliation générale entre tous nos frères et je la pardonne à ceux qui s'en réjouissent, à ceux qui l'on provoquée et à ceux qui l'ont ordonnée.

J'ai lieu de croire que la vengeance nationale, dont je suis un de plus innocentes victimes, ne s'étendra pas sur le peu de bien qui nous suffisait grâce à ta sage économie et à notre frugalité qui fut notre vertu favorite.. Ne parle pas à ma JOSÉPHINE de malheur de sont père, fait en sorte qu'elle l'ignore; quant à mon fils, il n'y a rien que je n'entende de lui; tant que tu les posséderas et qu'ils te posséderont, embrassez-vous en mémorie de moi. Je vous laisse à tous mon coeur. Adieu tendre amie, reçoit les derniers élans de ma tendresse et de ma sensibilité; dis à celui qui partagea notre retraite que je l'aime autant que je l'honore...

Moartea lui JEAN-JACQUES AMPÈRE a fost ascunsă câtva timp fiului său. Când însă el a aflat că tatăl său a fost decapitat, a fost cuprins de o durere mare ce i-au produs turburări puternice care erau să-l facă cât pe-aci să-şi piardă raţiunea. Aproape un an de zile el nu a mai fost capabil să-şi continue studiile şi cercetările lui ştiinţifice. Citirea unei cărţi a lui J. J. ROUSSEAU l'a făcut să se ocupe de chestiuni de botanică şi de zoologie iar citirea lui HORAŢIU a desvoltat într'însul inspiraţiuni literare, scriind poezii, poeme epice, tragedii, etc.

O altă întâmplare vine să descreţească fruntea amărîtă a lui AMPÈRE. Prin Aprilie 1797, făcând o plimbare pe o vale din apropiere, el întâlneşte două fete din Saint-Germain, sat situat la 4 km de Poleymieux, şi îi place una din ele, JULIE CARRON. A doua zi se şi duce la părinţii acestei fete şi o cere în căsătorie; aceştia însă îl întreabă ce a învăţat, cu ce se ocupă şi ce venituri are. AMPÈRE le-a arătat cu toată sinceritatea starea lui care nu a convenit D-lui CARRON. Au trebuit trei ani de corespondenţă, în care a scris şi Amorum şi de tratative până ce acesta, văzând cât ţinea fiica sa la AMPÈRE, să se hotărască pentru căsătorie, căutând el să găsească o situaţie lui AMPÈRE. A fost vorba ca el să se facă fabricant de produse chimice; şi în cele din urmă i-a găsit un post de agent de schimb la Lyon şi s'a decis căsătoria, care a şi avut loc la 7 August 1799. Postul promis însă nu l'a mai putut obţine şi AMPÈRE a trebuit să dea lecţiuni particulare de matematică pentru ca să-şi sporească veniturile peste cele ce i le lăsase tatăl său şi a putea face astfel faţă cheltuelilor de familie. Greutăţile familiare s'au sporit în anul următor, când a obţinut un fiu, pe JEAN-JACQUES AMPÈRE, care a fost un literat de frunte al Franţei, membru al Academiei franceze şi al Academiei de inscripţiuni.

Necesitatea de a-şi mări veniturile l-a făcut pe AMPÈRE să caute să capete o funcţiune mai sigură decât ocupaţiunea de meditator de elevi, şi atunci s'a gândit să caute să ia o catedră de matematică sau fizică. Omul acesta, care nu făcuse nicio şcoală, nu avea niciun titlu, s'a îndreptat către o ocupaţiune pentru care nu era deloc pregătit. ARAGO spune că vocaţiunea lui AMPÈRE era de a nu fi profesor. Din ceeace se cere unui profesor, el nu poseda decât ştiinţa. El, care nu fusese niciodată elev a trebuit

să se apuce de profesorat! Începutul l-a făcut ca profesor de fizică la Şcoala centrală din Bourg, la vreo 60 de km de Lyon, unde a stat doi ani. Această catedră nu i-a ameliorat mai deloc situaţia materială, deoarece familia şi-o lăsase la Lyon, aşa că el trebuia să ţie două case în loc de una. De multe ori drumul dintre Bourg şi Lyon îl făcea, în parte, pe jos ca să mai economisească din costul drumului. Mizeria s'a mai mărit prin faptul că soţia lui era bolnavă la Lyon şi nu avea cu ce să se îngrijească. Din scrisorile ei către dânsul se vede lipsa care o avea pentru întreţinerea casei, pentru plata doctorilor şi a medicamentelor.

In anul 1803 se înfiinţează Colegiul din Lyon, — astăzi Liceul AMPÈRE, — unde a fost adus ca profesor de matematici şi cu modul acesta el a putut sta la un loc cu familia. Bucuria pe care i-a adus-o această îmbunătăţire a situaţiei lui nu a durat însă de cât puţin timp căci la câteva zile după mutarea lui la Lyon, soţia lui părăseşte această lume! O nouă durere sdrobitoare vine să-i întrerupă activitatea lui ştiinţifică, din fericire însă fără consecinţe ca după moartea tatălui său. El îşi pune nădejdea în Dumnezeu pentru un viitor mai fericit, căruia îi adresează următoarea rugăciune:

„Mon Dieu! je Vous remercie de m'avoir crée, racheté et eclairé de Votre divine lumière en me faisant naître dans le sein de l'Eglise Catholique. Je Vous remercie de m'avoir rappelé à Vous après mes égarements; je Vous remercie de me les avoir pardonnés. Je sens que Vous voulez que je ne vive que pour Vous, que tous mes moments Vous soient consacrés M'ôterez-Vous tout bonheur sur cette terre? Vous en êtes le maître, ô mon Dieu, mes crimes m'ont mérité le châtiment. Mais peut-être écouterez Vous encore la voix de Vos miséricordes.

Multa flagella peccatoris; sperantem autem in Domino misericordia circumdabit. J'espère en Vous, ô mon Dieu! mais je serai soumis à Votre arrêt, quoi qu'il soit; j'eusse préféré la mort. Mais je ne méritais pas le Ciel, et Vous n'avez pas voulu me plonger dans l'enfer. Daignez me secourir pour qu'une vie passé dans la douleur, me mérite une bon mort dont je me suis rendu indigne.

O Seigneur! Dieu de miséricorde! daignez me réunir dans le Ciél à ce que Vous m'aviez permis d'aimer sur la terre!"

La Lyon nu a stat decât un an, căci faima lucrărilor lui ajunsese la Paris iar inspecţiunile ce i se făcuse ca profesor l-au arătat ca un om devotat meseriei şi ca un adevărat om de ştiinţă. După propunerea lui LALANDE şi DELAMBRE, el a fost chemat ca

repetitor la Şcoala politecnică din Paris pentru cursul de analiză, unde a intrat în funcţiune în Noemvrie 1804. Mama lui, fiul său şi sora sa au rămas la Poleymieux până la finele lui August 1807 când el şi-a dus toată familia la Paris. La Primăria din acel sat s'a găsit paşaportul, scris chiar de AMPÈRE, căci primarul nu ştia carte. AMPÈRE se caracterizează astfel: *etate 32 ani, înălţimea 1,77 m, părul castaniu-închis, barba castanie, ochii cenuşii-albaştri, nasul lung, gura mare, bărbia rotundă cu o dungă*".

Pentrucă retribuţia ce îi dedea dela Şcoala politecnică nu îi era de ajuns pentru a-şi întreţine familia, a mai fost numit în 1806 membru consultativ în Comitetul artelor şi meseriilor iar în 1808 Inspector general de Universitate. Aceste funcţiuni le-a primit numai din nevoia de a-şi crea venituri pentru a putea trăi, căci ele nu se împăcau deloc cu firea lui. El ţinea să fie liber, să se ocupe cu studiile şi cercetările lui, când voia şi cât voia, fără a fi obligat să facă servicii cu ore fixe sau care să ceară deplasări prin toată ţara.

Fiind la Paris, AMPÈRE a făcut greşeala de a se căsători cu JEANNE POTOT, cu care nu a putut trăi din cauză că nu se potrivea deloc cu caracterul său, şi de aceea a divorţat. Dela această căsătorie AMPÈRE a avut o fiică, ANTOINETTE, care la etatea de 20 ani a făcut greşeala tatălui său, căsătorindu-se cu un ofiţer desfrânat şi beţiv, astfel că s'a prăpădit nebună la 1842.

In 1816 AMPÈRE pierde pe mama lui, aşa că de aci înainte a îngrijit de dânsul sora lui.

In 1809 rămânând vacantă catedra de analiză şi mecanică la Şcoala politecnică din Paris, AMPÈRE a fost numit titular al ei. I se mai încredinţează apoi o catedră de fizică experimentală la Collège de France, a suplinit câtva timp catedra de astronomie dela Facultatea de ştiinţe de acolo şi a predat lecţiuni de logică la Facultatea de litere. In anul 1814 Academia de Ştiinţe îl alege membru în secţiunea de geometrie, apreciind astfel mult aptitudinile lui pentru ştiinţele matematice şi lucrările lui în acest domeniu. De altfel, mai toate instituţiunile ştiinţifice din vremea lui l-au avut ca membru. El a fost un geniu care a strălucit în toată lumea!

Neţărmurita activitate didactică şi ştiinţifică a lui AMPÈRE l-a slăbit fiziceşte pe la 60 de ani. In Mai 1836 pleacă spre Sudul Franţei spre a inspecta învăţământul. Pe drum capătă o boală de

piept, care l-a făcut să-şi presimtă sfârşitul, căci în ultima scrisoare trimisă fiului său din acea călătorie spune *„mă prăpădeşte oboseala de a scrie“*.

In ziua de 10 Iunie aflându-se la Liceul din Marsilia se simte rău; directorul scolii începe să-i citească pasaje din *Imitation de Jesus-Christ, iar* AMPÈRE îi răspunde:

„Je la sais par cœur toute entière“.

Acestea au fost ultimele lui cuvinte, după care a închis ochii pentru vecie! El a fost înmormântat la Cimitirul St. Charles din Marsilia, iar în 1866 rămăşiţele lui pământeşti au fost duse la Cimitirul Montmartre din Paris, alături de mormântul fiului său. Pe acesta era scris după propria sa dorinţă numai cuvintele: *„Fiul lui* AMPÈRE“.

Pe epitaful lui AMPÈRE sunt săpate la fine cuvintele: *„El a iubit umanitatea, a fost simplu şi mare“*.

(Va urma).

I. IONESCU.

TABLA ŢIBETULUI

In *Arimetica* lui GEORGE ŞINCAI apărută la Blaj în 1785 întâlnim pentru tabla înmulţirii numirea curioasă de *„Tabla Ţibeti“*. Astfel în § 16 sub *e* cetim: *„De vor fi amândoi Factorii numai de câte o Ţifră Productul lor se va putea afla în Tabla ce se zice a Ţibeti“*. Iar în Adaogerea dela sfârşitul cărţii: *„Tabla Ţibeti... ne învaţă, cum trebue înmulţiţi Numerii între sine începând dela 1 la 10“*.

O numire asemănătoare aflăm în *„Povăţuirea către Aritmetică“* apărută la Buda în 1806 şi în ediţiile ulterioare absolut identice din 1816, 1822, 1836 şi 1854, unde în *Insemnarea* dela sfârşitul cărţii cetim: *“... foarte înţelepţeşte au lucrat Invăţetorii aceia cari au băgat tocma în sfârşit şi Tabla Ţibetului sau cum o numesc unii Tabla Leaneşilor, pentru aceasta învăţa numai prin ajutorul degetelor a afla acelea care se află mai ales în Tabla Inmulţirei şi a Inpărţirei“...* Faptul că traducătătorul anonim al *„Povăţuirii“* amestecă *tabla Ţibetului* cu înmulţirea pe degete şi

cu *tabla Leaneşilor (regula pigrorum)* e de puţină importanţă pentru cele ce urmează.

E însă interesant că nici *tabla Ţibeti* nici *tabla Ţibetului* nu intervine în Aritmetica dela 1777 apărută în Viena, precum nici într'o aritmetică românească ulterioară. Numirea e prin urmare introdusă în literatura matematică română de G. Şincai şi a fost răspândită în Ardeal până pe la sfârşitul secolului trecut, dispărând apoi complet.

Numirea de *Tabla Ţibetului* sau a *Ţibeti* de unde provine? Mai întâi e aproape evident, că aceste numiri nu pot fi decât traducerea deformată a vreunui termen străin. Şimcai nu era matematician: *Aritmetica* lui e tradusă din cuvând în cuvânt după manualul şcolar german „*Anleitung zur Rechenkunst*“ apărut la Viena în 1777 şi tradus în diversele limbi ale Austriei: italiană, cehă, sârbă etc. Cea dintâi traducere românească a acestui manual este *Ducerea de mână cătră Aritmetică* tipărită tot în Viena la 1777 în limba germană şi română (vezi articolul D-lui I. Ionescu în *Gazeta Matematică* din anul XLI No. 1). Ea pare a fi datorită lui T. Iancovici de Mirivo, directorul şcolilor gr. or. din Banat. Iancovici şi Şincai au tradus acelaş text german. Dar în textul original german tabla înmulţirii se numeşte „*Einmaleins*“ astfel că termenul întrodus de Şincai e luat de alt undeva. De fapt propoziţia citată mai sus din § 16 precum şi *Adaugerea* din Aritmetica lui Şincai lipsesc din textul german ele fiind introduse de acesta.

O cercetare amănunţită a aritmeticelor anterioare celei a lui Şincai, îndeosebi a celor din Ardeal şi Ungaria arată că o numire analoagă celei a lui Şincai pentru tabla înmulţirii se întâlneşte adesea în unele aritmetici ungureşti din veacul al XVII şi XVIII.

Un indiciu preţios în această privinţă este *Aritmetica* lui G. Marothi, profesor la Debreţin, apărută în Debreţin la 1743, 1763 şi 1782, în care autorul spune că *Tabula Pythagorica* se mai numeşte şi *Tabula Cebetis*, dar el nu ştie de unde provine această numire.

In *Aritmetica* lui Tolvai apărută începând dela 1675 în mai multe ediţii în diferite oraşe (şi în Cluj la 1703) găsesc pentru tabla înmulţirii numirea de *Tabula Cebetis*.

In *Practice Algoritmi Erothemata Methodica* a lui I. Onadi, (tot în ungureşte, tipărită în Caşovia la 1693, găsim numirile sinonime: *Mensa Pithagorae, tabla lui Pitagora* şi *Tabula Cebetis.*

Tot *Tabula Cebetis* o mai aflu şi în ediţia dela 1696 a unei cărţi destinată negustorilor etc., intitlată „*Practica Aritmetica*". E interesant însă că în ediţia dela 1747 precum şi în cea dela 1632, apărută în Alba-Iulia, întâlnim numai numirea de *Tabula Pythagorica.*

In *Aritmetica* din Cluj dela 1591 aflăm numai *Tabula Pythagorica.*

Din cele de mai sus rezultă clar două lucruri: întâi că *Tabla Ţibetului* sau a *Ţibeti* e identică numirii de *Tabula Cebetis* sau *Coebetis* şi al doilea că această numire, folosită numai în Ardeal şi Ungaria, a fost adoptată de unii autori maghiari dela sfârşitul veacului XVII, foarte probabil de F. Tolvai Menyői.

De unde provine însă *Tabula Cebetis?* Înţelesul acestei expresii ar fi că tabla înmulţirii este *tabla lui* Cebes. Dar se ştie că *Cebes,* filosof, elev de a lui Socrate, nu are nimic de a face cu tabla înmulţirii atribuită, — pe drept sau pe nedrept, — lui Pitagora. Se cunoaşte însă o lucrare cu conţinut moral πινα̣ (Tablou) atribuită acestui filosof, al cărei titlu în traducere latină este „*Tabula Cebetis*". In această carte se arată căile ce duc spre fericire în viaţă „*pe cari dacă le înţelegeţi veţi fi cuminţi şi fericiţi, în caz contrar fiind fără minte şi nenorociţi veţi petrece rău viaţa*". Cărticica lui Cebes se preda în liceele jezuite din Europa şi în cele protestante din Ardeal şi Ungaria din veacul al XVII şi XVIII; era deci o carte foarte răspândită.

Se pare deci că ne aflăm în faţa unei schimbări semantice. *Tabula Cebetis* a ajuns să însemne tabla înmulţirii. Tolvai, care nu ştia prea multă matematică, sau a confundat cele două table, sau, mai probabil, în mod intenţionat a adoptat numirea de *Tabula Cebetis* pentru a arăta că tabla înmulţirii e tot atât de necesară fericirii în viaţă ca şi sfaturile morale a lui Cebes.

In rezumat, *Tabla Tibetului* sau a *Ţibeti* provine dela *Tabula Cebetis* adoptată pentru tabla înmulţirii de unii autori maghiari, dela cari a împrumutat-o, atât G. Şincai, cât şi traducătorul anonim al *Povăţuirii* dela 1806.

Victor Marian.

CONICELE DE RAMIFICARE A TREI CONICE IN FASCICOL

(Urmare dela pag. 469)

8°. Teoremă.

Condiţia necesară şi suficientă pentruca una din dreptele de segmentare echiunghiulară $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ *ale unui punct* F, *diferit de punctele fixe ale fascicolului, să cadă perpendicular pe linia centrelor, este ca* F *să se găsească pe unul din cercurile de ramificare* Z_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ *ale ternei* O_i $(i = 1, 2, 3)$. *In acest caz, piciorul* $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ *al dreptei* $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ *cade chiar în centrul cercului jacobian asociat* J_i $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Să introducem ca parametru proiectiv al unui punct C pe linia centrelor, parametrul binar s^* al cercului (1) cu centrul în C. Pe dreapta dela infinit luăm ca parametru proiectiv al direcţiei Φ, care face cu linia centrelor unghiul φ, mărimea

$$f = \operatorname{cotg}\varphi. \tag{14}$$

Facem, odată pentru totdeauna, învoiala ca axului radical şi punctelor lui PONCELET din fascicolul (1) să le corespundă parametrii σ^1, σ^2, σ^3, în această ordine.

Fie Δ una din dreptele $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ de segmentare echiunghiulară, iar Φ, C respectiv intersecţiile ei cu dreapta dela infinit şi linia centrelor. Proprietatea dreptei Δ exprimată de lemma 5° revine la următoarele egalităţi de rapoarte anarmonice

$$(f\, f^1 f^2 f^3) = (\sigma^1\omega^1\omega^2\omega^3)\ ,\ (\infty\, f^1 f^2 f^3) = (s^*\omega^1\omega^2\omega^3),$$

sau, explicit:

$$\frac{(f^2-f^3)(f^1-f)}{(\omega^2\omega^3)(\omega^1\sigma^1)} = \frac{(f^3-f^1)(f^2-f)}{(\omega^3\omega^1)(\omega^2\sigma^1)} = \frac{(f^1-f^2)(f^3-f)}{(\omega^1\omega^2)(\omega^3\sigma^1)}$$

$$\frac{f^2-f^3}{(\omega^2\omega^3)(\omega^1 s^*)} = \frac{f^3-f^1}{(\omega^3\omega^1)(\omega^2 s^*)} = \frac{f^1-f^2}{(\omega^1\omega^2)(\omega^3 s^*)}.$$

Impărţind aceste egalităţi membru cu membru şi însemnând valoarea comună a rapoartelor cu g, avem

$$f^i = f + g\frac{(\omega^i\sigma^1)}{(\omega^i s^*)} \qquad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Trebue observat că prezența numitorilor nu e esențială, ci înseamnă un artificiu de scriere al formulelor (15), care puteau foarte bine rămâne sub forma întreagă. Deci nu e nevoie să facem ipotesa că sunt diferiți de zero.

Să căutăm acum legătura dintre parametrii f^i și parametrul s al cercului O, descris de F din fascicolul (1).

Se vede ușor că raportul de puteri

$$(FG^i)^{\bar{2}} : (FG^j)^{\bar{2}}$$

e un parametru proiectiv al cercului O în fascicolul (1). Deci e o funcțiune omografică de celălalt parametru s: care se anulează, devine infinită sau egală cu 1 respectiv pentru $s = \omega^i, \omega^j, \sigma^1$. Incât putem scrie

$$(16) \qquad (FG^i)^{\bar{2}} = l^{\bar{2}} \frac{(\omega^i s)}{(\omega^i \sigma^1)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

unde $l^{\bar{2}}$ e un factor de proporționalitate, variabil cu punctul F pe cercul O.

Pe de altă parte se vede ușor că $(R^i)^{\bar{2}}$ e funcțiune rațională de ordinul al doilea de parametrul binar ω^i al cercului corespunzător O^i. Această funcțiune are zerurile $\omega^i = \sigma^2, \sigma^3$ și polul dublu $\omega^i = \sigma^1$. Deci, însemnând cu $m^{\bar{2}}$ o constantă finită și diferită de zero putem scrie

$$(17) \qquad (R^i)^{\bar{2}} = m^{\bar{2}} \frac{(\sigma^2\omega^i)(\sigma^3\omega^i)}{(\sigma^1\omega^i)^{\bar{2}}}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dar, în virtutea lui (12) și (14), avem

$$f^i = FG^i : R^i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

sau, introducând expresiile (16) și (17) și punând

$$-h = l : m,$$

ajungem la relațiunile căutate între f^i și s:

$$(18) \qquad f^i = -h \frac{(\sigma^1\omega^i)\sqrt{(\omega^i s)}}{\sqrt{(\sigma\omega^i)^3}}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

Din (15) şi (18) rezultă ecuaţiile problemei

$$(19)\qquad \boxed{f+g\frac{(\omega^i\sigma^1)}{(\omega^i s^*)}+h\frac{(\sigma^1\omega^i)\sqrt{(\omega^i s)}}{\sqrt{(\sigma\omega^i)^3}}=0} \qquad i=1,2,3.$$

O discuţie simplă a acestor relaţii arată că, în general, pentru $f=0$, avem $g=h=0$ şi deci $l=0$. Aşa dar, citim pe formulele (16), F se confundă cu unul din punctele fixe dela distanţă finită ale cercurilor (1). Numai pentru aceste puncte Δ devine perpendiculară pe linia centrelor.

Singura excepţie o formează cazul în care coeficienţii lui g şi h din (19) devin proporţionali. Atunci putem avea $f=0$ pentru o infinitate de valori ale lui h şi deci ale lui l. Ţinând seamă de formulele (16), conchidem că Δ rămâne perpendiculară pe linia centrelor, pentru toate poziţiile lui F pe cercul O, de parametru s.

Dar scriind proporţionalitatea coeficienţilor lui g şi h din (19) şi ridicând la pătrat, dăm peste proporţiile (7) care definesc pe s şi s^* ca rădăcini asociate ale covarianţilor (5). Prin urmare teorema e demonstrată.

9⁰. **Transcrierea proiectivă a teoremei precedente.**

Ţinând seamă de teorema lui LAGUERRE, a unghiului, se verifică uşor următoarea definiţie proiectivă a dreptei de segmentare echiunghiulară $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$:

Dreapta $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ *e axa de omologie a triunghiurilor*

$$A^i_{\varepsilon i}\ ,\ D^i_{\varepsilon i}\ , \qquad i=1,2,3$$

determinate pe tangentele $FG^i_{\varepsilon i}$ *la conicele în fascicol* O^i $(i=1,2,3)$, *de tangentele în punctele absolute* A, D, *la fiecare din aceste cercuri.*

Fie atunci A, B, C, D punctele comune unei terne de conice în fascicol O^i $(i=1,2,3)$. In virtutea construcţiei proiective de mai sus, e clar că, pentru fiecare punct F din planul fascicolului, se introduc şase grupe de câte patru drepte $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=+1)$, asociate fiecăreia din cele şase coarde ale fascicolului:

$$(20)\qquad \begin{matrix}\Delta^{AD}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} & \Delta^{BD}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} & \Delta^{CD}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\\ \Delta^{BC}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} & \Delta^{CA}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} & \Delta^{AB}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\end{matrix}\ , \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=+1.$$

Când va fi nevoie, vom introduce în notația acestor drepte și vârful triunghiului conjugat $S^1S^2S^3$ prin care trece coarda asociată, astfel:

$$(20') \qquad \begin{matrix} \Delta^{S^1/AD} & \Delta^{S^2/BD} & \Delta^{S^3/CD} \\ \Delta^{S^1/BC} & \Delta^{S^2/CA} & \Delta^{S^3/AB}. \end{matrix}$$

E ușor de văzut că dreptele de același indicator $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ din (20) se grupează în plan după diagonalele unui patrupunct. Avem patru astfel de patrupuncte. Motivul stă în proprietatea a trei figuri, două, câte două omologice față de un același centru, de a avea axele concurente.

Vom numi dreptele (20) *transversalele cordale* ale punctului F în raport cu terna de conice O^i $(i = 1, 2, 3)$ în fascicol.

Cu aceste precizări avem următoarea transcriere proiectivă a teoremei 8°:

Condiția necesară și suficientă ca una din transversalele cordale din grupa $\Delta^{S^1/AD}$ *a unui punct* $F \neq B, C$ *să treacă prin* S^1, *este variația lui* F *pe o conică de ramificare* Z_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ *a ternei. Transversala cordală e în acest caz bine determinată de vârful* S^1 *și de polul coardei* AD *față de conica jacobiană asociată* J_i $(i = 0, 1, 2, 3)$.

10°. **Teoremă.**

Fie J_i $(i = 1, 2, 3)$ *o ternă generală a fascicolului* (1).

Dacă există un punct F *ale cărui grupe de transversale cordale* (20') *taie pe laturile triunghiului conjugat ternei, respectiv diviziuni* $\{C\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\}$ *de același raport anarmonic, atunci terna* J_i $(i = 1, 2, 3)$ *face parte din cuarta jacobiană* J_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ *a unei terne generale* O^i $(i = 1, 2, 3)$ *din același fascicol.*

E preferabil să reluăm, pentru câtva timp, limbagiul metric dela alineatul 8°. Formulele și rezultatele din acel alineat le vom folosi în ceeace urmează, numai după ce vom fi pus notația de acolo în acord cu notația din enunțul teoremei de mai sus, prin înlocuirile;

$$J_i \longrightarrow O^i \quad , \quad v^i \longrightarrow \omega^i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Insemnăm cu s^* parametrul binar al cercului $C_{\varepsilon_3\varepsilon_3\varepsilon_3}$ cu centrul în punctul de același nume, în care dreapta de segmentare echiunghiulară $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ a punctului F față de terna J_i $(i = 1, 2, 3)$

taie linia centrelor. Dacă s e parametrul cercului O al fascicolului, ce trece prin F, legătura dintre s^* şi s se obţine eliminând între ecuaţiile (19) mărimile f, g, h. Găsim:

$$(21) \qquad \sum \frac{(\iota^j \iota^k)(\sigma^1 \iota^i)}{\sqrt{(\sigma \iota^i)^3}} (\iota^i s^*) \sqrt{(\iota^i s)} = 0,$$

unde i, j, k e una din cele trei ordine ciclice ale indicilor 1, 2, 3. Luând toate combinaţiile de semne înaintea radicalilor avem, condensate în (21), ecuaţiile lineare la care satisfac cei patru parametri binari s^* ai cercurilor $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ ($\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1$) asociate cercului O, de parametru s.

Să căutăm o interpretare a condiţiei (21) în planul conicei $\mathfrak{N}$, din alineatul 3^0.

Luând ca triunghiu de referinţă triunghiul J_i ($i = 1, 2, 3$) format de imaginile pe $\mathfrak{N}$ ale cercurilor de acelaşi nume şi dispunând de punctul-unitate, avem pentru $\mathfrak{N}$ următoarele ecuaţii parametrice, respectiv punctuale şi tangenţiale:

$$(22) \qquad x^i = 1 : (\iota^j \iota^k)(\iota^i s^*) \qquad i, j, k = 1, 2, 3$$

$$(22') \qquad y^i = (\iota^j \iota^k)^{\bar{2}} (\iota^i s^*)^{\bar{2}},$$

s^* fiind parametrul binar al punctului curent.

Să introducem conica $\mathfrak{M}$, de ecuaţie punctuală şi tangenţială (aceasta din urmă iraţională) respectiv

$$(23) \qquad \sum \frac{(\sigma^1 \iota^i)^{\bar{2}} (\iota^i s)}{(\sigma \iota^i)^3} x^j x^k = 0$$

$$(23') \qquad \sum \frac{(\sigma^1 \iota^i) \sqrt{(\iota^i s)}}{\sqrt{(\sigma \iota^i)^3}} \sqrt{y^i} = 0,$$

evident circumscrisă triunghiului J_i ($i = 1, 2, 3$).

Substituind în (23') valorile (22') obţinem tocmai (21).

Încât cercurile $C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ *au ca imagini pe* $\mathfrak{N}$, *contactele tangentelor comune dintre* $\mathfrak{N}$ *şi* $\mathfrak{M}$.

Fie, pe de altă parte, O* cea de a patra intersecţie a conicelor $\mathfrak{N}$ şi $\mathfrak{M}$ şi s^* parametrul binar corespunzător. Substituind (22) în (23) rezultă următoarea legătură involutivă între parametrii s şi s^* ai imaginilor O şi O*

$$(24) \qquad \sum \frac{(\iota^j \iota^k)(\sigma^1 \iota^i)}{(\sigma \iota^i)^3} (\iota^i s)(\iota^i s^*) = 0.$$

Deci dreapta OO* trece printr'un punct fix K din planul reprezentării. Coordonatele lui K se deduc imediat din confruntarea lui (24) cu (22'). Găsim:

$$(25) \qquad x^i = \frac{(\sigma^1 \iota^i)^{\overline{2}}}{(\iota^j \iota^k)\,(\sigma \iota^i)^3} \quad , \quad i, j, k = 1, 2, 3 \, .$$

Insă coordonatele (25) verifică (24). *Cu alte cuvinte* $\mathfrak{M}$ *trece prin* K.

E clar însă că diviziunea $\{C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ a centrelor cercuriior de acelaş nume e proiectivă cu diviziunea imaginilor lor pe $\mathfrak{N}$ care, cum am văzut, corespund contactelor tangentelor comune între $\mathfrak{N}$ şi $\mathfrak{M}$. Aplicând una din polaritățile reciproce, care permută pe $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{N}$, ultima diviziune se înlocueşte cu diviziunea

$$(O^* J_1 J_2 J_3)_{\mathfrak{M}}$$

de pe conica $\mathfrak{M}$. Ţinând seamă că punctul K se găseşte pe $\mathfrak{M}$ şi că O, O*, K sunt colineare, avem, în definitiv, următoarea egalitate de rapoarte anarmonice:

$$(26) \qquad (C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = K\,(O\, J_1\, J_2\, J_3).$$

Reluăm limbagiul proiectiv din enunţul acestei teoreme.

Fie K^i $(i = 1, 2, 3)$ punctele obţinute permutând în coordonatele (25) pe σ^1, pe rând, cu σ^2 şi σ^3. Intru cât punctele K^i rămân aceleaşi când trecem, de exemplu, dela coarda AD la coarda complementară BC, rezultă din (26) că diviziunile corespunzătoare $\{C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ tăiate de transversalele cordale $\Delta^{S^1/AD}$ şi $\Delta^{S^1/BC}$ pe latura S^2S^3 a triunghiului conjugat, sunt proiective fără vreo altă condiţie.

Prin urmare in virtutea acestei observaţii şi a egalităţilor (26), condiţia din enunţ, ca toate cele şaşe diviziuni $\{C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ relative la cele şase grupe de transversale cordale (20'), să fie proiective, revine la următoarele trei:

$$(27) \quad K^1\,(O\, J_1\, J_2\, J_3) = K^2\,(O\, J_1\, J_2\, J_3) = K^3\,(O\, J_1\, J_2\, J_3).$$

Să transferăm aceste relaţii din domeniul ternar al planului reprezentării, în domeniul binar al fascicolului (1).

Egalitățile (27) exprimă existența unei conice $\mathcal{K}$ care conține punctele $J_1 J_2 J_3 K^1 K^2 K^3$ din planul reprezentării și taie a patra oară pe $\mathfrak{T}$ în O. Ecuația lui $\mathcal{K}$ e deci de forma

$$\sum H^i x^j x^k = 0 \tag{28}$$

și trebue să se verifice pentru coordonatele punctelor K^i $(i = 1, 2, 3)$ din (25). Eliminarea coeficienților $H^i (i = 1, 2, 3)$ între aceste trei ecuații de condiție ne dă, după suprimarea factorilor $(v^j v^k) \neq 0$:

$$\| (\sigma^i v_4^j)^{-2} \| = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{29}$$

Determinatul din primul membru e un invariant al formelor cubice binare

$$(\sigma s)^3 \ , \ (vs)^3 \tag{30}$$

definit simetric în raport cu coeficienții acestor două forme. Ținând seamă de ecuațiile parametrice (22) ale conicei $\mathfrak{T}$ se verifică imediat că (29) exprimă existența unei conice $\mathcal{S}$ conjugată triunghiului de referință $J_1 J_2 J_3$ și circumscrisă triunghiului $S^1 S^2 S^3$ al imaginelor elementelor singulare din (1). In virtutea simetriei invariantului (29), e clar că anularea lui exprimă în acelaşi timp existența unei conice $\mathcal{J}$ conjugată triunghiului S^i și circumscrisă triunghiului J_i $(i = 1, 2, 3)$.

Noțiunile de reprezentare conică a formelor cubice binare din alineatul 3°, ne duc la încheierea următoare: Conicele de imagini J_i sunt trei din conicele jacobiene ale unei involuții cubice care conține terna singulară S^i $(i = 1, 2, 3)$. Imaginea celei de a patra conice jacobiene este cealaltă intersecție J_0 a lui $\mathfrak{T}$, cu $\mathcal{J}$.

(Va urma). D. BARBILIAN.

RAPORTUL COMISIUNEI
PENTRU
ACORDAREA PREMIULUI „V. CRISTESCU“

Subsemnații, cercetând articolele publicate în volumul XL al *Gazetei Matematice,* nu am găsit nici unul, care să corespundă regulamentului premiului, adică să fie referitor la geometria triunghiului sau trigonometrie și al cărui autor să fie elev de liceu, de școală militară, de politechnică sau student universitar.

In aceste condiţiuni premiul nu poate fi acordat pentru acest an şi conform art. 3 din Regulamentul premiului urmează să se cumuleze până la acordarea lui.

COMISIUNEA PENTRU PREMIUL „V. CRISTESCU"
COLONEL LITEANU, ING. A. IOANOVICI.

Acest raport s'a citit şi aprobat în adunarea generală din 27 Februarie. 1936.

NOTE MATEMATICE

39. *Notă bibliografică asupra câtorva curiozităţi ale numerelor* [1]). Am dat numeroase chestiuni relative la numerele întregi obţinute utilizând cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o singură dată. Aceste chestiuni mi-au fost sugerate în parte de următoarea problemă propusă de D-l R. BRICARD în *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1911 — 46:

Utilizând câte o singură dată cele 9 cifre semnificative, să se formeze 3 numere având respectiv 2, 3 şi 4 cifre astfel că ultimul număr să fie egal cu produsul primelor 2 numere.

Următoarele 9 soluţiuni

$$12 \times 483 = 5796 \; ; \; 18 \times 297 = 5346 \; ; \; 27 \times 198 = 5346$$

$$28 \times 157 = 4396 \; ; \; 39 \times 186 = 7254 \; ; \; 42 \times 138 = 5796$$

$$48 \times 159 = 7632 \; ; \; 4 \times 1738 = 6952 \; ; \; 4 \times 1963 = 7852$$

au fost date anterior de D-l H. E. DUDENEY în August 1910 în *The Strand Magazine.*

Am generalizat această chestiune introducând cifra zero, publicând problema 2798 în *Mathesis,* 1933 — 326. Soluţia acestei probleme încă nu a apărut. Iată soluţiile pe care le-am publicat în *The American Mathematical Monthly,* după soluţia problemei

1) *Gazeta Matematică* a publicat de asemeni numeroase probleme analoage cu acelea indicate în această bibliografie.

N. R.

D-lui R. BRICARD, reprodusă în acest jurnal de D-l CHENEY, 1934 — 265:

$$4 \times 3907 = 15628 \; ; \quad 4 \times 7039 = 28156 \; ; \quad 7 \times 4093 = 28651$$

$$7 \times 9304 = 65128 \; ; \; 27 \times 594 = 16038 \; ; \; 39 \times 402 = 15678$$

$$54 \times 297 = 16038.$$

Problemele 2839 şi 2875 (*Mathesis,* 1934) sunt de acelaşi gen. Iată alte 3 probleme analoage pe care le-am propus în *Mathesis:*

Problema 2055. (1922 — 297): Să se găsiască un pătrat de 6 cifre astfel ca cele 9 cifre ale acestui pătrat şi a rădăcinei sale să fie toate diferite şi semnificative. Soluţia este:

$$567^2 = 321489 \quad \text{şi} \quad 854^2 = 729316.$$

Problema 2873. (*Mathesis* — 1934): *Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, întrebuinţate câte o singură dată să se formeze un pătrat şi rădăcina sa.* Soluţia:

$$807^2 = 651249.$$

Problema 2745. (*Mathesis,* 1932 — 438). *Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, luate o singură dată să se formeze 2 numere care să fie respectiv pătratul şi cubul aceluiaşi număr.* Soluţia:

$$69^2 = 4761 \; ; \quad 69^3 = 238509.$$

Iată o frumoasă problemă pe care o voiu publica în *Mathesis: Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate o singură dată să se formeze 4 numere astfel ca produsul a 2 din ele să fie egal cu produsul celorlalte 2.* Exemple de soluţiuni:

$$1 \times 7690 = 2 \times 3845 \; ; \quad 96 \times 058 = 23 \times 174.$$

Pentru a termina aceste câteva linii bibliografice, amintesc şi problema 2738 (*Mathesis,* 1932 — 383): *Cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 luate o singură dată, să se formeze 3 numere astfel ca unul să fie egal cu suma celorlalte două.*

Soluţia acestei probleme a apărut în *Mathesis,* 1933 — 204.

V. THÉBAULT.

40. *Curiozităţi numerice.* Dacă primii 3 termeni ai şirului lui FIBONACCI sunt

$$u_1 = 0, \quad u_2 = u_3 = 1$$

atunci termenul u_{15} este 432 şi se observă că rangul lui u_{15} şi u_{15} sunt numere scrise cu primele 5 cifre semnificative.

G-L GH. B.

41. *O generalizare a problemei 4624.* [1]) Fie de calculat suma mai generală

$$S = (m+\alpha)(m+\alpha) + (m+2\alpha)[(m+\alpha)+(m+2\alpha)] + \ldots + (m+n\alpha)[(m+\alpha)+(m+2\alpha)+\ldots+(m+n\alpha)]$$

unde m şi α sunt numere oarecare, iar n un întreg pozitiv. S se mai poate scrie

$$(1) \quad S = \sum_{x=1}^{n}\left[(m+\alpha x)\sum_{k=1}^{x}(m+kx)\right] = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n} x(m+\alpha x)(2m+\alpha x+\alpha)$$

ţinând seamă de

$$\sum_{k=1}^{x}(m+k\alpha) = mx + \frac{\alpha x(x+1)}{2}.$$

Notând ca de obiceiu

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k, \quad (k = 0, 1, \ldots k)$$

expresia sumei (1) devine

$$S = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n} x(m+\alpha x)(2m+\alpha x+\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n}\left[\alpha^2 x^3 + (3m\alpha+\alpha^2)x^2 + (2m^2+m\alpha)x\right]$$

$$S = \frac{\alpha^2}{2}S_3 + \frac{3m\alpha+\alpha^2}{2}S_2 + \frac{2m^2+m\alpha}{2}S_1$$

---

1) A se vedea soluţia şi generalizarea dela pag. 449 din acest volum.

unde înlocuind pe S_1, S_2, S_3 prin valorile lor şi făcând toate calculele, se găseşte

$$S = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(3m\alpha + \alpha^2)}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$+ \frac{(2m^2 + m\alpha)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{\alpha^2}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1) + \frac{1}{2} mn(n+1)(n\alpha + m + \alpha).$$

Făcând $m = 0$, $\alpha = 1$ se găseşte suma propusă în problema 4624.

OCT. S. IANCULESCU.

42. *Asupra unor articole.*

In No. 8/936 articolul *„Două probleme"* trata aceleaşi probleme ca un alt articol din No. 2/935, evident, soluţionâdu-le diferit. Aceste două soluţiuni însă, sunt strâns legate şi şi de aceea îmi permit să le conexez, în nota de faţă.

Mă voiu referi la figura dela pag. 426 din articolul *„Două probleme"*.

Problema principală era, *să se găsească o tangentă la un cerc fix* (O_1) *pe care să se determine prin intersecţiile cu două drepte date, un segment, cu mijlocul în punctul de contact.*

Soluţia din articolul citat se reducea la construcţia a 2 hiperbole $(\mathcal{H}_1)$ şi $(\mathcal{H}_2)$ de ecuaţie, tip (4)

$$2xy + 2my^2 - (a+n)x - amy - mr^2 = 0,$$

care avea asimptotele determinate, Δ_1 şi Δ_2 sau Δ'_1 Δ'_2 şi trecea prin polul respectiv al dreptelor Ox şi Oy faţă de cercul (O_1).

Să plecăm dela această soluţie şi să observăm că în cazul când raza cercului (O_1) variază, ecuaţia (4) reprezintă *un fascicol tangenţial* de hiperbole, a căror intersecţie cu cercul (O_1) se află pe *conica*

$$\boxed{mx^2 - 2xy - my^2 + (a+n)x + amy = 0}$$

care este *o hiperbolă echilaterală,* care trece prin A, B, C, D, *evident* şi apoi prin O_1, O, α, şi β. (Figura dela pag. 426).

Această hiperbolă (H) este tocmai cea din articolul D-lui G-RAL GH. I. POPESCU, care se vede că soluționează în mod mai general problema, hiperbola nedepinzând de raza r, a cercului O_1.

Se vede ușor, cum de altfel este menționat în articolul citat, că *centrul lui* (H) *este în* ω_h *mijlocul lui* $\alpha\beta$, iar *axele* sunt *paralele cu bisectoarele unghiului* XOY.

2⁰. Voiu face câteva remarce.

a) *Intersecțiile asimptotelor lui* (H_1) *și* (H_2) *cu* (H) *se găsesc pe două cercuri concentrice cu* (O_1).

Asimptotele (Δ_1, Δ_2) și (Δ'_1, Δ'_2) sunt *hiperbole limită* ale fasciculelor respective.

b) *Intersecțiile asimptotelor între ele* $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta'_1, \Delta'_2)$ *se găsesc pe hiperbola complimentară a lui* (H).

LOCOT. MIHAIL I. FOCȘENEANU.

BIBLIOGRAFIE

Numerus. No. 12. Volumul 2. Aprilie 1936. București. Aforisme matematice. Géométrie du triangle par T. LALESCO.

A. GLODEN. *Sobre las identidades numéricas.* Madrid 1936.

J. B. POMEY. *Calcul des probabilités.* Paris. Gauthier Villars 1936.

Această carte conține Conferințele făcute de autor asupra calculului probabilităților la Școala superioară de electricitate din Paris, cu aplicațiuni la fizică. Chestiunile sunt tratate sumar și elementar, astfel că această carte este utilă celor ce voiesc să se inițieze cu calculul probabilităților în aplicațiunile lor la electricitate.

Chestiunile expuse sunt următoarele: Noțiunea de probabilitate, Probabilitatea compusă, Eveniment independent, Probabilitatea totală, Principiul lui BAYES, Aplicațiuni la calculul combinărilor, Probe repetate, Legea lui GAUSS, Legea lui POISSON, Probabilități geometrice, Problema *soț sau fărdă*, Originea calculului probabilităților, Utilitatea metodelor de recurență, Legea numerelor mari, Combinarea legilor de probabilitate, Teorema lui D'OCAGNE, Telefonie, calculul numărului organelor, Teoria cinetică a gazelor și echipartițiunea energiei, Necesitatea legii pentru repartizarea iuțelilor, Mișcarea browniană, valorile asimptotice ale lui $n!$, valoarea integralei:

$$\int_{-\omega}^{+\omega} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

I. I.

$$\int_{-\omega}^{+\omega} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

O. ONICESCU & G. MIHOC. *Sopra le leggi-limite delle probabilità.* (Extras din *Giornale dell'Instituto italiano degli Attuari*). Roma 1936.

Ştiinţă şi progres. Anul III. No. 2. Mai 1936. Târgu-Mureş. Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, de R. BĂDESCU.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXX. Fasc. VI, Decembrie 1935. Buenos-Aires. Asupra teoriei grupurilor, de ALBERTO E. SAGASTUME BERRA.

Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. XLII. No. 1. (Partea I). Ianuarie 1936. Menasha Wis. Lista anuală a lucrărilor publicate. Indexul volumului XLI.

Idem. Vol. XLII. No. 1. (Partea II). Ianuarie 1936. Menasha Wis.

Idem. Vol. XLII. No. 2. Februarie 1936. Menasha Wis. Asupra structurii continuităţilor, de G. T. WHYBURN. Congruenţe cu o înfăşurare medie comună, de MALCOLM FOSTER. Asupra reprezentărilor metrice ale spaţiilor fin conexate, de T. Y. TOMAS. Asupra extinderii homeomorfismului între două sectoare ale sferelor, de H. M. GEHMAN. Despre proprietăţile soluţiilor lui $t - du = 4$, de GORDON PALL. Asupra principiilor lui HAMILTON şi CARTAN, de J. W. CAMPBELL. Despre o reinterpretare a operaţiilor logice ale lui SCHÖNFINKEL, de W. V. QUINE. Observaţiune asupra unei recente publicaţiuni a lui HOLLCROFT, de A. R. WILLIAMS. Asupra unui grup de condiţiuni independente astfel ca o funcţiune reală să fie veşnic diferenţiabilă, de F. W. PERKINS. Asupra unor variaţiuni a căror secţiuni curbe sunt curbe hipereliptice, de B. C. WONG. Spinori şi tensori, de G. Y. RAINICH. Asupra caracterului invariant al unui sistem de ecuaţii parţial diferenţiale, de GORDON FULLER. Scalari conformi, de JACK LEVINE. Postulate pentru tipurile speciale ale grupelor, de RAYMOND GARVER. Asupra unor formule de cuadraturi şi a unei teoreme asupra polinoamelor trigonometrice, de J. GERONIMUS. Trei teoreme asupra înfăşurătoarei extremităţilor, de MARSTON MORSE.

Idem. Vol. XLII. No. 3. Martie 1936. Menasha Wis.

Contribución al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matemáticas (Serie Matematica) Vol. I. Fasc. I. Mai 1935. La Plata. (Publicaţiunile Facultăţii de Ştiinţe Fizico-Matematice ale Universităţii Naţionale din La Plata. No. 102). Asupra zerorilor integralei lui LAPLACE, de AGUSTIN DURANONA Y VEDIA. Asupra metodei de însumare a lui LE ROY de ordin neîntreg şi teoria produsului, de J. C. VIGNAUX. Asupra numărului complex hiperbolic şi relaţia sa cu geometria lui BOREL, de J. C. VIGNAUX. Asupra metodei de însumare a lui SANNIA prin seriile multiple, de J. C. VIGNAUX. Generalizarea unei teoreme a lui G. HARDY, de J. C. VIGNAUX-A. DURANONA Y VEDIA. Demonstrarea unor teoreme relative la seriile sumabile LE ROY, de A. DURANONA Y VEDIA şi J. C. VIGNAUX.

Idem. (Serie Fisica) Vol. I. Fasc. 1. Mai 1936. La Plata. (Publicaţiunile Facultăţii de Ştiinţe Fizico-Matematice din La Plata. No. 103).

Gazeta Matematică.-Supliment cu Exerciţii. Anul II. No. 7. 1 Aprilie 1936. Bucureşti.

Idem. Anul II. No. 8. 1 Mai 1936. Bucureşti.

Journal de Mathématiques Elémentaires, publié par H. Vuibert. Anul LX. No. 11. 1 Martie 1936. Paris.

Idem. Anul LX. No. 12. 15 Martie 1936. Paris.

Idem. Anul LX. No. 13. 1 Aprilie 1936. Paris.

Idem. Anul LX. No. 14. 15 Aprilie 1936. Paris.

Idem. Anul LX. No. 15. 1 Mai 1936. Paris.

Idem. Anul LX. No. 16. 15 Mai 1936. Paris.

Mathesis. Vol. L. No. 1 — 2. Ianuarie-Februarie 1936. Gembloux. Asupra tetraedrului circumscris de muchii şi asupra sferelor tangente la patru sfere tangente între ele, de R. GOORMAGHTIGH. Transmutarea unui triunghiu, de V. THÉBAULT. Asupra numerelor lui PYTHAGORA, de E. HEUCHAMPS. O teoremă de topologie asupra câmpurilor suprafeţelor, de G. VAN DER LYN. Reducerea la ordinul minim a sistemelor lineare a curbelor algebrice plane de genul 3, de P. DEFRISE. Asupra locului centrelor de curbură a unei curbe strâmbe, de R. DEAUX. Asupra pseudo-dreptelor, de d-ra LILA GUSSENHOVEN. Supliment oferit de D-l V. THÉBAULT: Asupra geometriei tetraedrului.

Idem. Vol. L. No. 3 — 4. Martie-Aprilie 1936. Gembloux. Asupra geometriei triunghiului, de J. LEEMANS. Asupra unui triunghiu special, de R. GOORMAGHTIGH. Curiozităţi aritmetice, de FISTIÉ. Asupra unui complex cuadratic dedus dintr'un complex linear, de R. DEAUX. Supliment oferit de D-l V. THÉBAULT: Geometria tetraedrului şi probleme asupra pătratelor.

Pitagora. Anul I. No. 5. Martie 1936. Craiova. Transformarea expresiilor $\sqrt[m]{A} \pm \sqrt[n]{B}$, de G. G. CONSTANTINESCU. Diviziunea expresiilor aritmetice, de M. AMĂRĂŞTEANU.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVI. No. 1. 15 Martie 1936. Aniversarea a 15 ani ai R. M. T., de V. ALACI şi C. TEODORESCU. Soluţiuni întregi ale ecuaţiunii $x^{\frac{2}{3}} - ay^2 = b$, de GH. CONSTANTINESCU.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives, Anul VI. No. 5. Mai 1936. Bruxelles.

The Mathematical Gazette. Vol. XX. No. 238. Mai 1936. London. Calculul fracţional, de W. FABIAN. O proprietate a secantei, de N. M. GIBBINS. Reabilitarea diferenţialelor, de G. TEMPLE.

PIERRE HUMBERT. *Potentiels et prépotentiels*. Paris. Gauthiers-Villars. 1936.

Acest volum e a 15-a fascicolă din colecţia „Cahiers Scientifiques" şi este prefaţat de D-l LOUIS DE BROGLIE. Cuprinsul volumului îl constituesc diverse generalizări ale ecuaţiei lui LAPLACE şi a potenţialului. In primul capitol se face studiul ecuaţiei lui LAPLACE şi a diverselor sale soluţiuni, cu ajutorul funcţiunilor lui LAMÉ, MATHIEU, GAUSS, LÉGENDRE, WEBER, BESSEL, etc. In capitolele următoare se generalizează aceste rezultate în diferite direcţiuni:

1°. Creşterea numărului de variabile (potenţial în hiperspaţiu).

2°. Atracţiuni ne newtoniene: fie proporţionale cu o putere oarecare a distanţei (prepotenţiale), fie funcţiuni oarecare de distanţă (prepotenţiale generalizate).

3°. Creşterea ordinului ecuaţiei, fie prin repetarea operaţiei Δ_2 (funcţii biarmonice), fie prin înlocuirea expresiei $x^2+y^2+z^2$ cu o expresie analoagă de grad superior (potenţiale şi prepotenţiale de ordinul al treilea).

Se ajunge astfel la ecuaţia D-lui P. HUMBERT:

$$\Delta_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} = 0,$$

ecuaţie studiată pe larg în teza de doctorat a D-lui J. DEVISME. Relativ la această ecuaţie se menţionează (pag. 69) extinderea teoremei lui LORD KELVIN făcută de D-l D. IONESCU.

Pentru generalizări mai largi se menţionează (pag. 77) ecuaţia D-lui M. GHERMĂNESCU:

$$\Delta_4 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - 2\sum \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + 8\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y \partial z \partial t} = 0$$

şi (pag. 78) ecuaţia D-lui N. BOTEA:

$$\Delta_{B,n} U = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{vmatrix} U = 0.$$

N. B.

CERERI

257. In cartea *«Bisericile lui Ştefan cel Mare»* de GH. BALŞ, la pag. 197 am văzut că ŞTEFĂNIŢĂ VODĂ a cerut să se aducă din Polonia 50 chintale de plumb pentru acoperirea Bisericii Sft. Gheorghe din Suceava. D-l NISTOR HANDEL arată că 50 chintale moldoveneşti fac 3200 până la 15.000 kg şi dela 3200 — 4200 kg, socotite în chintale poloneze. Aş dori să ştiu:

1. De ce nu se poate da exact greutatea celor 50 chintale?

2. Chintalul are valori diferite în fiecare ţară? Altfel valoarea chintalelor moldoveneşti sau poloneze ar trebui să coincidă.

MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU.
(Liceul „Fraţii Buzeşti" Craiova)

DIVERSE

Societatea Română de Matematici a ţinut următoarele şedinţe:

20 Aprilie 1936 au comunicat D-nii: N. TEODORESCU, *Asupra ecuaţiunilor cu derivate parţiale cu caracteristici multiple* şi GR. C. MOISIL despre *Silogismul statistic*.

4 Mai 1936 au comunicat D-nii: G. EM. FILIPESCU despre *«Calculul cadrelor»* şi N. CIORĂNESCU, *«Asupra ecuaţiei membranelor vibrante»*.

25 Mai 1936 au comunicat D-nii: AL. PANTAZI despre *«Deformarea proiectivă a reţelelor»* şi N. TEODORESCU despre *«Derivata areolară în aplicaţiile mecanice»*.

D-l Prof. ENRICO BOMPIANI dela Universitatea din Roma a ţinut următoarele conferinţe la Soc. de Matematice.

Sâmbătă 9 Mai: Rezultate noui în Geometria proiectivă.

Vineri 22 Mai: Reconstituirea repede a Geometriei proiective a suprafeţelor.

Sâmbătă 23 Mai: Câteva proprietăţi caracteristice ale suprafeţei lui VERONESE.

Sporirea Bibliotecii

M. E. CARVALLO. Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes. Paris 1896.
Donată de I. IONESCU, Inginer.

A. TARTINVILLE. Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré à une inconnue. Paris 1891.
Donată de I. IONESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4314. *Prin centrul radical* R *a trei cercuri* C_1, C_2, C_3 *se duc două drepte* D_1 *şi* D_2. *Dreapta* D_1 *întâlneşte cercurile în punctele* A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32} *iar dreapta* D_2 *întâlneşte cercurile în punctele* B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}, B_{31}, B_{32}. *Paralelele duse prin* A_{12}, A_{22}, A_{32} *la* D_2 *întâlnesc respectiv paralelele duse prin punctele* B_{12}, B_{22}, B_{32} *la dreapta* D_1 *în punctele* M, N, P.

Să se arate că triunghiul format de dreptele $A_{11}B_{11}$, $A_{21}B_{21}$, $A_{31}B_{31}$, *este omologic cu triunghiul* MNP.

N. Botea.

Perechile de puncte $(A_{11}, A_{12}), \ldots$ sunt respectiv inverse faţă de centrul radical de de modul, puterea comună a lui R în raport cu toate cercurile. Notând x_1, x_2, x_3 abscisele punctelor A_{12}, A_{22}, A_{32} pe D_1 şi y_1, y_2, y_3 ordonatele punctelor B_{12}, B_{22}, B_{32} pe D_2 şi luând ca unitate, puterea lui R, abscisele punctelor A_{11}, A_{21}, A_{31}, respectiv ordonatele punctelor B_{11}, B_{21}, B_{31} devin

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \text{ şi } \frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}, \frac{1}{y_3}.$$

Dreptele $A_{21}B_{21}$ şi $A_{31}B_{31}$ au ecuaţiile:

$$xx_2 + yy_2 = 1 \quad \text{şi} \quad xx_3 + yy_3 = 1,$$

dreapta ce trece prin intersecţia lor, α, şi prin punctul $M(x_1, y_1)$ are ecuaţia:

$$\frac{xx_2 + yy_2 - 1}{xx_3 + yy_3 - 1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - 1}{x_1x_3 + y_1y_3 - 1} = \frac{d_3}{d_2}$$

notând

$$x_2x_3 + y_2y_3 - 1 = d_1, \ldots$$

sau reducând

$$(\alpha\, M) \qquad x(x_2d_2 - x_3d_3) + y(y_2d_2 - y_3d_3) - d_2 + d_3 = 0.$$

Rezultă din consideraţia punctelor analoage β şi γ, că

$$(\alpha M) + (\beta N) + (\gamma P) = 0$$

şi dreptele αM, βN şi γP sunt concurente, ceeace probează propoziţia enunţului.

N. N. MIHĂILEANU
Student, Bucureşti

Notă.: 1 Problema a mai fost publicată dc autorul ei şi în Curierul Matematic: problema 191, pag. 207; anul II şi nerezolvată,

2. Dacă se face o transformare prin inversiune, figurii de centru R şi modul, puterea lui comună, se poate enunţa:

Cercul trecând prin A_{11} şi tangent în R la D_2, taie cercul trecând prin B_{11} şi tangent în R la D_1 în M'; fie N' P' puncte analoage. Cercurile A_{22} B_{22} R şi A_{32} B_{32} R se retaie în α'; fie β' şi γ' puncte analoage.

Cercurile M' α' R, N' β' R, P' γ' R au o coardă comună.

Cercurile A_{32} B_{32} R, M' N' R şi analoagele, se taie respectiv în încă trei puncte situate pe un cerc trecând prin R.

N. M.

PROBLEMA 4387. *Să se calculeze valoarea determinantului*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! \ldots & n! \\ 2! & 3! & 4! \ldots & (n+1)! \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n! & (n+1)! & \ldots & (2n-1)! \end{vmatrix}.$$

M. GHERMĂNESCU

Prima soluţie, dată de D-ra MARG. CARACUDOVICI (Studentă) şi D-nii: P. C. MAZILU, S. HORNSTEIN (studenţi), V. GRIGORESCU (Liceul militar Mânăstirea Dealului).

Dăm pe $k!$ factor comun pe coloana $a\,k^a$ şi obţinem

$$D_n = 1!\,2! \ldots n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 2 & 3 & 4 \ldots & n+1 \\ 2.3 & 3.4 & 4.5 \ldots & (n+1)(n+2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2.3.n & \cdot & \cdot & (n+1)\ldots(2n-1) \end{vmatrix}.$$

Notând cu Δ_n deteminantul din membrul al doilea, în acesta vom scade elementele primei coloane din a doua, cele din coloana

a doua din a treia, etc. Desvoltându-l după elementele primei linii, în care unul singur este diferit de zero, dând în determinantul obţinut pe 2 factor comun pe linia a doua, pe 3 în a treia, etc., vom obţine

$$\Delta_n = (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 3.4 & 4.5 & 5.6 & \dots & (n+1)(n+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Procedând la fel cu determinantul nou, vom putea da succesiv factori comuni pe $(n-2)!, (n-3)! \dots 3!, 2!$, ultimul determinant fiind egal cu unitatea. Rezultă astfel

$$\Delta_n = 1!\,2!\,3! \dots (n-1)!,$$

deci

$$D_n = [1!\,2!\,3! \dots (n-1)!]^2 n!.$$

Soluţia a doua, dată de D-nii: Tudor Stoicescu, Em. Blaga, C. Cotescu, P. Cojocaru, I. Bogdan, I. Buzincu, Călin Ioan Dimitriu.

Dăm pe linii respectiv factorii $1!, 2!, .., .n!$, iar pe coloane, începând cu a doua, $1!\,2!, \dots (n-1)!$; ţinând seama de identitatea

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!},$$

determinantul dat se mai poate scrie

$$D_n = [1!\,2!\,3! \dots (n-1)!]^2 n! \begin{vmatrix} 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_{n+1}^n & C_{n+2}^n & \dots & C_{2n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Or determinantul din membrul al doilea este cunoscut, iar valoarea sa, egală cu unitatea, se obţine scăzând liniile între ele (prima din a doua, etc.). Rezultă deci:

$$D_n = [1!\,2!\,3! \dots (n-1)!]^2 n!.$$

3. *Soluţia a treia* dată de D-l ILIE I. ŢIŢEICA (Liceul Mânăstirea Dealului).

Scădem coloana $a\,k^a$, înmulţită cu $k+1$, din $a\,(k+1)^a$, unde $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$; obţinem:

$$D_n = 1!\,(n-1)!\,D_{n-1},$$

în care D_{n-1} se obţine din D_n suprimând prima linie şi ultima coloană.

In D_{n-1} scădem coloana $a\,k^a$, înmulţită cu $k+2$, din $a\,(k+1)^a$; obţinem:

$$D_{n-1} = 2!\,(n-2)!\,D_{n-2},$$

în care D_{n-2} se obţine din D_{n-1} ca acesta din D_n. Continuând procedeul, obţinem relaţia

$$D_{n-i+1} = i!\,(n-i)!\,D_{n-i}\ ,\quad i = 1, 2, \ldots n-1,$$

din care deducem imediat valoarea aflată mai sus.

Generalizare dată de D-l I. BUZINCU (Lic. militar Iaşi).

Vom calcula determinantul:

$$D_n = \begin{vmatrix} (k+1)! & (k+2)! & \ldots & (k+n)! \\ (k+2)! & (k+3)! & \ldots & (k+n+1)! \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k+n)! & (k+n+1)! & \ldots & (k+2n-1)! \end{vmatrix}.$$

Procedând ca la soluţia a doua se găseşte:

$$D_n = 1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!(k+1)!\,(k+2)!\ldots(k+n)! \begin{vmatrix} 1 & C_{k+2}^1 & C_{k+3}^2 & \ldots & C_{k+n}^{n-1} \\ 1 & C_{k+3}^1 & C_{k+4}^2 & \ldots & C_{k+n+1}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & C_{k+n+1}^1 & C_{k+n+2}^2 & \ldots & C_{k+2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Valoarea determinantului din membrul al doilea este 1, după cum se arată uşor, deci:

$$D_n = 1!\,2!\,3!\ldots(n-1)!\,(k+1)!\,(k+2)!\ldots(k+n)!$$

care pentru $k = 0$ se reduce la cea de mai sus.

PROBLEMA 4422. *Să se rezolve un triunghiu oarecare cunoscând una din laturi, raportul k al ei către suma celorlalte două şi ştiind că unghiul opus ei este dublul unuia din unghiurile alăturate ei. Discuţiune. Să se construiască triunghiul în cazuri particulare interesante.*

O. N. ŢINO.

Soluţiune dată de D-ra DACIA S. MUSCELEANU şi D-nii ILIE IOAN ŢIŢEICA, AL. D. STOICA (Liceul Marele Voevod Mihai»); VASILE CEAUŞESCU (Liceul Militar «Mihai Viteazu» Tg.-Mureş); FLORENTIN G. SAVOVICI (Şcoala Ofiţeri Geniu); IANCU M. SAGER, MARIN I. PREDOESCU, M. C. POSTELNICESCU (Liceul Militar «M. Dealu»); VILHELM CSEKE (Stud. Mat. Cluj); PETRE P. COJOCARU, IOAN GR. BOGDAN şi C. I. C. DIMITRIU (Elevi Liceul Militar Iaşi).

Să presupunem că latura dată a triunghiului ABC este BC; să însemnăm cu a măsura ei, cu b şi c respestiv măsurile necunoscute ale laturilor AC şi AB şi fie $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B$.

Din datele problemei avem încă că: $\frac{a}{b+c} = k.$ (1)

Scriind proporţionalitatea dintre laturi şi sinusurile unghiurilor opuse în triunghiul ABC, avem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin(A+B)}. \tag{2}$$

Deducem imediat din relaţiunile (2), pe baza proprietăţilor rapoartelor egale folosind formula de transformare în produs a sumei sinusurilor, egalitatea:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{2 \sin A \cos B} \tag{3}$$

sau încă succesiv:

$$\cos B = \frac{b+c}{2a}, \quad \cos B = \frac{1}{2k} \tag{4}$$

în virtutea relaţiunii (1).

Problema este posibilă în toate cazurile pentru care avem $\frac{1}{2k} < 1$ (k fiind pozitiv mai mic ca 1), deci în toate cazurile în care

avem îndeplinită condiţiunea $\frac{1}{2} < k < 1$. (k nu poate avea valoarea $\frac{1}{2}$, căci în acest caz unghiul B ar fi 0^0 sau 180^0 în care triunghiul ABC nu există).

In toate cazurile de posibilitate, avem:

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} = \frac{a\sin B}{\sin 2B} = \frac{a\sin B}{2\sin B\cos B} = \frac{a}{2\cos B}$$

sau încă folosind valoarea lui cosB din (4):

$$b = ka \tag{5}$$

Alăturând la (5) relaţia (1) sub forma: $b + c = \frac{a}{k}$ (1')

deducem pentru măsurile celor 3 laturi ale triunghiului ABC:

$$(6)\ \overline{BC} = a\ ,\ \overline{AC} = ka\ ,\ \overline{AB} = \left(\frac{1}{k} - k\right)a\ ;\ \left(\frac{1}{2} < k < 1\right).$$

Suprafaţa triunghiului ABC este dată de relaţia:

$$S = \frac{a^2}{8}\,\frac{1 - k^2}{k^2}\sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}\ . \tag{7}$$

Cazuri particulare interesante. Să presupunem că valoarea raportului k este astfel dată încât, având aleasă o unitate de lungime, să putem construi o lungime a cărei măsură să fie egală cu $\frac{1}{k}$.

In toate aceste cazuri, în care triunghiul este oarecare, construcţiunea triunghiului ABC rezultă imediat din următoarele observări:

Dacă prelungim latura $\overline{BA}$ cu un segment $\overline{AD} = \overline{AC} = b$ şi unim punctul D cu C, obţinem triumghiul BDC care *este isoscel.* In adevăr, având $\overline{AD} = \overline{AC}$, avem:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle CDA = \tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC\ ,$$

deci:

$$\overline{CD} = \overline{CB} = a.$$

Luând un segment $\overline{BC} = a$, din centrul B şi cu raza $\overline{BD} = b + c$ vom trage un cerc, iar din centrul C şi cu raza $\overline{CM} = a$ vom trage un al doilea cerc, care va determina pe primul poziţiunile punctului

D. Perpendicularele la mijlocul segmentelor $\overline{CD}$, vor determina pe BD poziţiunile vârfului A. Avem astfel două triunghiuri ABC, simetric egale, care sunt soluţiunile problemei.

In cazul când valoarea raportului k, este dată prin $\frac{n}{m}$, m şi n fiind numere întregi pozitive astfel ca: $\frac{1}{2} < \frac{n}{m} < 1$, construcţiunea segmentului $AD = b + c = \frac{m}{n} a$ revine la determinarea celei de a patra proporţională.

In cazurile particulare

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

triunghiul ABC este un triunghiu dreptunghiu şi construcţiunea lui imediată.

Observări. 1°. Construcţiunea grafică în cazul triunghiului oarecare (deşi unii corespondenţi au introdus chiar bisectoarea unghiului A) a fost dată numai de D-l AL. D. STOICA.

2°. D-l ILIE ION ŢIŢEICA observă că triunghiurile soluţiuni ale problemei aparţin clasei de triunghiuri pentru care o latură este medie geometrică între suma celorlalte două şi una din ele.

$$a^2 = b\,(b + c) \quad (\mathcal{R})$$

(Inmulţind relaţiunile (1') şi (5) se obţine relaţia ($\mathcal{R}$).

3°. D-l I. I. ŢIŢEICA nu se preocupă dacă reciproc relaţia ($\mathcal{R}$) caracterizează numai triunghiurile în care un unghiu este jumătatea altuia.

Răspunsul este afirmativ şi se poate obţine în modul următor: Din relaţiunile (2) obţinem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ şi } \frac{a}{\sin A} = \frac{b + c}{\sin B + \sin (A + B)},$$

deci având relaţiunea ($\mathcal{R}$) între laturi, avem:

$$\sin^2 A = \sin B\,[\sin B + \sin (A + B)] \tag{8}$$

sau încă:

$$4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \sin B \sin \left(\frac{A}{2} + B\right) \tag{9}$$

care, observând că $0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$, deci că $\cos\frac{A}{2}\neq 0$, dă relaţiunea:

$$4\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sin B\left[\sin\frac{A}{2}\cos B+\sin B\cos\frac{A}{2}\right]$$

sau încă

$$\cos\frac{A}{2}-4\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}=\cos 2B\cos\frac{A}{2}-\sin 2B\sin\frac{A}{2}$$

dar:

$$\cos\frac{A}{2}-4\cos\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}=\cos\frac{3A}{2},\ \text{deci:}$$

$$\cos\left(2B+\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{3A}{2}. \qquad (10)$$

Unghiurile celor două cosinusuri fiind pozitive, iar A şi B unghiuri într'un triunghiu, singura relaţiune posibilă între A şi B este:

$$2B+\frac{A}{2}=\frac{3A}{2},$$

care dă $B=\frac{A}{2}$.

Am mai primit soluţiuni satisfăcătoare dela D-nii: ILIE C. BOROŞ, D. I. LEBĂDĂ, IOAN BUZINCU, D. ŞT. MIHALCEA, GHEORGHE ROTARU, MARCEL F. AMĂRĂŞTEANU, ARISTIDE G. CEHAK, KNALL SANDY, A. MIHAILESCU şi două soluţiuni bune dela anonimi.

O. N. Ţ.

PROBLEMA 4472. *Să se demonstreze că o condiţie necesară ca o ecuaţie de gradul n*

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n=0$$

să aibă toate rădăcinile reale, este

$$(n-1)A_1^2-2nA_0A_2\geqslant 0.$$

M. GHERMĂNESCU.

Prima soluție, dată de D-nii: A. ARȘAVSCHI, MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila) și CSEKE WILHELM (student Cluj).

Se știe că dacă $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale, toate ecuațiile derivate, $f^{(k)}(x) = 0$, vor avea rădăcinile reale. Deci, reciproc, pentru ca $f(x) = 0$ să aibă toate rădăcinile reale, este necesar, fără a fi suficient, ca ecuațiile derivate să aibă toate rădăcinile reale. In particular, această condiție trebue îndeplinită și de ecuația

$$f^{(n-2)}(x) = n(n-1)\ldots 3A_0x^2 + (n-1)(n-2)\ldots 2A_1x + (n-2)(n-3)\ldots A_2 = 0$$

din care deducem condiția din enunț.

A doua soluție, dată de D-nii SERGIU TARASIUC (Bălți) și STOICA D. ALEXANDRU (Lic. Marele Voevod Mihai, Buc.).

Dacă ecuația $f(x) = 0$ are toate rădăcinile reale, patratele diferențelor rădăcinilor, luate două câte două, vor fi pozitive, deci și suma lor, adică

$$\Sigma (x_i - x_j)^2 \geqslant 0,$$

sau

$$(n-1)\Sigma x_i^2 - 2\Sigma x_i x^j \geqslant 0,$$

sau încă

$$(\alpha) \qquad (n-1)(\Sigma x_i)^2 - 2n\Sigma x_i x_j \geqslant 0.$$

Insă

$$\Sigma x_i = -\frac{A_1}{A_0}, \quad \Sigma x_i x_j = \frac{A_2}{A_0},$$

cu cari (α) devine tocmai neegalitatea din enunț.

Notă. Ulterior propunerii, am descoperit că problema aceasta a fost enunțată mai de mult de J. NEUBERG sub forma inversă.

Dacă $(n-1)A_1^2 - 2nA_0A_2 < 0$, *ecuația are neapărat rădăcini imaginare.*

Nu am anulat imediat această problemă din cauza elegantei și originalei soluțiuni pe care o primisem până la acea dată dela D-l A. STOICA, pe care l'a urmat curând d. S. TARASIUC, soluție care ar fi fost păcat să nu fie difuzată prin *Gazetă.*

M. G.

PROBLEMA 4541. *În pătratul* ABCD *se înscrie triunghiul* AEF (E *pe* BC *şi* F *pe* CD). A_1, E_1, F_1 *fiind mijloacele laturilor triunghiului* AEF, *să se arate că dreptele* BF_1, CA_1 *şi* DE_1 *sunt concurente.*

THEODOR GH. COCEA.

Soluţia I-a dată de D-l AL. D. STOICA (Liceul Marele Voevod Mihai).

Fie M_1 şi M_2 respectiv intersecţiile $(BF_1; CA_1)$ şi $(DE_1; CA_1)$. Se observă că:

$$\sphericalangle BM_1C = 180^0 - (\widehat{F_1BE} + \widehat{A_1CE}); \quad \sphericalangle DM_2C = 180^0 - (\widehat{E_1DF} + \widehat{A_1CF})$$

$$\sphericalangle A_1EF_1 = 180^0 - (\widehat{F_1EB} + \widehat{A_1EC}); \quad \sphericalangle E_1FA_1 = 180^0 - (\widehat{E_1FD} + \widehat{A_1FC}).$$

Din triunghiurile isoscele F_1BE, A_1EC, A_1CF, E_1FD rezultă:

$$\widehat{F_1BE} = \widehat{F_1EB}\ ; \quad \widehat{A_1CE} = \widehat{A_1EC}\ ; \quad \widehat{E_1DF} = \widehat{E_1FD}\ ; \quad \widehat{A_1CF} = \widehat{A_1FC}.$$

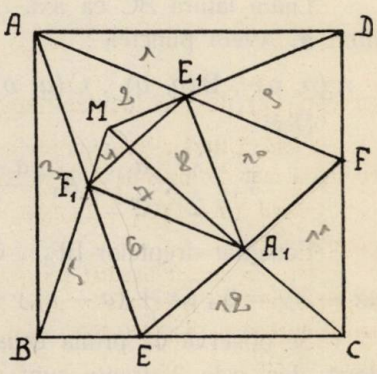
Deci:

$$\sphericalangle BM_1C = \sphericalangle A_1EF_1 \quad \text{şi} \quad \sphericalangle DM_2C = \sphericalangle E_1FA.$$

Din asemănarea triunghiului AEF cu triunghiul său complementar $A_1E_1F_1$ deducem:

$$\sphericalangle BM_1C = \sphericalangle F_1E_1A_1 \quad \text{şi} \quad \sphericalangle DM_2C = \sphericalangle E_1F_1A_1,$$

adică patrulaterele $A_1E_1M_1F_1$ şi $A_1E_1A_2F_1$ sunt inscriptibile.



Punctele M_1 şi M_2 vor trebui să se găsească în acelaş timp pe cercul circumscris triunghiului $A_1E_1F_1$ şi pe dreapta CA_1, *adică se confundă într'un punct* M.

Rezultă că dreptele BF_1, CA_1 şi DE_1 sunt concurente, într'un punct al cercului lui EULER al triunghiului AEF.

Soluţia II-a dată de D-l WILHELM CSEKE (student Cluj).

Prin E şi F să ducem paralele la laturile pătratului. Acestea vor tăia laturile opuse respectiv în G şi I, iar punctul lor de intersecţie îl notăm cu H.

$\sphericalangle BM_1C = 180^\circ - (\widehat{F_1BE} + \widehat{A_1CE})$ ✗

Dreptele BF_1, CA_1 şi DE_1 sunt diagonalele dreptunghiurilor ABEG, CFHE şi ADFI. Fie P punctul unde se tae dreptele

$$BF_1 \text{ şi } DE_1 \text{ şi } R \equiv (BF_1, IF) \ , \ S \equiv (DE_1, GE).$$

Din triunghiurile :

$$GHR \sim GEB \quad \text{şi} \quad IHS \sim IFD$$

scoatem :

$$RH = \frac{GH \times BE}{GE} = \frac{DF \times BE}{DC} \ ; \ SH = \frac{IH \times DF}{IF} = \frac{BE \times DF}{BC}$$

deci $RH = SH$ şi prin urmare :

$$\frac{RH}{BC} = \frac{SH}{DC} \ .$$

Patrulaterele PSHR şi PDCB având unghiurile egale şi câte două laturi proporţionale sunt omotetice. Dreptele BF_1, CA_1, DE_1 se vor întâlni în centrul de omotetie P.

D-nii : I. ILIE-ŢIŢEICA şi M. C. POSTELNICESCU au dat soluţii geometrice, arătând că problema e un caz particular al problemei 3694 rezolvată în „G. M.", Vol. XXXVIII.

Soluţie analitică dată de D-nii : D. MAVRODIN, MIRCEA A. NEGREA (Brăila), C. I. CHIRIAC (Şc. Navală), ILIE BOROŞ (liceul militar Iaşi), VICTOR FLORESCU, N. D. ŞTEFĂNESCU, MARIN DAN, PAUL DOBRESCU, DUMITRU IONESCU, M. MĂNAC (liceul militar «N. Filipescu»), V. CEAUŞESCU (liceul militar Tg.-Mureş), M. F. AMĂRĂŞTEANU (liceul «Fraţii Buzeşti» Craiova) şi VALENTIN NEAGU.

Luăm latura BC ca axă ox şi BA ca axă oy, latura pătratului fiind **a.** Avem punctele :

$$A(o, a) \ , \ B(o, o) \ , \ C(a, o) \ , \ D(a, a) \ ; \ E(\lambda, o) \ , \ F(a, \mu).$$

Deci :

$$F_1\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{a}{2}\right) \ , \ A_1\left(\frac{a+\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \ , \ E_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a+\mu}{2}\right).$$

Ecuaţiile dreptelor BF_1, CA_1 şi DE_1 sunt respectiv :

$$ax - \lambda y = 0 \ ; \ \mu x + (a - \lambda) y - \mu a = 0 \ ; \ (a - \mu) x - ay + \mu a = 0.$$

Se observă că prima ecuaţie se obţine adunând pe celelalte două, deci cele 3 drepte sunt concurente.

G. D. S.

PROBLEMA 4582. *Dacă în triunghiul* ABC *sunt date trei drepte* AA', BB', CC' *concurente în punctul* O, *avem relaţia:*

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CO}}{\overline{OA'}\cdot\overline{OB'}\cdot\overline{OC'}}-\frac{\overline{CO}}{\overline{OC'}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}\cdot$$

I. I. ŢIŢEICA.

Soluţie dată de D-I MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila). Fiind vorba de lungimile segmentelor se intră în relaţia dată nu şi de sensul lor, nu vom ţine seama de semne. Notăm:

$$\alpha=\frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}\ ;\ \beta=\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\ ;\ \gamma=\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}$$

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1. \qquad \text{(CEVA)}$$

Teorema lui VAN AUBEL ne dă:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA'}}=\beta+\frac{1}{\gamma}\ ;\ \frac{\overline{BO}}{\overline{OB'}}=\gamma+\frac{1}{\alpha}\ ;\ \frac{\overline{CO}}{\overline{OC'}}=\alpha+\frac{1}{\beta}\cdot \qquad (1)$$

Inmulţind aceste relaţii obţinem primul termen al membrului întâi din egalitatea din enunţ. Avem succesiv:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA'}}\cdot\frac{\overline{BO}}{\overline{OB'}}\cdot\frac{\overline{CO}}{\overline{OC'}}=\alpha\beta\gamma+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}+(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$=2+(\alpha+\beta+\gamma)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$=\left(\beta+\frac{1}{\gamma}+1\right)+\left(\gamma+\frac{1}{\alpha}+1\right)+\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\cdot$$

Inlocuind acum valorile din (1) obţinem:

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA'}}\cdot\frac{\overline{BO}}{\overline{OB'}}\cdot\frac{\overline{CO}}{\overline{OC'}}=\left(\frac{\overline{AO}}{\overline{OA'}}+1\right)+\left(\frac{\overline{BO}}{\overline{OB'}}+1\right)+\frac{\overline{CO}}{\overline{OC'}}$$

$$=\frac{\overline{AO}+\overline{OA'}}{\overline{OA'}}+\frac{\overline{BO}+\overline{OB'}}{\overline{OB'}}+\frac{\overline{CO}}{\overline{OC'}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{OB'}}+\frac{\overline{CO}}{\overline{OC'}}$$

adică relaţia dată este verificată.

Au mai rezolvat problema D-nii: AUREL I. CORNĂŢEANU (Lic. miiltar Iaşi), AL. DOBREA (idem), M. C. POSTELNICESCU (Liceu militar «Mânăstirea Dealu») şi AL. D. STOICA Liceul Marele Voevod Mihai, Bucureşti).

Notă: Dacă însemnăm:

Cevienele: AA', BB', CC' respectiv cu: a, b, c

Segmentele: AO, BO, CO „ „ m, n, p

„ OA', OB', OC' „ „ m', n', p'

şi dacă scriem:

$$AO = AA' - OA' \; ; \; BO = BB' - OB' \; ; \; CA = CC' - OC'$$

atunci relaţia dată în enunţ se transformă cu uşurinţă în una din relaţiunile de mai jos:

$$a.b.c = a.b\,(p') + b.c\,(m') + ac\,(n')$$

$$2a.b.c = a.b\,(p) + b.c\,(m) + ac\,(n)$$

a căror exactitate se verifică prin simplă adunare.

LT. CD. GH. N.

PROBLEMA 4651. *Anul naşterii savantului francez* AMPÈRE *se scrie cu cifre neperechi, iar la anul morţii numărul format de ultimele două cifre este dublul numărului format de primele două. Numărul anilor pe care i-a trăit se obţine scriind prima cifră a anului morţii după ultima cifră. In ce an a fost centenarul morţii lui?*

ION IONESCU.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA (Brăila), NICOLAE D. ŞTEFĂNESCU (Liceul militar «N. Filipescu», (Târgovişte), M. F. AMĂRĂŞTEANU (Craiova), VASILE A. PĂDUREŢ, I. MARCOVICI (Liceul naţional, Iaşi), D. D. MATEI, V. L. FLORESCU, H. M. BODNĂRESCU. G. I. POPOVICI.

AMPÈRE nu a putut trăi înainte de Christos, căci pe atunci nu existau francezi. După enunţ anul morţii are patru cifre, prima neputând fi de cât 1. Deci anul morţii nu ar putea fi decât:

1020, 1122, 1224, 1326, 1418, 1530, 1632, 1734, 1836.

După enunţ el ar fi trăit respectiv:

01, 21, 41, 61, 81, 01, 21, 41, 61

ani. Prima şi a şasea soluţie nu pot fi admisibile, căci cineva nu poate fi savant la etatea de un an! Scăzând celelalte etăţi din anii morţii respectivi, ne rămâne pentru anul naşterii:

.... 1101, 1138, 1265, 1347, ..., 1611, 1693, 1775.

Dintre acestea ultimul număr este scris numai cu cifre neperechi. Deci acesta este anul naşterii.

Conchidem dar că AMPÈRE s'a născut la 1775, a trăit 61 ani şi a murit în 1836. Centenarul morţii s'a sărbătorit deci în 1936, adică în anul acesta.

EXERCIŢII

32. R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC, ρ raza cercului înscris în triunghiul ortic şi R_1 raza cercului circumscris triunghiului tangenţial,

$$R^2 = 2R_1 \cdot \rho.$$

N. N. MIHĂILEANU.

$$R \cdot \rho = 2R \cos A \cos B \cos C \ , \ R_1 = \frac{R}{4 \cos A \cos B \cos C}.$$

33. Să se arate că dacă amplificăm de $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ori razele a trei cercuri, al căror centru radical este în centrul de greutate al triunghiului cu vârfurile în centrele cercurilor, centrul radical devine centrul cercului celor nouă puncte.

C. IONESCU-ŢIU.

R. Fie A, B, C centrele celor trei cercuri de raze respectiv r_1, r_2, r_3; G centrul de greutate, O_9 centrul cercului celor nouă puncte şi R_1, R_2, R_3 razele cercurilor amplificate.

Avem:

$$\overline{AG}^2 - r_1^2 = \overline{BG}^2 - r_2^2 = \overline{CG}^2 - r_3^2 \text{ şi } \overline{AO_9}^2 - R_1^2 = \overline{BO_9}^2 - R_2^2 = \overline{CO_9}^2 - R_3^2$$

sau:

$$\overline{AG}^2 - \overline{BG}^2 = r_1^2 - r_2^2 \ , \ \overline{BG}^2 - \overline{CG}^2 = r_2^2 - r_3^2 \text{ şi } \overline{AO_9}^2 - \overline{BO_9}^2 = R_1^2 - R_2^2, \text{ etc.}$$

folosim formulele:

$$\overline{AG}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}, \text{ etc. şi } \overline{AO_9}^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$$

avem:

$$\overline{AG}^2 - \overline{BG}^2 = \frac{b^2 - a^2}{3}, \ldots \text{ şi } \overline{AO_9}^2 - \overline{BO_9}^2 = \frac{b^2 - a^2}{2}, \ldots$$

rezultă:

$$\frac{3}{2}(r_1^2 - r_2^2) = R_1^2 - R_2^2 \text{ şi } \frac{3}{2}(r_2^2 - r_3^2) = R_2^2 - R_3^2$$

şi deci relaţiile:

$$R_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot r_1, \ R_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot r_2, \ R_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot r_3.$$

34. Ecuaţia

$$15x^4 + y^4 + 34x^2 + 15 = 8x\,y^2 + 8y^2$$

nu este posibilă în numere întregi.

HAR. IONESCU-BISS.

R: Ecuaţia se poate scrie:

$$(3x^2 - y^2 + 5) \cdot (5x^2 - y^2 + 3) = 0$$

$$\therefore \ 3x^2 + 5 = y^2 \ ; \ 5x^2 + 3 = y^2$$

însă

$$y^2 + 1 \not\equiv \mathfrak{M}3 \ ; \ y^2 + 2 \not\equiv \mathfrak{M}5.$$

35. Cercurile circumscris şi înscris unui triunghiu se taie sub unghiul imaginar α, dat de $\cos\alpha = 1 + \frac{1}{2}\frac{r}{R}$.

Cercurile circumscris şi exînscris unui triunghiu se taie sub unghiul α, pentru care $\cos\alpha = -1 + \frac{1}{2}\frac{r_a}{R}$.

Cercurile circumscris şi al celor nouă puncte, se taie sub unghiul α, dat de $\cos\alpha = 1 + \frac{\rho}{R}$, r, r_a, R, ρ fiind respectiv razele cercurilor înscris, exînscris relativ la unghiul considerat, circumscris şi înscris sau exînscris în triunghiul ortic (după cum A e ascuţit sau obtus).

N. N. MIHĂILEANU.

R. Se aplică peste tot formula $\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}$ unde r_1, r_2 sunt razele cercurilor şi d distanţa centrelor.

36. Să se rezolve sistemul:

$$x^2 - xy^2 - y^2 + 1 = 0$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2x+y} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{313} = 0$$

C. IONESCU-ŢIU.

R. Notăm $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2x+y} = u$ şi $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x+y} = v$ şi ţinând seama de prima ecuaţie obţinem: $\operatorname{tg}(u-v) = \frac{-1}{2x^2+4xy+y^2} = \frac{-1}{313}$.

Rezolvând sistemul:

$$x^2 - xy - y^2 + 1 = 0$$

$$2x^2 + 4xy + y^2 - 313 = 0.$$

obţinem soluţiile:

$$x = 8\ ,\ y = 5 \text{ şi } x = -8\ ,\ y = -5$$

care verifică sistemul.

37. Fie MN, MP tangentele duse din M la parabola de focar F, vârf A, şi D piciorul directoarei pe axă, Q mijlocul coardei NP, R intersecţia MQ cu parabola. Dreptele DM, AR, FQ sunt concurente.

N. N. MIHĂILEANU.

R. MQ e paralelă cu axa şi R e mijlocul segmentului MQ.

38. Intre coordonatele unghiulare α β, γ şi normale x, y, z ale unui punct P, din planul triunghiului ABC, avem relaţiile:

$$\frac{\sin\alpha}{x\sqrt{y^2+z^2+2yz\ \cos A}} = \frac{\sin\beta}{y\sqrt{x^2+z^2+2zx\ \cos B}} = \frac{\sin\gamma}{z\sqrt{x^2+y^2+2xy\ \cos C}}$$

$$= \frac{2R\ \sin A\ \sin B\ \sin C}{\pi\sqrt{y^2+z^2+2yz\ \cos A}}\ .$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. $PA = \sqrt{y^2+z^2+2yz\ \cos A}/\sin A, \ldots$

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{PB \cdot PC}{x}, \text{ etc.}$$

PROBLEME PROPUSE

4675. Să se găsească numere de trei cifre, mai mici ca 10, astfel că privind acele numere ca scrise în trei sisteme diferite de numerațiune una din valori să fie media aritmetică a celorlalte două.

I. IONESCU.

4676. Se cere un patrat perfect de cinci cifre astfel ca numerele formate: din primele sale două cifre și cel format din ultima sa cifră să fie patrate perfecte ale căror rădăcini multiplicate să dea numărul format din cifra a treia și a patra din patratul căutat.

GH. VASILIU.

4677. Să se rezolve în numere întregi ecuația:

$$x^8 - y^8 = p^z,$$

p fiind un număr prim.

HAR. IONESCU-BISS.

4678. Se cere numărul de patru cifre care are trei cifre în progresie geometrică și care este egal cu produsul a trei factori primi, dintre care cel mai mare adunat cu 3 dă un pătrat perfect.

G-L GH. BUICLIU.

4679. Fie ABC un triunghiu dreptunghiu în A și AA' înălțimea lui. Bisectoarea unghiului AA'C tae latura AC în C', iar bisectoarea unghiului AA'B tae latura AB în B'. Să se arate că:

1°. Cercurile (A'BB') și (A'CC') sunt tangente în A';

2°. Dreapta B'C' este o tangentă exterioară a acestor cercuri.

3°. Raportul razelor lor R_b, R_c satisfac relația:

$$R_b / R_c = c^2/b^2.$$

ALEXANDRU V. NICULESCU.

4680. Intr'un cub ABCDA'B'C'D', planul care trece prin mijloacele M, N ale muchiilor AB, AD și prin extremitatea A' a muchii AA', este tangent sferei înscrise cubului în centrul de greutate al triunghiului A'MN.

2°. Să se arate că proprietatea subzistă când se înlocuieşte cubul prin un romboedru.

3°. Să se deducă volumul solidului limitat de cub şi de cele 24 de planuri definite ca la 1°.

V. THÉBAULT.

4681. Să se rezolve sistemul:

$$x^2 - yz + xz - zu = a$$
$$y^2 - zu + yu - ux = b$$
$$z^2 - xu + xz - xy = c$$
$$u^2 - xy + yu - yz = d.$$

M. F. AMĂRĂŞTEANU.

4682. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt[n]{(1+x)^2} - \sqrt[n]{(1-x+x^2)^2} = \sqrt[n]{1+x^3}.$$

N. BOTEA.

4683. Să se studieze variaţia funcţiunii.

$$y = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^m}$$

după diversele valori ale lui m. Să se reprezinte curba pentru $m = 1\ ;\ 2\ ;\ 3$.

GH. TH. GHEORGHIU.

4684. A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, să se stabilească identitatea:

$$\frac{\Sigma \sin A \sin B (\sin A + \sin B)}{2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C - \Sigma \sin A \sin B (\sin A - \sin B)} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} \operatorname{cotg}\frac{B}{2} \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \operatorname{cotg}\frac{A-B}{2} \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2} \operatorname{cotg}\frac{C-A}{2}.$$

C. IONESCU-BUJOR.

6685. Picioarele normalelor dintr'un punct M la o curbă (F) sunt pe o curbă (A). M descriind o curbă (M), curba (A) înfăşoară o curbă (N). Punctul caracteristic corespunzător fiind N, dreapta NM este tangenta în M la curba (M).

ADRIAN GHEORGHIU.

4686. Fie $a_0 a_1 a_2 a_3$ un număr pătrat perfect de patru cifre scris în sistemul zecimal. Să se arate că rădăcinile ecuaţiei

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

sunt:

1°. Sau în semiplanul negativ (au partea reală negativă);

2°. Sau în cercul având centrul în origină şi raza egală cu 3.

Să se arate că limita 3 este atinsă de ecuaţia

$$z^3 + 8z + 9 = 0$$

şi numai de aceasta.

TIBERIU POPOVICIU.

ERATĂ. — I. Din eroare de culegere s'a omis printre elevii care au obţinut menţiune D-l POSTELNICESCU MIRCEA din clasa VII Liceul Militar Mănăstirea Dealu, căruia i s'a decernat:

Un Volum Jubilar *Gazeta Matematică* şi un Volum din Lecţiuni de calcul diferenţial de PROF. A ANGELESCU.

II. In Nr. 8. „G. M." XL[1], se vor face următoarele rectificări:

1°. Pag. 435, expresia lui b se va înlocui d cu k.

2°. Pag. 449 rândul 7 de sus, primul termen al lui S este a_1^2 iar nu a_1.

3°. Pag. 449 rândul 10 de sus, după al doilea semn de egalitate, se va pune $2a_1$ în loc de $2a_i$.

4°. Pag. 449 rândul 13 de sus, în expresia lui u_i sd va înlocui n *cu* i şi $(3a_1 - r_1)$ cu $(3a_1 - 2r_1)$.

III. Egalitatea din problema Nr. 4667 se va citi

$$\overline{OA}^2 \cdot BCD + \overline{OC}^2 \cdot ABD = \overline{OB}^2 \cdot ACD + \overline{OD}^2 \cdot ABC .$$

Dela apariția ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciții (E), probleme propuse (P), recreațiuni (R) și probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu M. (4634); *Apostol Radu* (4634); *Arşavschi Al.* (4557, 610, 37, 74); *Bodnărescu M. H.* (4651); *Boldescu P.* (4664, 65); *Cocea Gh. Th.* (P); *Constantinescu G. G.* (2108, 4417, 41, 48,662, 74); *Eckstein Virgil* (4576, 607); *Florescu L. V.* (4583, 634, 51, 69); *Grabovschi E. Eug.* (4557); *Ianculescu I. O.* (3000, 524, 4450); *Matei D. Dumitru* (4651, 53, 54); *Mecu I. M.* (4668); *Mihăilescu A.* (4442); *Milu I. Nic.* (4570); *Pădureț A. V.* (4520, 70, 668, 69); *Petrescu I. I.* (C. N); *Popescu Zorica N. A.* (4669); *Popoviciu I. Gavril* (4571, 72, 85, 640); *Postelnicescu C. M.* (4520, 57); *Rada Dumitru* (4570, 668, 69); *Săndulache C.* (4674, N); *Ştefănescu D. Nic.* (4629, 37, 63, 68, 69); *Stoian I. I.* (4653).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluție nu va fi însoțită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în considerațiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exercițiile, recreațiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărți sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE"

Colecţiunea *„Gazetei Matematice"* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE"

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE"
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ"
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 41683

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 11. — IULIE 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. André-Marie Ampère (1775—1836) (urmare) *Ion Ionescu.*
2. Conicele de ramificare a trei conice în fascicol (urmare) . . . . . *D. Barbilian.*
3. Generalizarea formulelor trigonometrice dintr'un triunghiu în domeniul complex. *Gh. Th. Gheorghiu.*
4. Note Matematice: 43 — 46.
5. Bibliografie.
6. Cereri: 258.
7. Diverse.
8. Probleme rezolvate: 4024, 4154, 4186, 4321, 4386, 4401, 4567.
9. Exerciții: 39 — 42.
10. Probleme propuse: 4687 — 4698.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREȘTI

MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAȚIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către Societatea „Gazeta Matematică", având sediul în Bucureşti („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela „*Gazeta Matematică*" în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 30, 55, 60, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 89, 522, 23, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 03, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 88, 89, 90, 301, 03, 15, 19, 20, 33, 37, 40, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 26, 38, 45, 49, 52, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 76, 79, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 98, 500, 03, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 30, 31, 33, 34, 47, 50, 58, 59, 61, 78, 80, 87, 88, 90, 92, 93, 96, 98, 601, 02, 03, 05, 12, 13, 15, 18, 28, 30, 36, 41, 45, 47, 50, 57, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171—3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela „*Gazeta Matematică*" cu preţul de 12 lei.

S'a pus sub tipar și va apare în curând

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

PARTEA I (Goniometrie)

DE

V. CRISTESCU

EDIȚIA II-a REVĂZUTĂ ȘI ADĂOGITĂ

DE

GH. TH. GHEORGHIU

„SPHINX“

REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE

DANS LE MONDE ENTIER

ABONNEMENTS 1 AN: BELGIQUE, 35 FR.; FRANCE, 25 FR.

ETRANGER, 10 BELGAS

ADMINISTRATION:

„SPHINX“, 75, Rue Philippe Baucq

R. C. 51922 Tel: 33.48.58

Ch. postaux { Bruxelles No. 192338 / Paris No. 160061

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENT ANUAL: 200 LEI

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

FUNDAT ÎN ANUL 1930. — ABONAMENT ANUAL: 100 LEI

Director: Dr. I. BAIDAFF

SUNT CELE MAI IMPORTANTE REVISTE PERIODICE MATEMATICE DIN AMERICA DE SUD, PUBLICATE ÎN BUENOS-AIRES

SE PRIMESC ABONAMENTE LA

„GAZETA MATEMATICĂ“, Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE (1775—1836)

(Urmare dela pagina 515)

Să ne ocupăm acum de opera lui AMPÈRE.

Deşi titlul de glorie cel mai mare al lui este creiarea electrodinamicei, totuşi AMPÈRE a fost mai înainte de toate, — am putea zice născut, iar nu făcut, — un matematician. Graţie cunoaşterii lor perfecte, el a putut să le aplice cu pricepere, repede şi cu desăvârşit succes la studierea fenomenelor naturii şi la formularea legilor lor.

AMPÈRE avea aptitudini înăscute pentru ştiinţa calculului şi a figurilor. Incă de când era copil, pe când nu ştia să citească şi să scrie, el făcea calcule cu pietricele sau cu boabe de fasole, şi deslega probleme relativ grele pentru etatea lui. In timpul unei boale, el trebuind să stea liniştit, — după prescripţiunile medicului, — părinţii îi iau pietricelele cu care calcula şi le aruncă. El începe să plângă, şi pentru a-l împăca i se dă câteva pişcoturi. Credeţi că le-a mâncat? Nu, nici de cum! El a rupt în bucăţele acele pişcoturi şi cu acestea a început să calculeze mai departe.

La etatea de 12 ani cunoştea toată geometria elementară şi trimitea Academiei de Ştiinţe o *demonstraţie a cuadraturii cercului,* ceeace a făcut să fie şi el trecut pe *lista cuadratorilor cercului!* Mai târziu a trimis o demonstraţie a echivalenţei volumelor a două poliedre simetrice, care pare a fi fost prima demonstraţie riguroasă dată acestei teoreme. S'a mai ocupat cu rectificarea aproximativă a arcelor de cerc mai mici ca un semicerc.

Lui AMPÈRE i se datoreşte o nouă demonstraţiune a teoremei lui TAYLOR, o demonstraţiune mai simplă, şi mai uşoară de priceput, pentru principiul iuţelelor virtuale; o stabilire riguroasă a ecuaţiei lănţişorului cu ajutorul calculului variaţiunilor; un memoriu asupra parabolelor osculatrice; studii asupra ecuaţiilor diferenţiale de primul şi al doilea ordin, asupra integrării ecuaţiilor cu derivate parţiale, şi asupra calculului diferenţelor.

Cursul de calcul diferenţial şi integral, pe care l-a predat la Şcoala Politecnică, l-a tipărit, însă în aşa fel cum nu se mai tipărise până atunci nici o carte, dela invenţiunea tipografiei de către GUTENBERG! Cartea lui nu are nici titlu, nici nume de autor, nici

tablă de materii! Editorul a cerut în mai multe rânduri să-i dea manuscrise pentru paginile respective, ca să nu se facă de râs în lume cu tipărituri în afară de obiceiul curent, însă a trebuit să renunţe în cele din urmă când a văzut că AMPÈRE îi ceruse manuscrisul înapoi dacă nu-l publică cum vrea el. De altfel, el era un om original în multe privinţe. Astfel el denumea lucrările, teoremele etc., cu numele oraşului unde le găsise sau unde fuseseră descoperite. Astfel vorbea de *teoria dela Avignon, proprietatea dela Marsilia, demonstraţia dela Grenoble, teorema dela Montpelier,* etc.

Incă de pe când era profesor la Bourg, a studiat calculul probabilităţilor şi a scris o broşură asupra jocurilor de noroc: *„Considérations sur la théorie mathématique du jeu"*.

Problemelor de această natură li se datoreşte descoperirea *Calculului Probabilităţilor.* Inceputul l'a făcut PASCAL care a căutat să rezolve în mod raţional o problemă pe care i-o pusese MÉRÉ, şi anume:

„Doi jucători depun mize egale pe care le va lua acela care va face mai repede trei puncte. După ce unul din ei face 1 punct şi celălalt 2 puncte, ei sunt forţaţi să părăsească jocul. Cât trebue să ia fiecare?".

La o primă vedere se pare că împărţirea mizelor trebue făcută în raportul 1 : 2. PASCAL pe o cale şi FERMAT pe alta au arătat că împărţirea trebue făcută în raportul 1 : 4, care este raportul între probabilităţile ce au fiecare din ei de a câştiga jocul dacă ar fi continuat până la sfârşit. De aci s'a tras concluziunea că la jocurile echitabile mizele depuse trebue să fie proporţionale cu probabilităţile pe care le are fiecare jucător de a câştiga jocul; altfel unul din ei jefuieşte pe celălalt. In fine s'a mai dedus că cine joacă continuu se ruinează cu siguranţă, chiar dacă jocul este echitabil. AMPÈRE reia aceste chestiuni şi le studiază metodic şi cu mare claritate. Această broşură a lui a avut un mare răsunet în lumea ştiinţifică din Franţa şi din alte ţări; ea a pus primele jaloane pentru trasarea reputaţiunii lui de om de ştiinţă, şi i-a adus mutarea la Lyon şi apoi la Paris.

Din studiile lui filosofice pentru clasificarea generală a ştiinţelor, a tras concluziunea că în mecanică trebue studiate a parte mişcările la care nu intervin forţele care le produc şi a creat astfel *cinematica*, în afară de *statică* şi de *dinamică*.

Pentru AMPÈRE matematicile sunt fundamentul ştiinţelor:

„Trebue să începem prin ştiinţele matematice seria cunoştinţelor omeneşti, pentrucă ele cer ca punct de plecare şi au ca obiect un număr mic de idei. Mai mult încă, se pot studia adevărurile din care ele se compun fără a recurge la alte ramuri ale cunoştinţelor noastre, iar acestea le împrumută, din contră, ajutoare numeroase, ca de exemplu teoremele şi calculele pe care se sprijină ştiinţele fizice şi industriale, măsura câmpurilor şi calendarul, atât de necesare agriculturii; măsura precisă a diferitelor probabilităţi ale acelora din cunoştinţele noastre care nu sunt susceptibile de o siguranţă complectă, şi exemplele cele mai izbitoare ale diversităţii metodelor pe care filosofia trebue să le examineze; determinarea locurilor şi a timpurilor, bazele geografiei şi ale istoriei; şi printre ştiinţele politice, la care aplicaţiunile sunt atât de numeroase, ce ajutor indispensabil nu dau ele la toate părţile artei militare!“.

Cu altă ocaziune el a spus:

„Le monde des abstractions est le seul qui vaille la peine qu'on l'habite“.

In fizică, au rămas dela AMPÈRE studii interesante în refracţiunea luminii, în teoria undelor luminoase şi asupra legii lui MARIOTTE. El avea un dar înăscut de a putea imagina repede dispozitive şi instrumente cu care să verifice experimental concluziuni deduse prin calcul sau prin puternica lui intuiţiune ştiinţifică. In strada Fossé-Saint-Victor avea un mic laborator în care îşi făcea experienţele pe aparate imaginate şi chiar construite de dânsul, căci nu şi le putea comanda la case speciale, din cauza lipsei de fonduri necesare. Prin el s'a făcut dovada că marile genii ale omenirii nu au nevoie de laboratorii mari şi luxoase, cu camere numeroase pentru locuinţele personalului, pentru ca să se facă descoperiri mari care să schimbe chiar faţa lumii.

O asemenea descoperire, datorită lui AMPÈRE este *electrodinamica*. E destul a spune că de la el a pornit ideea de *curent electric* şi că studiile lui sunt punctele de pornire ale altora care ne-a dus la telegraf, telefon şi la undele electrice; la luminatul şi tracţiunea electrică; la transmisiunile de forţă la distanţă şi la toate aplicaţiunile ştiinţifice, tehnice şi domestice ale electricităţii, de care se servă astăzi lumea întreagă.

Galvani descoperise electricitatea dinamică, Volta creiase pilele electrice, iar Oersted arătase în 1820 că un ac magnetic pus lângă un fir electrisat de o pilă se aşează perpendicular pe direcţiunea firului. Experienţa a fost repetată la Geneva unde se găsea Arago, care o reproduce la Academia de ştiinţe din Paris în şedinţa dela 11 Septemvrie 1820. Ampère, care era de faţă, a rămas foarte impresionat de aceste acţiuni electromagnetice şi s'a apucat imediat să le studieze de aproape. Chiar în şedinţa următoare dela 18 Septemvrie el vine la Academie cu explicarea generală a fenomenului şi de atunci, timp de aproape şase ani, mai la fiecare şedinţă, vine cu rezultate noui pe care le prezenta Academiei.

Ampère este acela care pentru prima oară atribuie un sens curentului electric, a arătat că şi magneţii au acţiune asupra curenţilor, a arătat acţiunea curenţilor asupra curenţilor, a descoperit *solenoizii* cari se comportă, electrizaţi, ca şi un magnet, de unde a scos teoria electrică a magneţilor ca având curenţi electrici în jurul moleculelor; el descoperă electromagnetul împreună cu Arago, consideră magnetismul terestru ca provocat de curenţi electrici ecuatoriali; descoperă *acele astatice* şi *galvanometrele* pentru măsurarea curenţilor electrici; dă ideea, pentru prima dată, a unui telegraf electric, prin atâtea fire şi ace magnetice câte litere şi semne trebuesc etc., etc.

Ampère e primul care a observat existenţa curenţilor de inducţie, dar nu le-a dat importanţa pe care o au, astfel că mai târziu Faraday a putut lua toată gloria descoperirii lor.

Maxwel a numit pe Ampère, Newton-ul electricităţii.

Ampère s'a mai ocupat cu teoria cinetică a gazelor, cu chestiunea baghetei divinatoare, etc.

El nu căuta să piarză timpul cu cercetarea şi explicarea naturii intime a fenomenelor; ci se ocupa cu formularea legilor fenomenelor, pe cât se poate sub o formă matematică, şi cu tragerea concluziunilor pentru folosirea acelor legi.

Ampère a citit în copilărie chimia lui Lavoisier, pentru care căpătase un cult în urma decapitării lui de către revoluţionarii francezi. Lagrange a şi spus despre Lavoisier:

„Il ne leur a fallu qu'un moment pour faire tomber cette tête, et cent années peut-être ne suffiront pas pour en reproduire une semblable“.

In anul 1810 AMPÈRE afirmă pentru prima dată că clorul este un corp simplu de natura florului. El pare a fi primul care a spus că o *moleculă este compusă din atomi*, care trec dela o moleculă la alta la reacțiunile chimice; ei sunt indestructibili. Când moleculele unui corp se distrug, corpul se schimbă, iar atomii se recombină în alte corpuri. El este astfel unul din creatorii *teoriei atomice*, sau *atomisticei*. Interpretând rezultatele lui GAY LUSSAC că toate gazele au acelaşi coeficient de dilatațiune 1/273 şi că combinările lor se fac în rapoarte simple de volume, ajunge la concluzia că, sub aceeaşi presiune şi aceeaşi temperatură gazele au acelaşi număr de molecule. El a dat peste acest rezultat mai de mult dar nu l-a dat publicității de cât în 1814. Italianul AVOGADRO a publicat acest rezultat în 1811, astfel că legea este cunoscută sub acest nume. Nu se poate şti cine a ajuns mai repede la această lege căci nu se ştie după cât timp a publicat-o AVOGADRO de când a descoperit-o. In tot cazul este cert că AMPÈRE a dat peste ea şi e posibil că dacă pe atunci ar fi fost reviste ştiințifice care să publice repede rezultatele găsite de cercetători, legea poate ar fi purtat astăzi numele lui AMPÈRE.

El cunoştea toată chimia timpului în detaliu, după cum afirmă WOEHLER, care l'a vizitat în 1833.

După cum am spus, botanica l'a preocupat mult după moartea tatălui său. Ştiințele naturale l'au preocupat tot timpul; a luat chiar parte, cu toată competența, la discuțiunile dintre CUVIER şi GEOFFROY DE SAINT-HILLAIRE asupra desvoltării ființelor vii; a publicat *„Considerațiuni filosofice asupra sistemului solid şi sistemului nervos la animalele articulate"*. El considera insectele ca închise într'un fel de coloană vertebrală. AMPÈRE era adept al magnetismului animal. In fine el era partizan al transformismului.

In domeniul filosofic, din când în când, şi mai ales către sfârşitul vieții lui, AMPÈRE urmărea toate chestiunile cu care se ocupau filosofii contemporani. Uneori chiar regreta că nu poate da tot timpul necesar studiilor filosofice. In special, psihologia îl interesa foarte mult. Intrebat de ce dă atenție acestei ştiințe, el răspunde:

„Comment quitter un pays plein de fleurs et d'eaux vives; comment quiter des ruisseaux, des bocages, pour les déserts brulés par les rayons de ce soleil mathématique qui répandant sur les objets la plus vive lumière, les flétrit, les dessèche jusqu'à la racine".

Ampère a lăsat neterminate o introducere la filosofie, teoria relațiunilor și a existenței, a cunoștințelor obiective și a moralei absolute, a nașterii eului. Lucrarea de căpetenie în domeniul filosofic a fost o încercare de clasificare rațională a tuturor cunoștințelor umane, care a rămas și aceasta neterminată. Titlul ei este: „*Essai sur la philosophie des sciences, ou exposition analytique d'une classification naturele de toutes les connaissances humaines*". Lucrarea ocupa două volume. Prima clasificare era în *cosmologie* (studiul lumii) și *entologie* (studiul cugetării) și apoi diviziuni din două în două până la 128 științe. Bine înțeles că această clasificare, pe baza sistemului binar de numerațiune, avea ceva artificial într'însa și se depărta de o clasificare naturală cum își propusese el să o facă.

Ampère era un om foarte religios, mistic chiar, moștenire dela mama lui, care era o femeie de o religiozitate dusă până la misticism. Chestiunile religioase și teologia l'a preocupat mult în tinerețe. In 1804 a înființat la Lyon o societate religioasă cu oamenii culți de acolo, la care el era președinte. Societatea s'a dizolvat după ce el a plecat la Paris. Acolo preocupările lui cu profesoratul și cu știința, l'au îndepărtat câtva timp de preocupările lui religioase, până la 1817, de când a rămas până la moarte un apărător convins al religiei creștine catolice. El a arătat că știința nu exclude religia, a susținut adevărul divin; credea în nemurirea sufletului și în viața de după moarte; a arătat că religia nu se poate baza pe demonstrații, și că cine caută să demonstreze credința, o pierde. El spunea că iubește mai mult a crede de cât să se ducă să vază. Pentru el în lume totul era zadarnic în afară de a iubi și a servi pe Dumnezeu. *Isus Cristos* era pentru el Soarele Justiției.

„*Nu te încrede în spiritul tău; el te-a înșelat adesea ori! Cum poți să te mai bizui pe el?*" spunea Ampère. El zicea: „*A mă perfecționa pe mine însumi și pe oameni: iată ideea pe care o am totdeauna înaintea ochilor și fixată în spiritul meu*".

In „*Méditation*", scrisă în 1805, găsim următoarea cugetare a lui:

„*La figure de ce monde passe. Si tu te nouris de ces vérités, tu passera comme elle. Mais la vérité de Dieu demeure éternellement; si tu t'en nouris, tu sera permanent comme elle. Mon Dieu! que sont tous ces sciences, tous ces raisonnements, toutes ces découvertes du génie, toutes ces vastes conceptions que le monde admire et dont la curiosité se repaît si avidement? En vérité, rien que de pures vanités*".

(Va urma). I. Ionescu.

CONICELE DE RAMIFICARE A TREI CONICE ÎN FASCICOL

(Urmare dela pag. 524)

11°. Teoremă.

Punctele F *care conduc la proprietatea din teorema precedentă se găsesc pe conica de ramificare* Z_0, *asociată celei de a patra conice jacobiene* J_0.

Folosim reprezentarea ternară din aliniatul de mai sus. Conform noțiunilor din alineatul 3°, seria lineară de triunghiuri conjugate lui δ și înscrise în $\mathfrak{T}$ (vezi sfârșitul alineatului 10°) e imaginea unei involuții cubice, care cuprinde forma $(\iota s)^3$ și admite ca jacobian forma

$$(\sigma s)^4 \equiv (\sigma s^0)\,(\sigma s)^3,$$

unde σ^0 e parametrul celeilalte intersecții S^0, diferită de S^i $(i = 1, 2, 3)$, a lui $\mathfrak{T}$ cu δ.

Conform rezultatelor din alineatul 3°, tangenta în S^0 la δ, taie conica $\mathfrak{T}$ a reprezentării în punctul de ramificare T^0 asociat punctului jacobian S^0. Deci δ e complet determinată: prin conjugarea față de triunghiul $J_1J_2J_3$ de referință, prin punctul S^0 și tangenta T^0. Dacă τ^0 e parametrul lui T^0, verificăm ușor că ecuația lui δ este

$$(31) \qquad \Sigma\,(\iota^j\iota^k)\,(\sigma^0\iota^i)^{\overline{2}}\,(\tau^0\iota^i)\,[x^i]^{\overline{2}} = 0.$$

Prin urmare intersecând această conică δ cu $\mathfrak{T}$, adică introducând în (31) expresiile (22), trebue să avem:

$$(32) \qquad h\,(\sigma s)^4 \equiv \Sigma\,(\iota^j\iota^k)\,(\tau^0\iota^i)\,(\sigma^0\iota^i)^{\overline{2}}\;(\iota^j s)^{\overline{2}}\,(\iota^k s)^{\overline{2}}$$

unde h e o constantă. Făcând în (32) pe rând $s = \iota^1, \iota^2, \iota^3$ găsim

$$(33) \qquad (\sigma\iota^i)^3 = l\,\frac{(\sigma^0\iota^i)\,(\tau^0\iota^i)}{(\iota^j\iota^k)}$$

unde l e o altă constantă.

Avem acum toate elementele pentru a determina coeficienții H^i din ecuația (28) a conicei $\mathcal{K}$. Această conică trebuind să treacă prin punctele K^i de coordonate (25), avem trei relații de condiție care pot fi concentrate în

$$\Sigma H^i (\iota^j \iota^k) (\sigma \iota^l)^3 (\iota^j s)^{\overline{2}} (\iota^k s)^{\overline{2}} = 0$$

$$s = \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3.$$

Comparând cu membrul al doilea din (32) care se anulează și el pentru $s = \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ găsim pentru H^i valori proporționale cu anumite expresiuni bine determinate, care se simplifică încă în virtutea lui (33). In definitiv obținem, ca ecuație a lui $\mathcal{K}$:

$$\Sigma (\iota^j \iota^k) (\iota^i \sigma^0) x^i x^k = 0. \tag{28'}$$

Introducând în această ecuație expresiile parametrice (22), cu alte cuvinte intersectând pe $\mathfrak{C}$ cu $\mathcal{K}$, obținem pentru determinarea parametrului s, al conicei O, loc al lui F:

$$\Sigma (\iota^j \iota^k)^{\overline{2}} (\iota^i \sigma^0) (\iota^i s) = 0. \tag{34}$$

Avem așa dar între s și σ^0 o involuție ale cărei valori duble sunt date de rădăcinile unui covariant (rațional) pătratic al formei $(\iota s)^3$. Se știe că hessiana e singurul covariant de acest fel al unei forme cubice binare.

Deci O *e reflectatul lui* S^0 *în hessiana ternei* J_i $(i = 1,2,3)$.

Acum intervine următorul raționament care sfârșește demonstrația noastră.

Considerăm toate conicele $\mathcal{S}$ care trec prin punctul fix S^0 și sunt conjugate triunghiului $J_1J_2J_3$. Se vede ușor că grupa celorlalte trei intersecții cu $\mathfrak{C}$ descrie o involuție cubică ce conține terna $S^1S^2S^3$ și admite pe J_1, J_2, J_3 ca puncte jacobiane. Intr'adevăr conicele $\mathcal{S}$ variabile în aceste condiții formează un fascicol punctual al cărui triunghiu conjugat e $J_1J_2J_3$.

Există însă o singură involuție cubică întrunind aceste caractere, deoarece, în afară de cazuri foarte particulare, există o singură conică $\mathfrak{F}$ conjugată și circumscrisă triunghiurilor S^i și J_i $(i = 1, 2, 3)$. Cazul de excepție e acela în care triunghiul S^i ar corespunde picioarelor a trei ceviene din triunghiul J_i $(i = 1,2,3)$: primul triunghiu ar fi înscris în al doilea. Cum vârfurile amândouor

acestor triunghiuri se găsesc pe conica propriu zisă $\mathfrak{K}$, această împrejurare nu poate avea loc. Aşa dar, în toate cazurile, conica $\mathfrak{J}$, şi deci involuţia cubică asociată, e unic determinată prin caracterele mai sus enumerate. Aceste caractere sunt întrunite însă şi de involuţia cubică (3). De aici, identitatea acesteia cu involuţia generată de conicele mobile $\mathfrak{S}$.

In virtutea construcţiei mijlocite de conicele $\mathfrak{S}$, rezultă pentru involuţia (3) următoarele proprietăţi:

a) Există printre conicele $\mathfrak{S}$ o singură conică Σ tangentă conicei $\mathfrak{K}$ într'un punct $J_0 \neq J_1, J_2, J_3$. Acest punct reprezintă cel de al patrulea punct jacobian al involuţiei (3).

b) Conica Σ mai taie pe $\mathfrak{K}$ într'un punct Z_0 (diferit de S^0) care e punctul de ramificare asociat punctului jacobian J_0 în involuţia (3).

c) Conicele propriu zise Σ conjugate triunghiului $J_1J_2J_3$ şi tangente într'un punct mobil J_0, la $\mathfrak{K}$, mai taie această din urmă conică în punctele S^0 şi Z_0, care se corespund involutiv (consecinţă a unicităţii conicei Σ, când fixăm pe Z_0 sau, analog, pe S^0).

d) Punctele unite ale acestei involuţii reprezintă un covariant raţional, pătratic, al ternei $J_1J_2J_3$, aşa dar chiar hessiana.

In virtutea lui *c)* şi *d)* e clar că Z_0, întocmai ca O de mai sus, e reflectatul lui S^0 în hessiana ternei $J_1J_2J_3$. Deci

$$O \equiv Z_0, \tag{35}$$

ceeace termină demonstraţia.

12⁰. **Teoremă.**

Valoarea comună a rapoartelor anarmonice $(C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3})$ *introduse pe laturile triunghiului conjugat* $S^1S^2S^3$ *prin teorema* 10^0 *este*

$$(C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = (J_0J_1J_2J_3),$$

adică, egală cu raportul anarmonic al conicelor jacobiane ale ternei O^i $(i = 1, 2, 3)$, *în fascicol. Aşa dar această valoare rămâne aceeaşi când potrivit teoremei* 11^0, *trecem dela conica de ramificare* Z_0 *la oricare din conicele analoage* Z^i $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Comparând covariantul pătratic reprezentat de punctele unite ale involuției (34) și expresiile parametrice (22'), conchidem că polul hessian al ternei $J_1J_2J_3$ față de conica $\mathfrak{M}$ are coordonatele

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = 1.$$

Fie H acest pol. Verificăm că acest punct se găsește pe conica $\mathfrak{K}$ de ecuație (28'), care mai trece, cum știm, prin punctele K_i ($i = 1, 2, 3$) din alineatul 10^0. Avem deci, succesiv, în virtutea lui (26) și a înlocuirii (35):

$$(36) \qquad (C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = K^i\,(Z_0\,J_1\,J_2\,J_3) = H\,(Z_0\,J_1\,J_2\,J_3).$$

Am arătat însă, la sfârșitul alineatului precedent, că S^0 și Z_0 sunt o pereche de puncte reflectate în hessiana ternei $J_1\,J_2\,J_3$. Altfel spus, dreapta S^0Z_0 trece prin H.

Pe de altă parte, în virtutea observațiilor *a)* și *c)* din același alineat, există corespondență biunivocă, deci proiectivă, între coarda S^0Z_0, de o parte, și punctul J_0, de altă parte, variabile în domeniile binare respective: punctul H și conica $\mathfrak{M}$.

Se vede însă fără greutate că, pentru $J_0 = J_1, J_2, J_3$, coarda a respectiv pozițiile HJ_1, HJ_2, HJ_3. Așa dar

$$(37) \qquad H\,(Z_0\,J_1\,J_2\,J_3) = (J_0\,J_1\,J_2\,J_3)\mathfrak{M}.$$

Din (36) și (37) rezultă

$$(C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = (J_0\,J_1\,J_2\,J_3)\mathfrak{M}$$

deci teorema e demonstrată.

13⁰. **Corolar.**

Dacă în teoremele $10^0 - 11^0$ *diviziunile* $\{C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ *sunt echianarmonice*

$$(C_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = -\varepsilon \ , \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

atunci ternele O^i *și* S^i ($i = 1, 2, 3$) *sunt apolare.*

După o teoremă cunoscută (vezi de exemplu OTTO SCHLESINGER, Math. Ann. XXII) o conică $\mathfrak{S}$ care admite cu altă conică $\mathfrak{T}$ o serie lineară de triunghiuri P^i ($i = 1, 2, 3$) respectiv circumscrise şi înscrise, nu poate avea diviziunile jacobiane şi de ramificare decât în acelaşi timp echianarmonice

$$(J_0 J_1 J_2 J_3)_{\mathfrak{T}} = -\varepsilon \ , \ (Z_0 Z_1 Z_2 Z_3)_{\mathfrak{T}} = -\varepsilon^2$$

(pentru notaţii să se vadă alineatul 3⁰). In acest caz involuţia cubică a triunghiurilor P^i e constituită din triunghiuri apolare.

Corolarul nostru e consecinţa nemijlocită a teoremei 12⁰ şi a teoremei lui SCHLESINGER.

Această teoremă a lui SCHLESINGER e echivalentă cu teorema mai nouă şi mai cunoscută a lui R. WEITZENBÖCK:

Dacă D e o dreaptă a complexului lui CHASLES asociat cubicei strâmbe Γ, între punctele de contact J_i ale celor patru tangente la Γ care se sprijină în Z_i pe D avem următoarele relaţiuni

$$(J_0 J_1 J_2 J_3)_{\Gamma} = -\varepsilon \ , \ (Z_0 Z_1 Z_2 Z_3)_D = -\varepsilon^2 .$$

§ 3. Caracterizări ternare raţionale ale conicelor de ramificare.

14⁰. Teoremă de completare pentru 9⁰.

Fie

$$\Delta^{S^1/AD}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}$$

transversala cordală care, potrivit lui 9⁰, trece prin S^1, *când punctul* F *se găseşte pe o conică de ramificare* Z_i . *Transversalele cordale excepţionale (de felul precedentei) din celelalte cinci grupe (20') au toate acelaş indicator* $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$.

Fie $\mathfrak{K}$ corpul de raţionalitate al coeficienţilor fascicolului (1). Elementul S^1/AD e despărţit de celelalte cinci elemente similare, prin asocierea rădăcinei τ^k a unei anumite ecuaţii de gradul al şeaselea

$$(38) \qquad (\tau s)^6 = 0$$

cuprinsă în $\mathfrak{K}$ şi ireductibilă în acest corp.

Să folosim reprezentarea geometrică dela alineatul 3°. Fie Z^i un punct al conicei $\mathfrak{C}$ şi ζ^i parametrul său binar. Evident, putem găsi o conică $\mathfrak{S}$ cu coeficienţii în $\mathfrak{K}(\zeta^i)$ care să treacă prin Z_i şi să fie înscrisă în triunghiul $S^1S^2S^3$.

Odată fixată conica $\mathfrak{S}$, putem găsi un triunghiu $O^1O^2O^3$ înscris lui $\mathfrak{C}$ şi circumscris lui $\mathfrak{S}$, reprezentat de rădăcinile unei forme cubice binare

$$(39) \qquad (\omega s)^3 = 0$$

cu coeficienţii raţionali în $\mathfrak{K}(\zeta^i)$. Intr'adevăr, odată cu Z_i cunoaştem o infinitate de puncte pe $\mathfrak{C}$, cu coordonatele cuprinse în $\mathfrak{K}(\zeta^i)$. Luând unul din aceste puncte drept vârf O, cuprinderea lui (39) în $\mathfrak{K}(\zeta^i)$ e asigurată.

Această precauţie odată luată, e clar că separarea contactelor $G^i_{\varepsilon_i}$ în două grupe complementare

$$G^1_{\varepsilon_1} G^2_{\varepsilon_2} G^3_{\varepsilon_3} \quad , \quad G^1_{-\varepsilon_1} G^2_{-\varepsilon_2} G^3_{-\varepsilon_3},$$

prin proprietatea transversalei cordale

$$\Delta^{S^1/AD}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$$

a punctului F de pe conica Z_i de a trece prin S^1 (vezi 9°) revine, în transcriere analitică, la anularea unui polinom

$$(40) \qquad g(\tau^k) = 0$$

ai cărui coeficienţi sunt cuprinşi în $\mathfrak{K}(\zeta^i)$.

Datorită însă arbitrarului cu care a fost ales Z_i, sau, ceeace e tot una, parametrul său ζ^i pe $\mathfrak{C}$, e sigur că ecuaţia (38) continuă să fie ireductibilă şi în $\mathfrak{K}(\zeta^i)$. Cu alte cuvinte grupul lui GALOIS al lui (38) în acest corp, continuă să fie transitiv.

In virtutea lui (40) şi a unei teoreme fundamentale din teoria lui GALOIS a ecuaţiilor avem, odată cu (40):

$$g(\tau^k) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \ldots 6.$$

Teorema e demonstrată, căci fiecare din aceste ecuaţii exprimă excepţionalitatea transversalei cordale de acelaş indicator $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ cuprinsă în fiecare din grupele (20′).

15⁰. Teoremele din paragraful 2 sunt caracterizări ale conicelor de ramificare Z_i în corpul de raționalitate $\mathfrak{R}(\zeta^i, \tau^k)$, — vezi alineatul 14⁰. Ne propunem să dăm aici o caracterizare a conicelor Z_i în corpul lor de raționalitate minimal $\mathfrak{R}(\zeta^i)$. Demonstrăm anume următoarea.

Teoremă.

Notațiile fiind aceleași ca în toate alineatele precedente, e clar că polarele $G_+^i G_-^i$ *ale unul punct* F *în raport cu conicele* O^i $(i = 1, 2, 3)$ *în fascicol, concură într'un punct* Φ. *Insemnăm atunci cu*

$$\varphi_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} \quad , \quad (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1),$$

axele de omologie ale următoarelor patru perechi de triunghiuri

$$G^1_{\varepsilon_1} G^2_{\varepsilon_2} G^3_{\varepsilon_3} \quad , \quad G^1_{-\varepsilon_1} G^2_{-\varepsilon_2} G^3_{-\varepsilon_3} .$$

Avem proprietatea:

Excluzând punctele de pe conicele singulare ale fascicolului, incidența între F *și o dreaptă* $\varphi_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ *e caracteristică pentru punctele conicelor de ramificare* Z_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, *ale ternei.*

In ipotesa că F nu se găsește pe una din diagonalele AD, BC, CD, BA, CA, AB ale patrupunctului ABCD al fascicolului (1), se știe că locul geometric al contactelor G_ε de pe tangentele duse prin F la conica variabilă O a fascicolului, e o cubică de genul 1, când A, B, C, D sunt distincte între ele și ne situate trei în linie dreaptă.

Această cubică Γ trece prin A, B, C, D, F, Φ și prin vârfurile S^1, S^2, S^3 ale triunghiului conjugat. Mai mult, F e tangențialul fiecăruia din punctele A, B, C, D iar Φ, tangențialul fiecăruia din punctele F, S^1, S^2, S^3.

Presupunem că F se găsește într'adevăr pe conica de ramificare Z. Să arătăm că e necesar ca una din dreptele $\varphi_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ să treacă prin F.

Insemnăm cu g^i dreapta $G_+^i G_-^i$ $(i = 1, 2, 3)$. Se observă ușor că dreptele $g^1g^2g^3$ descriu, în domeniul binar al punctului comun Φ, o involuție cubică, în timp ce terna $O^1O^2O^3$ variază în involuția cubică (3) determinată de O^i și S^i $(i = 1, 2, 3)$. Printre elementele acestei involuții cubice de conice în fascicol se găsește însă și agregatul

$$(41) \qquad Z^i \cdot (J^i)^2 ,$$

căci Z_i e o conică de ramificație a involuției.

Elementul corespunzător în involuţia ternelor g^i $(i = 1, 2, 3)$ elementului (41) e agregatul

$$z \,.\, j^{\bar{2}} \tag{41'}$$

unde z e tangenta în F la Z_l iar j, polara lui F în raport cu conica jacobiniană asociată J_i .

Fie σ^i dreapta care uneşte pe Φ cu S^i . Seria lineară de drepte $g^1 g^2 g^3$ poate fi reprezentată prin bazele

$$z \,.\, j^{\bar{2}} \quad , \quad \sigma^1 . \sigma^2 . \sigma^3 \,. \tag{42}$$

Considerăm prima polară a lui F faţă de cubica Γ. Ea este, evident, conica $\Phi F S^1 S^2 S^3$, căci Φ e tangenţialul grupei F, S^1, S^2, S^3. Insemnăm cu Ψ a doua intersecţie a dreptei j cu această conică şi cu φ, dreapta $F\Psi$.

Omologia de centru Φ, de axă φ şi de modul, mărimea arbirară h, transformă pe Γ într'o altă cubică Γ' care are în comun cu Γ' şase puncte, independente de mărimea arbitrară h : două puncte vecine în Φ, două puncte vecine în F, două puncte în celelalte intersecţii, diferite de F, ale lui φ cu Γ.

Mai rămân aşa dar trei intersecţii variabile, pe care le însemnăm $\mathfrak{S}^1_+$, $\mathfrak{S}^2_+$, $\mathfrak{S}^2_+$. Considerând şi celelalte intersecţi $\mathfrak{S}^1_-$, $\mathfrak{S}^2_-$, $\mathfrak{S}^3_-$ ale razelor $\gamma^i \equiv \Phi\, \mathfrak{S}^i_+$ cu cubica Γ e clar că $\mathfrak{S}^i_-$, $\mathfrak{S}^i_+$ $(i = 1, 2, 3)$ sunt singurele perechi *curente*[1]) de puncte ale omologiei, situate pe Γ.

Făcând să varieze h se vede uşor că terna de raze $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ descrie o involuţie cubică. Să cercetăm câteva din ternele ei particulare.

Pentru $h = -1$ intersecţiile H^i ale razelor $\mathfrak{S}^i_+$ $\mathfrak{S}^i_-$ $(i = 1, 2, 3)$ cu axa φ sunt conjugatele armonice ale lui Φ în raport cu perechile de punte $\mathfrak{S}^i_+$, $\mathfrak{S}^i_-$. Aşa dar H^i trebue să se găsească pe polara (prima polară) a lui Φ în raport cu cubica Γ. Din felul cum am construit pe φ se vede că singurele poziţii bune pentru H^i sunt F şi Ψ. Raza care merge la Ψ (dreapta j) trebue socotită dublu, căci perechea $G_+ G_-$ corespunzătoare e permutabilă. Conchidem aşa dar că involuţia ternelor $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ conţine agregatul

$$z \,.\, j^{\bar{2}} \,. \tag{43}$$

---

1) Aceasta înseamnă, variabile împreună cu modulul h.

Pentru $h = 1$ omologia noastră devine identitatea. Aşa dar obligatoriu $\mathcal{G}_+^i \equiv \mathcal{G}_-^i$, cu alte cuvinte razele γ^i ($i = 1, 2, 3$) ale ternei trebuesc căutate în acest caz printre tangentele duse prin Φ la Γ, adică printre dreptele $z, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$. Prima din acestea se exclude, căci întreaga ternă γ^i ar coincide cu (43), ceeace am văzut că se întâmplă numai pentru $h = -1$. Incât terna corespunzătoare valorii $h = 1$ nu poate fi decât

$$\sigma^1 \,.\, \sigma^2 \,.\, \sigma^3. \tag{44}$$

Comparând (42) cu (43) şi (44) conchidem că cele două involuţii cubice de terne curente $g^1g^2g^3$ şi $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ coincid, ca având aceeaşi bază lineară. Prin urmare punctele $\mathcal{G}_\varepsilon^i$ nu sunt decât punctele $G_{\varepsilon i}^i$ într'o ordine oarecare, iar dreapta introdusă φ se dovedeşte a fi axa de omologie a două triunghiuri $G_{\varepsilon i}^i$ şi $G_{-\varepsilon i}^i$ ($i = 1, 2, 3$), deci coincide cu una din dreptele $\varphi_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$. Presupunem notaţia astfel aleasă încât

$$\varphi_{+++} \equiv \varphi. \tag{45}$$

Insă φ, prin construcţie, trece prin F. Necesitatea condiţiei incidenţei între F şi φ_{+++}, imediat ce F se găseşte pe Z_i, e demonstrată.

Să demonstrăm acum suficienţa condiţiei.

Presupunem aşa dar axa de omologie φ_{+++} trecând prin F. Să arătăm că, în acest caz, F se găseşte pe o conică Z_i.

Introducem aceeaşi omologie de centru Φ, de axă φ_{+++} şi de modul arbitrar h, ca mai sus. Transformata Γ' a lui Γ are în comun cu Γ şase puncte fixe: două contacte în Φ şi F şi două intersecţii simple în celelalte puncte, diferite de F, în care φ_{+++} taie pe Γ. Fie deci $\mathcal{G}_+^1$, $\mathcal{G}_+^2$, $\mathcal{G}_+^3$ celelalte trei intersecţii dependente de h. Dreptele $\gamma^i \equiv \Phi\mathcal{G}_+^i$ mai taie a treia oară pe Γ în $\mathcal{G}_-^i$ ($i = 1, 2, 3$). Se vede uşor că $\mathcal{G}_-^i$ intră în aceeaşi serie de puncte curente $\mathcal{G}_+^i$ ($i = 1, 2, 3$) şi corespund anume valorii $\frac{1}{h}$ a modului de omologie.

Urmează de aici simplu că dreptele γ^i ($i = 1, 2, 3$) descriu în domeniul binar al punctului Φ o involuţie cubică. Insă o dreaptă γ ce trece prin Φ se corespunde proiectiv cu conica O a fascicolului

(1) care o admite ca polară a punctului F. Deci conicele P^i din (1), față de care F are ca polare dreptele γ^i ($i = 1, 2, 3$), descriu în domeniul binar al lui (1) o involuție cubică.

Însă triunghiurile G_+^i și G_-^i ($i = 1, 2, 3$) se corespund, prin definiție, într'o omologie de axă φ_{+++}. Fie h_0 valoarea corespunzătoare a modulului de omologie. E clar că, pentru $h = h_0$ terna curentă P^i a involuției devine terna O^i ($i = 1, 2, 3$); iar pentru $h = 1$, terna singulară S^i ($i = 1, 2, 3$) — vezi raționamentul de mai sus. — Pe de altă parte pentru $h = -1$ intersecțiile H^i ale razelor γ^i ($i = 1, 2, 3$) cu axa φ_{+++} se găsesc pe întâia polară a lui Φ în raport cu Γ. Fie Ψ cealaltă intersecție, diferită de F, a acestei polare cu φ_{+++}. Punând $z \equiv F\Phi$, $j \equiv \Psi\Phi$, un raționament folosit în prima parte a acestei demonstrații arată că, în acest caz

$$\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \equiv z \cdot j^{\overline{2}}.$$

Deci corespunzătoarele Z_i și J_i ale acestor drepte în (3) sunt respectiv o conică de ramificare și o conică jacobiană asociate; însă dreapta z conține polul ei F în raport cu Z_i. Așa dar F se găsește pe Z_i.

Suficiența condiției e demonstrată.

16⁰. **Corolar.**

Fie J *conica absolută a Geometriei Sferice și* Z *o conică sferică nesingulară și diferită de un cerc, dar altfel arbitrară. Insemnăm cu* S^i ($i = 1, 2, 3$) *cele trei perechi de axe focale și cu* O^i ($i = 1, 2, 3$) *o ternă a involuției cubice de baze*

$$S^1S^2S^3 \ , \ Z\,(J)^{\overline{2}}.$$

Un punct F *de pe* Z *admite față de terna* O^i *patru axe de omologie* $\varphi_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$, *în virtutea construcției 15⁰. Avem proprietatea: una din aceste axe* φ_{+++} *coincide cu normala în* F *la* Z.

Fie G_+ și G_- intersecțiile dreptei $F\Psi \equiv j$ cu φ_{+++}. Am văzut în alineatul 15⁰ că

$$(\Phi\Psi G_+ G_-) = -1.$$

Dar j e tocmai polara lui F în raport cu J. E clar acum că $z \equiv F\Phi$ (tangenta în F la Z) și $\varphi_{+++} \equiv F\Psi$ sunt conjugate față de conica J.

D. Barbilian.

GENERALIZAREA FORMULELOR TRIGONOMETRICE DINTR'UN TRIUNGHIU ÎN DOMENIUL COMPLEX

1. Domnul Profesor A. ANGELESCU mi-a propus să studiez următoarea problemă: *formulele trigonometrice ce există între unghiurile unui triunghiu se menţin în cazul când aceste unghiuri sunt trei numere complexe a căror sumă face* π? Răspunsul este afirmativ.

Rândurile de faţă au făcut obiectul unei comunicări ţinută la una din şedinţele cu caracter elementar ale *Societăţii Române de Ştiinţe, secţia Matematici*, unde Domnul Profesor D. BARBILIAN mi-a făcut cunoscut că a întâlnit în cartea lui F. KLEIN, *Vorlesungen über die hipergeometrische Funktion,* citat un memoriu al lui F. SCHILLING [1]), în care după cum spune titlul, autorul se ocupă cu generalizarea formulelor din trigonometria sferică la cazul când arcele devin numere complexe. Din nefericire n'am putut găsi acest memoriu aşa încât se poate întâmpla ca o parte din rezultatele ce vom găsi să fie cuprinse acolo.

In cele ce urmează vom începe prin a arăta că una din relaţiile cunoscute între unghiurile unui triunghiu se menţine. Cum relaţiile ce vor rezulta pe această cale conţin numere complexe, egalând părţile reale şi cele imaginare va rezulta un nou mod de a deduce o serie de noui relaţii trigonometrice care sunt mai generale decât cele cunoscute. Mai mult, definind nişte funcţiuni, corespunzătoare laturilor unui triunghiu din domeniul real, vom arăta că şi formulele ce conţin aceste elemente se menţin în domeniul complex, dându-ne posibilitatea şi aci de a găsi relaţii noui.

Se poate merge mai departe definind funcţiuni corespunzătoare suprafeţei, razelor cercului înscris şi exînscris,... Tot aşa se poate arăta că relaţile trigonometrice dintre unghiurile unui patrulater se menţin, etc.

---

1) Über die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im falle complexer Argumente, Vgl. auch Göttinger Nachr. 1891.

2. Ne propunem să arătăm că dacă

$$(1) \qquad z_1 + z_2 + z_3 = \pi,$$

z_1, z_2, z_3 fiind complexi, atunci avem şi

$$(2) \quad \sin nz_1 + \sin nz_2 + \sin nz_3 = \begin{cases} 4(-1)^{\frac{n}{2}+1} \sin\frac{nz_1}{2}\sin\frac{nz_2}{2}\sin\frac{nz_3}{2}, \\ 4(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{nz_1}{2}\cos\frac{nz_2}{2}\cos\frac{nz_3}{2}, \end{cases}$$

după cum numărul real n este cu soţ sau fără soţ.

In această formulă funcţiunile $\sin z$ şi $\cos z$ sunt definite prin formele lui EULER:

$$(3) \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Cu ajutorul acestor două formule se arată cu uşurinţă că formulele de adunare

$$(4) \qquad \sin(z + z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z',$$

$$(5) \qquad \cos(z + z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z',$$

cunoscute dela arcele reale se menţin şi pentru funcţiunile definite prin formulele lui EULER. Schimbând în (4) pe z' în $-z'$, şi ţinând seamă că funcţiunile $\sin z$ şi $\cos z$ sunt respectiv impară şi pară (se vede din (3)) se găseşte prin adunare, că formula care transformă suma a două sinusuri într'o formulă calculabilă prin logaritmi se menţine. Deci

$$\sin nz_2 + \sin nz_3 = 2 \sin\frac{n(z_2 + z_3)}{2}\cos\frac{n(z_2 - z_3)}{2}.$$

Să presupunem pe n cu soţ. In baza lui (1) şi (4) avem

$$\sin\frac{n(z_2 + z_3)}{2} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{z_1}{2}\right) = \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{z_1}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{z_1}{2}.$$

Cum însă:

$$e^{i\frac{n\pi}{2}} = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}},$$

$$e^{-i\frac{n\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}},$$

n fiind cu soţ, avem

$$\sin\frac{n\pi}{2} = 0 \quad , \quad \cos\frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \tag{6}$$

Deci:

$$\sin\frac{n(z_2+z_3)}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin\frac{nz_1}{2} \cdot$$

Dar, în baza formulei (4) putem scrie:

$$\sin nz_1 = 2\sin\frac{nz_1}{2}\cos\frac{nz_1}{2},$$

aşa încât

$$\sin nz_1 + \sin nz_2 + \sin nz_3$$

$$= 2\sin\frac{nz_1}{2}\left[\cos\frac{nz_1}{2} + (-1)^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n(z_2-z_3)}{2}\right] \cdot$$

Insă, ţinând seamă de (6) şi cu ajutorul lui (5), putem scrie:

$$(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n(z_2-z_3)}{2} = -\cos\left[\frac{n\pi}{2} + \frac{n(z_2-z_3)}{2}\right],$$

şi deci:

$$\sin nz_1 + \sin nz_2 + \sin nz_3$$

$$= 2\sin\frac{nz_1}{2}\left[\cos\frac{nz_1}{2} - \cos\frac{n(\pi+z_2-z_3)}{2}\right] \cdot$$

Tot după (5) se citeşte că formula care transformă diferenţa a două cosinusuri într'o formulă calculabilă prin logaritmi se menţine, deci putem scrie mai departe

$$\sin nz_1 + \sin nz_2 + \sin nz_3 = 4\sin\frac{nz_1}{2}\sin\frac{nz_2}{2}\sin\frac{n(\pi-z_3)}{2},$$

care în baza formulelor (6) ne spune că dacă n este cu soţ formula (2) este demonstrată. La fel se demonstrează pentru cazul când n este fără soţ.

Mai mult, la fel se arată că toate formulele dela Cap. X, *Culegere de Probleme de Trigonometrie* de V. CRISTESCU revăzută de GH. TH. GHEORGHIU, partea I-a, apărută de curând, se menţin. De altfel în această carte am şi dat un exemplu de acest fel la Cap. XXVIII, ex. 6.

Observare. Formula (2) se putea demonstra şi direct printr'un calcul algebric simplu, înlocuind pe $\sin z$ şi $\cos z$ prin formulele lui EULER. Am preferat însă să menţin calea ce se urmează în real tocmai pentru a se arăta că toate formulele stabilite analog se menţin.

3. Să considerăm formula demonstrată:

$$(2') \quad \sin 2nz_1 + \sin 2nz_2 + \sin 2nz_3 = 4(-1)^{n+1} \sin nz_1 \sin nz_2 \sin nz_3,$$

şi fie:

$$z_k = x_k + iy_k \qquad (k = 1, 2, 3),$$

Atunci (1) se descompune în

$$(1') \quad x_1 + x_2 + x_3 = \pi \quad , \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

Ţinând seamă de formula:

$$\sin(x + iy) = \sin x \, chy + i \cos x \, shy,$$

înlocuind în (2'), făcând toate calculele şi scriind că părţile reale precum şi coeficienţii lui i din ambele părţi sunt egali, găsim formulele:

$$(7) \quad \Sigma \sin 2nx_1 \, ch2ny_1 = 4(-1)^{n+1} (\sin nx_1 \sin nx_2 \sin nx_3 \, chny_1 \, chny_2 \, chny_1 - \Sigma \cos nx_1 \cos nx_2 \sin nx_3 \, shny_1 \, shny_2 \, chny_3).$$

$$(8) \quad \Sigma \cos 2nx_1 \, sh2ny_1 = 4(-1)^{n+1} (\Sigma \sin nx_1 \sin nx_2 \cos nx_3 \, chny_1 \, chny_2 \, shny_3) - \cos nx_1 \cos nx_2 \cos nx_3 \, shny_1 \, shny_2 \, shny_3),$$

unde shy şi chy sunt funcţiunile hiperbolice definite prin formulele

$$shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad , \quad chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \, .$$

Aceste două formule conţin două cazuri particulare interesante :

a) Fie $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Cum se vede din definiţia funcţiunilor hiperbolice că

$$sh\,0 = 0 \quad \text{şi} \quad ch\,0 = 1,$$

rezultă din (7) tocmai formula din domeniul real dela care am plecat.

b) Fie $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = \pi.$

Formula (8) de dă

(8') $$\Sigma\, sh2ny_1 = 4(-1)^{n+1}\, shny_1\, shny_2\, shny_3 .$$

4. Să considerăm trei funcţiuni de variabilă complexă f_1, f_2, f_3 definite prin relaţiile :

(9) $$\frac{f_1}{\sin z_1} = \frac{f_2}{\sin z_2} = \frac{f_3}{\sin z_3} = \rho .$$

Aceste funcţiuni în cazul când z_1, z_2, z_3 sunt reali nu sunt altceva decât laturile unui triunghiu. Intre funcţiunile f există aceleaşi relaţii ca şi între laturile unui triunghiu. Intr'adevăr să demonstrăm de exemplu că :

(10) $$f_1 = f_2 \cos z_3 + f_3 \cos z_2 .$$

Din (9) scoatem :

$$f_1 = \rho \sin z_1 \ , \ f_2 = \rho \sin z_2 \ , \ f_3 = \rho \sin z_3 ,$$

aşa încât (10) se mai poate scrie :

$$f_1 = \rho\,(\sin z_2 \cos z_3 + \sin z_3 \cos z_2) = \rho \sin(z_2 + z_3) = \sin(\pi - z_1)$$
$$= \rho\,(\sin\pi \cos z_1 - \cos\pi \sin z_1) = \rho \sin z_1 ,$$

în baza formulelor (6).

Din formula (10) precum şi din cele ce se deduc din ea prin permutări circulare, rezultă

(11) $$f_1^2 = f_2^2 + f_3^2 - 2 f_2 f_3 \cos z_1 .$$

Deci, formulele fundamentale dintr'un triunghiu oarecare se menţin.

5. Fie:

$$f_k = a_k + ib_k \quad (k = 1, 2, 3) \text{ şi } \rho = \rho' + i\rho''.$$

Ţinând seamă de formula care dă pe $\sin(x + iy)$, relaţiile (9), se mai scriu:

$$\frac{a_1 + ib_1}{\sin x_1 \, ch y_1 + i \cos x_1 \, sh y_1} = \ldots = \rho' + i\rho'',$$

sau încă înmulţind cu conjugata numitorului

$$\frac{(a_1 + ib_1)(\sin x_1 \, ch y_1 - i \cos x_1 \, sh y_1)}{\sin^2 x_1 \, ch^2 y_1 + \cos^2 x_1 \, sh^2 y_1} = \ldots = \rho' + i\rho''.$$

Folosind formula:

$$ch^2 y_k - sh^2 y_k = 1,$$

numitorii se pot scrie sub una din formele:

$$\sin^2 x_k \, ch^2 y_k + \cos^2 x_k \, sh^2 y_k = \sin^2 x_k + sh^2 y_k = ch^2 y_k - \cos^2 x_k .$$

Aşadar condiţiile (9) se pot înlocui cu

$$(9') \qquad \frac{a_1 \sin x_1 \, ch y_1 + b_1 \cos x_1 \, sh y_1}{\sin^2 x_1 + sh^2 y_1} = \ldots = \rho',$$

$$(9'') \qquad \frac{b_1 \sin x_1 \, ch y_1 - a_1 \cos x_1 \, sh y_1}{\sin^2 x_1 + sh^2 y_1} = \ldots = \rho''.$$

Să separăm acum în (10) părţile reale de cele imaginare. Folosind formula:

$$\cos(x + iy) = \cos x ch y - i \sin x sh y,$$

găsim

$$(12) \quad a_1 = a_2 \cos x_3 \, ch y_3 + a_3 \cos x_2 \, ch y_2 + b_2 \sin x_3 \, sh y_3 + b_3 \sin x_2 \, sh y_2 .$$

$$(13) \quad b_1 = b_2 \cos x_3 \, ch y_3 + b_3 \cos x_2 \, ch y_2 - a_2 \sin x_3 \, sh y_3 - a_3 \sin x_2 \, sh y_2 .$$

Aceste două formule au două cazuri particulare interesante:

a) Luând $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, regăsim formula fundamentală (10) dintre elementele unui triunghiu.

b) Luând $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = \pi$, găsim:

$$a_1 = a_3\, chy_2 - a_2\, chy_3, \tag{14}$$

şi celelalte formule analoage

$$a_2 = a_3\, chy_1 - a_1\, chy_3,$$

$$a_3 = a_2\, chy_1 + a_2\, chy_1,$$

în ipotezele

$$\frac{a_1}{shy_1} = \frac{a_2}{shy_2} = \frac{-a_3}{shy_3} = -\rho''$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

NOTE MATEMATICE

43. *Acum o sută de ani în lumea matematică.* Date culese în Biblioteca Seminarului Matematic din publicaţiile timpului. (Urmare).

2. *Originea lucrărilor sistematice despre ceeace numim astăzi „Problemele pe contur"* o formează două memorii ale lui C. STURM intitulate: «Sur les équations différentielles linéaires du second ordre» şi «Sur une classe d'équations à différences partielles» şi unul al lui J. LIOUVILLE «Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable», publicate în «Journal de mathématiques pures et appliquées», v. I. 1836, pp. 106 — 186, 373 — 444 şi 253 — 265.

După cum spune în prefaţa primului memoriu, C. STURM îşi propune studiul proprietăţilor soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al doilea «fără a le integra». La aceste ecuaţii se ajunge făcând schema matematică a o mulţime de probleme de natură fizică.

Rezultatul fundamental al acestor memorii îl constitue demonstrația existenței soluțiilor ecuației:

$$\frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - 1)V = 0,$$

satisfăcând condițiilor:

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0$$

pentru $x = x_0$ și

$$k\frac{dV}{dx} + HV = 0$$

pentru $x = X$, corespunzătoare la o infinitate de valori ale parametrului r (în terminologia modernă autovalori, valori caracteristice). Se studiază și numărul zerorilor acestor soluții etc.

J. LIOUVILLE, completând și generalizând lucrările lui POISSON, demonstrează posibilitatea desvoltării unei funcțiuni arbitrare în serii de funcțiuni V, satisfăcând condițiilor de mai sus.

Aceste lucrări au fost reluate la începutul secolului nostru înglobându-se în cadrul mult mai general al teoriei ecuațiilor integrale.

44. *Asupra pătratelor perfecte.* In articolul „*Sur les carrés parfaits*" din *Gazeta Matematică* Vol. XXXVII, pag. 41, D-l V. THÉBAULT caută pătratele de 4 cifre *abcd* pentru care sumele $a+b$, $c+d$ sunt egale, și găsește soluția:

$$71^2 = 5041.$$

Pe căi analoage cu cea întrebuințată de D-l V. THÉBAULT am căutat pătratele de 4 cifre *abcd* pentru care *suma unei părți din cifre este egală cu suma celorlalte cifre și am găsit următoarele* rezultate:

1°. $a = b + c + d$: $71^2 = 5041$, $91^2 = 9801$.
2°. $b = a + c + d$: $54^2 = 2916$.
3°. $c = a + b + d$: $36^2 = 1296$, $59^2 = 3481$.
4°. $d = a + b + c$: $33^2 = 1089$, $35^2 = 1225$,
$55^2 = 3025$, $57^2 = 3249$.

5^0. $a+b=c+d$: $71^2=5041$.

6^0. $a+c=b+d$: $33^2=1089$, $55^2=3025$,
$66^2=4356$, $88^2=7744$, $99^2=9801$.

7^0. $a+d=b+c$: $68^2=4624$, $72^2=5184$,
$74^2=5476$, $88=7744$.

De asemeni căutând pătratele *abcd* pentru care suma cifrelor, este egală cu suma cifrelor rădăcinii, am găsit:

$45^2=2025$, $46^2=2116$, $55^2=3025$, $90^2=8100$, $99^2=9801$.

G-L GH. BUICLIU.

45. *O generalizare şi aplicaţiile ei.* — Se cunoaşte propoziţiunea (problema 10, Cap. LII, Culegere de Probleme de A. G. IOACHIMESCU):

„Dacă ecuaţia $f(x)=0$, *ale cărei rădăcini sunt:* x_1, *„*$x_2,\ldots,x_n$ *are o rădăcină comună* x_1 *cu ecuaţia* $f''(x)=0$, *„care nu anulează pe* $f'(x)=0$, *să se arate că avem:*

$$\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{x_1-x_k}=0.$$

Să presupunem că avem şi:

$$f^{IV}(x_1)=0\ ,\ f^{VI}(x_1)=0\ ,\ f^{VIII}(x_1)=0,\ldots$$
$$f'(x_1)\neq 0\ ,\ f'''(x_1)\neq 0\ ,\ f^{V}(x_1)\neq 0,\ldots$$

In acest caz putem aplica enunţul de mai sus privid pe $f''(x)=0$ ca pe $f(x)=0$ iar pe $f^{IV}(x)=0$ ca pe $f''(x)=0$, ş. a. m. d., încât generalizarea problemei 10 rezultă imediat:

Dacă $f(x)=0$ *este o ecuaţie în care avem:*

$$f(x_1)=f''(x_1)=\ldots=f^{(2p)}(x_1)=0$$

iar

$$f'(x_1)\ ,\ f'''(x_1),\ldots f^{(2p-1)}(x_1)$$

sunt diferiţi de zero, atunci avem relaţia:

$$\sum\frac{1}{x_1-x_k^{(2p)}}=0$$

în care $x_k^{(2p)}$ *sunt rădăcinile derivatei considerate, de ordinul* $2p$.

Se cunoaşte de asemenea propoziţiunea (pr. 11, cap. şi op. citat): «Dacă x_1, x_2, ... x_n, sunt rădăcinile ecuaţiei $f(x) = 0$ «şi x'_2, x'_3, ... x'_n, sunt rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$, avem»:

$$\sum_{k=2} \frac{1}{x_1 - x_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=2} \frac{1}{x_1 - x'_k} .$$

Această propoziţiune se poate de asemenea generaliza cu uşurinţă şi dacă facem apropierea convenabilă între aceste generalizări obţinem imediat următoarea:

Generalizare. *Dacă* $f(x) = 0$ *este o ecuaţiune ce are o rădăcină* x_1 *comună tuturor derivatelor ei de ordin par fără a anula pe niciuna din derivatele de ordin impar, atunci avem relaţia:*

$$\frac{1}{x_1 - b_1} + \frac{1}{x_1 - b_2} + \ldots + \frac{1}{x_1 - b_p} = 0$$

în care b_1, b_2, ... b_p *sunt rădăcinile unei derivate oarecare a lui* $f(x) = 0$.

Aceasta este generalizarea anunţată şi asupra ei vom face o amplicaţiune.

In articolul *„Asupra ecuaţiunilor cu rădăcinile în progresie aritmetică"* «G. M.», Anul XLI, pag. 378, am arătat că aceste ecuaţiuni îndeplinesc prima condiţiune a generalizării de mai sus. Se poate verifica cu uşurinţă că şi a doua condiţiune este îndeplinită, adică:

Derivatele de ordin impar ale unei ecuaţiuni de grad impar $F(x) = 0$ *cu rădăcinile in progresie aritmetică cât şi derivatele de ordin par ale lui* $F(x) = 0$ *de grad par nu admit rădăcina comună a derivatelor respective intermediare.*

Tragem concluzia că $F(x) = 0$ este o ecuaţiune căreia îi putem aplica generalizarea de mai sus şi deci putem enunţa:

Dacă $F(x) = 0$ *este o ecuaţie cu rădăcinile în progresiune aritmetică iar:* d_1, d_1, ... d_p, *rădăcinile unei derivate oarecare a lui* $F(x) = 0$, *avem relaţia:*

$$\frac{1}{a - d_1} + \frac{1}{a - d_2} + \ldots + \frac{1}{a - d_p} = 0$$

unde a *este semisuma a două rădăcini egal depărtate de extremele ecuaţiei* $F(x) = 0$.

LT.-COMANDOR ING. GH. NICULESCU.

46. După redactarea problemei 4543 s'au mai primit soluţii bune dela D-nii : PANAIT C. MAZILU şi DUMITRU I. CIOC. Deasemenea au sosit şi câteva soluţii ale unor camarazi cari din spirit de .... solidaritate au ţinut să aibă aceeaşi greşeală elementară.

G. D. S.

BIBLIOGRAFIE

Numerus. Vol. II. Caetele 13, 14, 15. Mai 1936. Rezultatul Concursului *«Spiru Haret»*. Concursul *«Traian Lalescu»*. La géométrie du triangle, par T. LALESCO.

MAIOR I. LINTEŞ. *Noţiuni elementare de Aerodinamică şi de mecanica avionului.* Bucureşti 1936.

NICOLAE CIORĂNESCU. *Curs elementar de Algebra superioară.* Bucureşti 1936.

Anales dela Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXI. Fasc. 1. Ianuarie 1936. Buenos-Aires.

Idem. Vol. CXXI. Fasc. II. Februarie 1936. Buenos-Aires. Monsenor PABLO CABRERA.— Necrologul şi discursurile pronunţate de VERA VALLEJO şi ENRIQUE MARTINEZ PAZ. Asupra polinoamelor ortogonale cu două variabile şi generalizarea propoziţiei lui BRAVAIS, de FERNANDO L. GASPAR.

Boletin Matematico. Anul IX. No. 2. Aprilie 1936. Buenos-Aires. Asupra divizibilităţii, de M. O. GONZALEZ. Construcţia grafică a curbei derivate, de I. S. ANTONIU. Asupra unui sistem diofantian, de A. GLODEN. Notă asupra identităţilor obţinute prin derivare, de N. N. MIHĂILEANU.

Contribución al Estudio de las Ciencias Fizicas y Matemáticas. (Serie Matematica), Vol. I. Fasc. II. Iulie 1935. La Plata.

EMMY NOETHER, de A. SAGASTUME BERRA. Asupra unei generalizări a metodului de sumare a D-lui E. BOREL, de J. C. VIGNAUX. Asupra seriilor de numere complexe hiperbolice de A. DURAÑONA Y VEDIA-J. C. VIGNAUX. Asupra teoriei funcţiilor de o variabilă complexă hiperbolică, de J. C. VIGNAUX-A. DURAÑONA Y VEDIA.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exerciţii. Anul II. Nr. 9. 1 Iunie 1936. Bucureşti.

Journal de Mathématiques Élèmentaires publié par H. Vuibert. Anul LX. Nr. 17. 1 Iunie 1936. Paris.

Idem. Anul LX. Nr. 18. 15 Iunie 1936. Paris. Asupra rezolvării în numere întregi a ecuaţii $ax + by = c$, de C. GIRAULT.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVI. Nr. 2. 15 Aprilie 1936. Soluţiuni întregi ale ecuaţiunii $x^2 - ay^2 = b$, de GH. CONSTANTINESCU.

Idem. Anul XVI. Nr. 3. 15 Mai 1936. Asupra produselor numerelor întregi consecutive, de V. THÉBAULT.

Idem. Anul XVI. Nr. 4. 15 Iunie 1936. Asupra unor probleme de aritmetică, de G. G. CONSTANTINESCU. Asupra unui triunghiu, de CEZAR IVĂNESCU.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Vol. XXII. Nr. 1 Ianuarie-Martie 1936. Iaşi.

Sphinx. Revue mensuelle des questions récréatives. Anul VI. Nr. 6. Iunie 1936. Bruxelles.

Idem. Anul VI. Nr. 7. Iulie 1936. Bruxelles.

Ştiinţă şi Progres. Anul III. Nr. 3 — 4. Iunie 1936. Târgu-Mureş. Asupra adevăratei valori a unei fracţiunii, de V. ALACI.

MAIOR I. LINTEŞ. *Teoria şi calculul frânelor de gură.* (Extras din *Revista Artileriei).* 1936.

MAIOR I. LINTEŞ. *Noutăţi în «Balistica exterioară».* (Extras din *Revista Artileriei).* 1935.

MAIOR I. LINTEŞ. *L'influence dela pluie sur la trajectoire d'un projectile.* (Extras din *Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara).* 1935.

MAIOR I. LINTEŞ. *Sur l'instabilité des contours ouverts.* (Extras din *Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique de Timişoara).* 1935.

G. D. SIMIONESCU. *Sur les triangles trihomologiques et triorthologiques.* (Extras din *Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'École Polytechnique «Roi Carol II»).* Bucureşti 1936.

GH. GH. VASILIU. *Zur Theorie rechtwinkliger geodetischer Koordinaten.* (Extras din *Bulletin de Mathématiques et de Physique de l'École Polytechnique «Roi Carol II).* Bucureşti 1936.

CERERI

258. Pentru a se ţine minte un număr mai mare de zecimale pentru valoarea lui π sunt date în diferite limbi procedee mnemotecnice, cum e de exemplu în Nota 1 din *Géométrie* I pag. 180 a lui HADAMARD. S'a încercat în limba română asemenea mijloace?

C. SANDULACHE.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

H. LAURENT. L'élimanation. Paris 1900.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

V. JAMET. Essai d'une nouvelle théorie élémentaire des logarithmes. Paris 1888.

Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

G. GOTTGETREU: Hochbau-Konstruktionen.

I. Berlin 1880.
III. „ 1885.
IV. „ 1888.

Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

Festschrift zur Feier des 25 jährigen Bestehns der Gesellschaft ehemaliger Studierender der Eidgenössischen polytechnischen Schule in Zürich.

Zürich, 1894.

Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

A. DEBAUX. Manuel de l'ingénieur des ponts et chaussées.

16 Fascicule-texte.
Traité des eaux 2-e partie.
Distributions d'eau. Paris 1875.

Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

Dr. CARL MAX VON BAURNFEIND. Elemente der Vermessungskunde. I Band. Stuttgart, 1879.

Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

Dr. E. F. v. GORUP-BESANES. Lehrbuch der Chemie.

II. Band. Braunschweig 1881.
III. „ „ 1878.

Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

THÉODOR CHATEAU. Technologie du Batiment.

I. Paris 1863.
II. „ 1866.

Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4024. *Unde trebue să se găsească unul din vârfurile unui patrulater convex, mijloacele laturilor căruia sunt fixe, astfel ca acest patrulater să fie inscriptibil.*

N. CIORĂNESCU.

I. *Soluție* dată de D-l ADRIAN C. GHEORGHIU.

Fie $M_1M_2M_3M_4$ paralelogramul mijloacelor fixe ale laturilor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1. Un patrulater $A_1A_2A_3A_4$ satisfăcând enunțului se construește cum urmează:

Duc prin M_1, M_2 și M_3, M_4 cercuri egale de centre O_{12} și O_{34} respectiv de aceeași parte a dreptelor M_1M_2 și M_3M_4. (Poziții translatate). Aceste cercuri se taie în U și U'. Paralela prin U la M_2M_3 taie a doua oară cercurile O_{12} și O_{34} respectiv în A_2 și A_4. Simetricul lui A_2 față de M_2 și al lui A_4 față de M_3 se confundă în A_3 căci:

$$UA_2 = UA_4 = O_{12}O_{34} = M_2M_3.$$

deci

$$A_2A_4 \# 2M_2M_3$$

analog se obține A_1. Acest patrulater $A_1A_2A_3A_4$ astfel obținut e inscriptibil căci unghiurile din A_2 și A_4 sunt suplimentare. Analog cu punctul U' se obține alt patrulater $A_1A_2A_3A_4$.

Se observă că începând construcția cu cercuri egale descrise prin M_2, M_3 și M_4, M_1, obținem puncte V și V' al căror loc este acelaşi cu al punctelor U și U'. In adevăr un punct U poate fi și un punct V sau V' căci cercurile UM_2M_3 și UM_4M_1 sunt egale fiind respectiv egale cu cercurile O_{12} și O_{34} (cercuri circumscrise la triunghiuri egale).

Găsind deci locul punctelor U și U' deducem locurile vârfurilor A_1, A_2, A_3, A_4 ale patrulaterului, respectiv prin translațiile

$$M_2M_1,\ M_3M_2,\ M_2M_3,\ M_1M_2.$$

Fie M_1M_2 axa x-ilor, originea fiind O mijlocul segmentului M_1M_2 și fie perpendiculara în O pe M_1M_2 axa y-ilor. Fie:

$$M_2(a, 0)\ ,\ O_{12}(0, \lambda).$$

Ecuația cercului O_{12} este:

$$(1) \qquad x^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + a^2$$

sau și trecând la coordonate omogene:

$$(1') \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda yz - a^2 z^2 = 0$$

ρ și θ fiind mărimea și direcția translației M_2M_3, avem:

$$O_{34}(\rho\cos\theta \ , \ \lambda + \rho\sin\theta).$$

Ecuația cercului O_{34} este:

$$(2) \quad (x - \rho\cos\theta)^2 + (y - \lambda - \rho\sin\theta)^2 = \lambda^2 + a^2$$

sau în coordonate omogene:

$$x^2 + (y - \lambda z)^2 - 2\rho xz\cos\theta - 2\rho(y - \lambda z)z\sin\theta + \rho^2 z^2 = (\lambda^2 + a^2)z^2$$

Eliminând parametrul λ între ecuațiile celor două cercuri obținem locul punctelor U și U'.

Ținând seama de (1), omogenizată, din (2') scoatem:

$$(3) \qquad 2\lambda = \frac{2x\cos\theta + 2y\sin\theta - \rho z}{z\sin\theta}.$$

Ducând această valoare în (1') obținem ecuația locului:

$$(4) \quad (x^2 - y^2)\sin\theta - 2xy\cos\theta + \rho yz - a^2 z^2 \sin\theta = 0$$

cu condiția $z\sin\theta \neq 0$, adică trebue să avem $\theta \neq 0$ și se exclud punctele dela infinit.

Locul e o hiperbolă echilateră ce trece prin

$$M_1(-a, 0) \ , \ M_2(a, 0) \ , \ M_3(a + \rho\cos\theta \ , \ \rho\sin\theta),$$

$$M_3(-a + \rho\cos\theta \ , \ \rho\sin\theta)$$

cum se constată ușor pe formula (4), sau se observă că toate aceste puncte pot deveni puncte U: determinăm un cerc (O_{12}) de exemplu, cu punctul M_3, evident că atunci unul din punctele de intersecție ale lui (O_{12}) și corespunzătorului (O_{34}) este M_3.

Ecuațiile centrului conicei (4) sunt:

$$(5) \qquad \begin{cases} x\sin\theta - y\cos\theta = 0 \\ x\cos\theta + y\sin\theta = \dfrac{\rho}{2} \end{cases}$$

De unde

$$x_0 = \tfrac{1}{2}\rho\cos\theta \ , \ y_0 = \tfrac{1}{2}\rho\sin\theta ,$$

adică centrul hiperbolei echilatere (4) este centrul paralelogramului $M_1M_2M_3M_4$.

Direcțiile asimptotice sunt date de:

(6) $$m^2\sin\theta + 2m\cos\theta - \sin\theta = 0.$$

De unde

$$m' = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$m'' = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\frac{\theta}{2} .$$

Deci direcțiile asimptotice sunt bisectoarele unghiului

$$\theta = (M_1M_2 \ , \ M_2M_3).$$

Observație. Acest loc al punctelor U și U' este tot una cu locul centrelor cercurilor circumscrise patrulaterelor din enunț. Căci U' de ex. este centrul cercului circumscris patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$ construit cu punctul U, fiind diametral opus lui A_3 și A_4 respectiv în cercurile egale (O_{12}) și (O_{34}) în care avem $A_2UA_4 \parallel O_{12}O_{34}$.

II. *Soluție* dată de D-l JUSTIN A. AURIAN:

Scriu în coordonate rectangulare mijloacele fixe ale laturilor patrulaterului astfel:

(1) $$O(0,0) \ , \ M(\sigma,0) \ , \ N(\beta,\gamma) \ , \ P(\alpha+\beta,\gamma)$$

axa Ox fiind OM, iar axa Oy fiind perpendiculara în O pe OM.

(2) Fie $A(x,y)$ un vârf al patrulaterului, celelalte vârfuri sunt:

$$B(-x,-y) \ , \ C(2\alpha+x,y) \ , \ D(2\beta-x \ , \ 2\gamma-y).$$

Patrulaterul ABCD fiind inscriptibil avem:

(3) $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

(4) $$(x+a)^2 + (y+b)^2 = R^2$$

(5) $$(2\alpha+x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

(6) $$(2\beta-x-a)^2 + (2\gamma-y-b)^2 = R^2.$$

Intre cari eliminând parametrii a, b, R obţinem locul geometric al vârfului A.

Eliminând pe R între (3) şi (4), între (4) şi (6), între (3) şi (5) obţinem

$$ax + by = 0 \tag{7}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 - \beta x - \gamma y - \beta a - \gamma b = 0 \tag{8}$$

$$\alpha + x - a = 0. \tag{9}$$

Intre cari eliminând pe a şi b obţinem:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ -\beta & -\gamma & \beta^2+\gamma^2-\beta x-\gamma y \\ -1 & 0 & \alpha+x \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

sau

$$\gamma x^2 - \gamma y^2 - 2\beta xy + \alpha\gamma x - (\beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta)\, y = 0. \tag{11}$$

Locul este deci o conică şi anume o hiperbolă echilateră.

Coordonatele centrului sunt:

$$x_0 = \frac{\beta - \alpha}{2}\ ,\ y_0 = \frac{\gamma}{2}\ . \tag{12}$$

Unghiul φ făcut de axa reală a hiperbolei cu axa Ox este dat de:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\beta}{\gamma}\ . \tag{13}$$

Pentru a obţine forma redusă avem, notaţiile fiind cele obişnuite:

$$S_1 + S_2 = 0\ ,\ S_1 - S_2 = -\sqrt{4\gamma^2 + 4\beta^2} = -2l \tag{14}$$

notând cu l lungimea laturii ON a paralelogramului. Deci:

$$S_1 = l\ ,\ S_2 = -l. \tag{15}$$

Iar:

$$\frac{\Delta}{\delta} = F'_z(x_0, y_0, 1) = \alpha\gamma\frac{\beta-\alpha}{2} + (\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta)\frac{\gamma}{2} \tag{16}$$

$$= \frac{\gamma}{2}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2) = \frac{\gamma}{2}(l^2-\alpha^2)\ .$$

Deci ecuaţia redusă este:

$$(17) \qquad x^2 - y^2 - \frac{\gamma}{2l}(l^2 - \alpha^2) = 0.$$

Notă: Problema are şi o soluţie geometrică.

Locul centrelor conicelor circumscrise patrupunctului $A_1A_2A_3A_4$ este „conica celor nouă puncte". Cum $A_1A_2A_3A_4$ este inscriptibil această conică se ştie că este o hiperbolă echilateră H, care trece prin punctele:

1°. Vârfurile P, Q, R, ale triunghiului diagonal al patrupunctului:

2°. Mijloacele M_1, M_2, M_3, M_4 ale laturilor A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 ale patrupunctului.

3°. Mijloacele N_1, N_2 ale diagonalelor A_1A_3, A_2A_4.

In cazul nostru hiperbola echilateră e perfect determinată de punctele dela 2°, date

Avem în vectori:

$$\overline{N_1A_1} = -\overline{M_1M_2}$$

$$\overline{N_1A_3} = \overline{M_1M_2}$$

$$\overline{N_2A_2} = -\overline{M_2M_3}$$

$$\overline{N_2A_4} = \overline{M_2M_3}.$$

Cum punctele N_1 şi N_2 descriu hiperbola H fixată, rezultă că locurile geometrice ale vârfurilor A_1, A_2, A_3, A_4 sunt hiperbole echilatere H_1, H_2, H_3, H_4 obţinute din H respectiv prin translaţiile

$$-\overline{M_1M_2}, -\overline{M_2M_3}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_2M_3}.$$

N. C.

PROBLEMA 4154. *Fie* ABC *un triunghiu. In afara triunghiului* ABC *se deduce* BR *perpendicular pe* BC *şi egal cu* BC, BQ *perpendicular pe* AB *şi egal cu* AB, AM *perpendicular pe* AC *şi egal cu* AC. *Se notează cu* P *simetricul punctului* A *în raport cu* C.

Să se dovedească, că diagonalele patrulaterului MQRP *sunt egale şi perpendiculare.*

Să se arate că aria patrulaterului MQRP *este egală cu* $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 4S$, S *fiind aria triunghiului* ABC.

Să se deducă lungimile segmentelor MR *şi* PQ *în funcţie de elementele triunghiului* ABC.

D. V. IONESCU.

Soluţie. Pentru a fixa ideile să presupunem că triunghiul ABC are toate unghiurile ascuţite.

1°. Notăm cu α şi β unghiurile BCQ şi BAR.

Din egalitatea triunghiurilor BQC, BAR rezultă că AR = CQ şi că

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^0 - (90^0 + \hat{B}) = 90^0 - \hat{B}.$$

Unghiurile MAR , PCQ sunt egale pentru că

$$\sphericalangle MAR - \sphericalangle PCQ = 90^0 + \hat{A} - \hat{\beta} - (180^0 - \hat{C} + \hat{\alpha})$$

$$= \hat{A} + \hat{C} - 90^0 - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})$$

$$= 90^0 - \hat{B} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = 0.$$

Rezultă că triunghiurile QCP, RAM sunt egale şi deci segmentele RM şi PQ sunt egale şi perpendiculare.

2° şi 3°. Patrulaterul MQRP fiind cu diagonalele egale şi perpendiculare, aria lui S_1 este dată de formula

$$2S_1 = \overline{MR}^2 = \overline{QP}^2 .$$

Calculând aria S_1, prin aceasta s'a calculat şi MR şi QP în funcţie de elementele triunghiului ABC.

Din triunghiul AMR rezultă că

$$\overline{MR}^2 = b^2 + \overline{AR}^2 - 2b\,AR \cos (90^0 + \hat{A} - \hat{\beta}) .$$

Proecţia lui AR pe AM este egală cu proecţia lui CQ pe AC. Deci

$$- AR \cos (90^0 + \hat{A} - \hat{\beta}) = c \sin A + a \cos C.$$

Pe de altă parte din triunghiul ABR avem

$$\overline{AR}^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos (90^0 + B)$$

şi deci

$$\overline{MR}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ac \sin B + 2b\,(c \sin A + a \cos C.$$

Insă

$$ac \sin B = bc \sin A = 2S$$

$$2ba \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

aşa că

$$\overline{MR}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 8S + a^2 + b^2 - c^2$$

adică

$$\overline{MR}^2 = \overline{QP}^2 = 2(a^2 + b^2 + 4S)$$

şi

$$S_1 = a^2 + b^2 + 4S.$$

Soluţie analitică. Se alege ca axă Ox dreapta BC şi ca axă Oy perpendiculara dusă din A pe BC. Fie $(0, \alpha)$, $(\beta, 0)$, $(\gamma, 0)$ coordonatele punctelor A, B, C.

Se verifică uşor că coordonatele punctelor M, P, Q, R sunt

$$(\alpha, \gamma + \alpha) , (2\gamma, -\alpha) , (\beta, \beta - \gamma) , (\beta - \alpha, -\beta).$$

Se vede imediat că

$$\overline{MR}^2 = \overline{QP}^2 = (\alpha - \beta)^2 + (2\gamma + \alpha - \beta)^2$$

şi că produsul coeficienţilor unghiulari ai dreptelor QP şi MR este — 1.

Au rezolvat problema D-nii: V. CEAUŞESCU, Liceul Militar Iaşi; CEZAR IVĂNESCU, student, Iaşi; N. N. MIHĂILEANU, Constanţa; I. C. PARAPEANU Bucureşti; I. I. PETRESCU ; IANCU N. SAGER.

PROBLEMA 4186. *Fie* C *un cerc dat de centru* O. *Să se determine un cerc concentric cercului* C *şi interior lui, astfel ca pentru orice punct* A *luat în interiorul lui să avem:*

$$\frac{AO}{AB} < \alpha,$$

oricare ar fi punctul B *exterior cercului* C.

D. V. IONESCU.

Soluţie. Descriem din O un cerc de rază r şi luăm punctul A în interiorul acestui cerc. Avem:

$$\frac{AO}{AB} < \frac{r}{AB}.$$

Dar B fiind exterior cercului C de rază R şi exterior şi cercului de rază r, avem:

$$AB > OB - r > R - r.$$

şi deci:

$$\frac{AO}{AB} < \frac{r}{R-r}.$$

Dacă luăm:

$$\frac{r}{R-r} = \alpha,$$

adică:

$$r = \frac{\alpha R}{1+\alpha} < R,$$

atunci toate punctele cercului de rază r, corespund la condiţia

$$\frac{AO}{AB} < \alpha.$$

Ducem o rază care tae cercul mic în A_1 şi cercul mare în B_1. Pentru punctele A_1 şi B_1 avem:

$$\frac{A_1O}{A_1B_1} = \frac{r}{R-r} = \alpha.$$

Au rezolvat problema: D-l Prof. IANCU N. SAGER din R. Sărat; GEORGE SILAŞ, student Cluj şi D-nii: ALEX. D. STOICA, elev Lic. Marele Voevod Mihai, Bucureşti; MĂNESCU MIRCEA, elev Lic. M. Eminescu, Bucureşti; ZIFF S. MARTIN.

PROBLEMA 4321. *Să se găsească cubul de cinci cifre* dmszu *în care numerele de câte două cifre* dm *şi* zu *sunt consecutive.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie N numărul căutat şi x un număr de două cifre aşa încât să avem una din egalităţile:

(1) $N^3 = 1001 \times x + 100s + 1$

$$= 7 \times 11 \times 13 \times x + 7 \times 13 \times s + 9s + 1.$$

(2) $N^3 = 1001 \times (x+1) + 100s + 1$

$$= 7 \times 11 \times 13 \times (x+1) + 7 + 13 \times s + 9s - 1.$$

Prima egalitate corespunde cazului

$$dm + 1 = zu$$

cea de-a doua cazului

$$zu + 1 = dm.$$

Faţă de divizorul 13, un cub N^3 poate fi numai de formele:

$$(\alpha) \quad 13 \times m \ , \quad 13 \times m \pm 1 \quad \text{sau} \quad 13 \times m \pm 5$$

ceeace se poate găsi uşor divizând prin 13 cuburile numerelor de la 0 la 12 iuclusiv. Corespondenţa între formele lui N^3 şi N (şi reciproc) faţă de divizorul 13 este dată de următorul tabel:

N	13η	$13\eta \pm 1$; $13\eta \pm 3$; $13\eta \pm 4$	$13\eta \pm 2$; $13\eta \pm 5$; $13\eta \pm 6$
N^3	$13m$	$13m \pm 1$	$13m \pm 5$

Dând lui s în (1) valorile $0, 1, \ldots, 9$ se găseşte că N^3 este de una din formele (α) numai pentru

$$c = 0, 7, 8.$$

La fel din (2) se găseşte că c poate fi numai

$$c = 0, 1, 2, 3 \text{ sau } 6.$$

Cu aceste valori şi ţinând seamă de tabloul precedent şi de $21 < N < 47$, rezultă că N poate fi unul din următoarele numere:

22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43

din care se elimină cele terminate cu 0 ale căror cuburi ar trebui să fie de forma $01\,0\,00$ pentru a fi soluţii. Ridicând restul de 15 numere la cub se găseşte că singura soluţie este:

$$44^3 = 85184.$$

Observaţiuni. 1°. Pentru cazul particular al problemei metoda indicată elimină ridicarea la cub a următoarelor 7 numere 24, 33, 34, 37, 44, 45 şi 46; ceeace este o simplificare de mică importanţă. Dar valoarea simplificărei se simte mult în alte cazuri de probleme de asemenea natură, de aceea o recomandăm reflecţiunei corespondenţilor noştri.

2°. Au găsit soluţia exactă ridicând la cub toate numerele dela 22 la 46, D-nii: NEGREA A. M. L. (Brăila) şi CEAUŞESCU V. (Liceul militar, Iaşi).

3°. Au utilizat tabelele de terminaţiuni ale unui cub perfect, D-nii: PREDOESCU I. M. (Şcoala Politechnică, Bucureşti); PROCOPIESCU M., NĂSTASE M. (Liceul militar, Târgovişte) şi G. CARDARA (Corabia).

4°. D-nii: D. D. MAVRODIN şi P. C. MAZILU s'au servit de tabla de cuburi ceeace nu e un metod de rezolvare.

5. D-nii COANDĂ I. V. şi POSTELNICESCU M. (dela acelaş liceu militar) au interpretat enunţul că *fiecare* din numerele *dm* şi *zu* au în parte cifrele consecutive şi au găsit soluţia:

$$23^3 = 12\,1\,67.$$

6°. Iată şi o soluţie pentru interpretarea că *dm* şi *zu* sunt formate din cifre consecutive:

$$24^3 = 13\,8\,24.$$

G-L GH. B.

PROBLEMA 4386. *Se consideră polinoamele*

$$P(x) = x^2 + ax + b \quad \text{şi} \quad Q(x) = x^2 + px + q,$$

şi se notează cu x_1, x_2 *rădăcinile ecuaţiei*

$$(1) \qquad P(x) = 0.$$

1. Să se formeze ecuaţia de gr. II care are drept rădăcini pe

$$Q(x_1) \quad \text{şi} \quad Q(x_2).$$

2. Să se deducă de aci condiţia ca ecuaţiile

$$P(x) = 0 \quad \text{şi} \quad Q(x) = 0,$$

să aibă o rădăcină comună.

3. Să se deducă ecuaţia care are drept rădăcini pătratele rădăcinilor ecuaţiei (1).

4. Presupunând $p = 0$ *şi pe* b *şi* q *cunoscuţi să se determine* a *aşafel încât să avem*

$$Q^2(x_1) + Q^2(x_2) + \alpha\, Q(x_1)\, Q(x_2) = 0.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

Soluţie dată de D-nii: NEGREA A. MIRCEA-LEONTE (Brăila) şi N. D. ŞTEFĂNESCU (Liceul militar Mânăstirea Dealului).

1°. x_1 şi x_2 fiind rădăcinile ecuaţiei (1), avem:

$$x_1 + x_2 = -a \quad , \quad x_1 x_2 = b.$$

Cu ajutorul acestor două relații avem succesiv

$$Q(x_1) + Q(x_2) = (x_1^2 + x_2^2) + p(x_1 + x_2) + 2q$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (p - 2)(x_1 + x_2) + 2q = 2(q - b) - a(p - a)$$

$$Q(x_1)\,Q(x_2) = x_1^2 x_2^2 + q(x_1^2 + x_2^2) + p x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

$$+ p^2 x_1 x_2 + pq(x_1 + x_2) + q^2 = (q - b)^2 + (p - a)(bp - aq).$$

Ecuația care are drept rădăcini pe $Q(x_1)$ și $Q(x_2)$ este deci:

$$(2)\quad z^2 - [2(q-b) - a(p-a)]z + (q-b)^2 + (p-a)(bp-aq) = 0.$$

2°. Trebue ca să avem $Q(x_1) = 0$ sau $Q(x_2) = 0$, adică ecuația în z dela Nr. 1 să aibă o rădăcină nulă. Deci condiția cerută este

$$(q - b)^2 + (p - a)(bp - aq) = 0.$$

3°. Facem în ecuația în z: $p = q = 0$. Ecuația cerută este

$$z^2 - (a^2 - 2b)z + b^2 = 0.$$

4°. Dacă $p = 0$, ecuația în z devine

$$(2')\quad z^2 - [2(q - b) + a^2]z + (q - b)^2 + a^2 q = 0$$

ale cărei rădăcini să le notăm cu z_1 și z_2. Va trebui să avem

$$z_1^2 + z_2^2 + \alpha z_1 z_2 = 0.$$

Folosind relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației (2') această ecuație se mai scrie

$$[2(q - b) + a^2]^2 + (\alpha - 2)[(q - b)^2 + a^2 q] = 0$$

care ordonată după puterile lui a se scrie

$$a^4 - [4b - (\alpha + 2)q]a^2 + (\alpha + 2)(q - b)^2 = 0$$

și care are ca rădăcini

$$a = \pm\sqrt{\frac{4b - (\alpha + 2)q \pm \sqrt{(\alpha - 2)[q^2(\alpha + 2) - 4b^2]}}{2}}.$$

Discuția este simplă.

Notă. Din 21 de soluții primite numai a D-lor NEGREA și ȘTEFĂNESCU a fost complectă. Din celelalte merită să fie menționate soluțiile D-rei GELA BĂLĂCEANU și ale D-lor C. BUDEANU, W. CSEKE, P. D. DOBRESCU, D. MAVRODIN, P. C. MAZILU și I. N. SAGER.

GH. TH. GH.

PROBLEMA 4401. *Să se calculeze suma seriei*

$$S_{p,m}(x) = K_p^m + K_p^1 K_p^{m+1} x^2 + \ldots + K_p^n K_p^{m+n} x^{2n} + \ldots ,$$

K_p^r *reprezentând numărul combinărilor cu repetiţie a* p *obiecte luate câte* r.

Pentru ce valori ale lui x *suma aceasta există?*

Numărul K_p^r *este dat de formula*

$$K_p^r = \frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{r!} .$$

M. GHERMĂNESCU.

Prima soluţie. Teorema raportului ne dă limita x^2, deci seria este uniform convergentă pentru $|x| < 1$.

Pentru însumare, observăm că

$$K_p^r = C_{p+r-1}^r = C_{p+r-1}^{p-1}$$

astfel că seria dată se mai poate scrie

$$S_{p,m}(x) = C_{p+m-1}^{p-1} + C_p^{p-1} C_{p+m}^{p-1} x^2 + \ldots + C_{p+n-1}^{p-1} C_{p+m+n-1}^{p-1} x^{2n} + \ldots$$

Să considerăm, pe de altă parte, desvoltarea

$$(1-t)^{-p} = 1 + C_p^{p-1} t + C_{p+1}^{p-1} t^2 + \ldots + C_{p+n-1}^{p-1} t^n + \ldots$$

Seria din membrul al doilea este absolut şi uniform convergentă pentru $|t| < 1$. Acelaşi lucru constatăm şi despre seriile obţinute derivând-o, termen cu termen.

Inmulţind deci ambii membri prin t^{m+p-1} şi derivând de $p-1$ ori, vom obţine

$$\left[\frac{t^{m+p-1}}{(1-t)^p}\right]^{(p-1)} = A_{m+p-1}^{p-1} t^m + C_p^{p-1} A_{p+m}^{p-1} t^{m+1} + \ldots$$

de unde

$$(1)\quad \frac{1}{(p-1)!\, t^m}\left[\frac{t^{m+p-1}}{(1-t)^p}\right]^{(p-1)} = C_{p+m-1}^{p-1} + C_p^{p-1} C_{p+m}^{p-1} t + \ldots + C_{p+n-1}^{p-1} C_{p+m+n-1}^{p-1} t^n + \ldots$$

iar seria din membrul al doilea devine, pentru $t = x^2$, seria propusă.

Să calculăm valoarea explicită a primului membru. De oarece

$$[(1-t)^{-p}]^{(k)} = p(p+1)\ldots(p+k-1)(1-t)^{-p-k},$$

vom obține, aplicând formula lui LEIBNITZ,

$$\frac{1}{(p-1)!\,t^m}\left[\frac{t^{m+p-1}}{(1-t)^p}\right]^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{C_{p+i-1}^{i}\, C_{m+p-1}^{p-i-1}\, t^i}{(1-t)^{p+i}}$$

deci

$$(1-x^2)^{2p-1} S_{p,m}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} C_{p+i-1}^{i}\, C_{m+p-1}^{p-i-1}\, x^{2i}\,(1-x^2)^{p-i-1}.$$

Rezultatul obținut arată că produsul seriei date prin $(1-x^2)^{2p-1}$ este un polinom de gradul $p-1$ în x^2. Anulând coeficienții puterilor lui x^2, mai mari ca $p-1$, în acest produs, vom obține identitățile, valabile pentru $n \geqslant p$,

$$(\alpha)\quad C_{p+n-1}^{p-1} C_{p+m+n-1}^{p-1} - C_{2p-1}^{1} C_{p+n-2}^{p-1} C_{p+m+n-2}^{p-1} + C_{2p-1}^{2} C_{p+n-3}^{p-1} C_{p+m+n-3}^{p-1} - \ldots = 0$$

care arată că diferențele de ordinul $2p-1$ ale termenilor șirului

$$U_n = C_{p+n-1}^{p-1} C_{p+m+n-1}^{p-1}, \quad n \geqslant p$$

sunt nule.

Soluția a doua. Să punem, pentru prescurtare, $x^2 = t$. Seria fiind divergentă pentru $|t| = 1$, vom determina un număr λ astfel încât seria

$$(1-t)^{\lambda} S_{p,m}(\sqrt{t})$$

să fie convergentă pentru $t = 1$. Dacă λ este întreg, produsul de mai sus trebue să se reducă la un polinom. Identitatea (α) de mai sus arată că putem lua $\lambda = 2p-1$ și regăsim astfel rezultatul dela prima soluție.

Notă. D-l MAVRODIN D. (student) a trimis o soluție analoagă primei, dar s'a oprit la relația (1).

M. G.

PROBLEMA 4567. *Să se arate dacă inegalitatea:*

$$a_{p-1} < a_p + a_{p+1}$$

poate exista în cazul când a_{p-1} , a_p , a_{p+1} *sunt respectiv laturile a trei poligoane regulate de* $p-1$, p , $p+1$ *laturi, înscrise toate în acelaşi cerc de rază* R.

LOCOT. COMANDOR GH. NICULESCU.

Soluţie dată de Domnişoara ALEXANDRA AL. VASILESCU (cl. VII, Liceul «Carmen Sylva» Timişoara).

Să notăm cu t_{p-1} , t_p , t_{p+1} apotemele poligoanelor. Avem:

$$\text{I} \begin{cases} \dfrac{1}{4}a_{p-1}^2 = R^2 - t_{p-1}^2 \qquad \dfrac{1}{4}a_{p+1}^2 = R^2 - t_{p+1}^2 \\ \dfrac{1}{4}a_p^2 = R^2 - t_p^2 \qquad a_p \cdot a_{p+1} = 4\sqrt{(R^2 - t_p^2)(R^2 - t_{p+1}^2)} \end{cases}$$

$$\text{II} \qquad t_{p-1} < t_p < t_{p+1} < R.$$

Să ridicăm inegalitatea din enunţ la pătrat şi să facem înlocuirile din (I).

Obţinem:

$$R^2 - t_{p-1}^2 < R^2 - t_p^2 + R^2 - t_{p+1}^2 + 2\sqrt{(R^2 - t_p^2)\,(R^2 - t_{p+1}^2)}$$

a fortiori vom avea:

$$R^2 - t_{p-1}^2 < R^2 - t_p^2 + R^2 - t_{p+1}^2 + 2\sqrt{R^2 \cdot R^2}$$

$$\therefore \quad 3R^2 + t_{p-1}^2 > t_p^2 + t_{p+1}^2$$

inegalitate adevărată, ţinând seamă de (II).

Soluţie trigonometrică dată de D-l MIRCEA LEONTE A. NEGREA (Brăila).

Se deduce uşor că:

$$a_p = 2R \sin\frac{\pi}{p} \; ; \; a_{p-1} = 2R \sin\frac{\pi}{p-1} \; ; \; a_{p+1} = 2R \sin\frac{\pi}{p+1}$$

încât inegalitatea devine:

$$\sin\frac{\pi}{p-1} < \sin\frac{\pi}{p} + \sin\frac{\pi}{p+1}. \qquad (1)$$

Considerăm inegalitatea:

$$\frac{\pi}{p-1} < \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{p+1} \qquad (2)$$

care rezolvată duce la condiția $p > 3$, adică tocmai cazul poligoanelor. Unghiurile fiind toate pozitive și în primul cadran, deduc din (2):

$$\sin\frac{\pi}{p-1} < \sin\left(\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{p+1}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{p-1} < \sin\frac{\pi}{p}\cos\frac{\pi}{p+1} + \sin\frac{\pi}{p+1}\cos\frac{\pi}{p} .$$

Dar $\cos\frac{\pi}{p+1}$ și $\cos\frac{\pi}{p}$ sunt pozitivi și inferiori lui unu, deci vom avea cu atât mai mult:

$$\sin\frac{\pi}{p-1} < \sin\frac{\pi}{p} + \sin\frac{\pi}{p+1} .$$

c. c. t. d. d.

Soluție dată de D-l EUGEN MARCOVICI (Iași).

Insemnăm cu P_{p-1}, P_p, P_{p+1}, perimetrele poligoanelor. Avem:

$$P_{p-1} < P_p \text{ și } P_{p-1} < P_{p+1} \quad \therefore \quad 2P_{p-1} < P_p + P_{p+1} .$$

Impărțim inegalitatea prin $2(p-1)$, care în cazul problemei este totdeauna pozitiv:

$$\frac{P_{p-1}}{p-1} < \frac{P_p}{2(p-1)} + \frac{P_{p+1}}{2(p-1)} .$$

Dar în cazul poligoanelor ($p > 3$) avem și $2(p-1) > p+1 > p$ și ca atare vom avea și:

$$\frac{P_{p-1}}{p-1} < \frac{P_p}{p} + \frac{P_{p+1}}{p+1}$$

c. c. t. d. d.

EXERCIȚII

39. In triunghiul ABC, de ortocentru H, fie A'_0 diametral opus lui A în cercul circumscris și A''_0 proiecția lui A'_0 pe BC — B''_0, C''_0 puncte analoage. — Fie A_b, A_c intersecția paralelelor duse prin B și C la AH cu AC, AB. — B_c, B_a, C_a, C_b punctele analoage.—Perpendicularele din A''_0, B''_0, C''_0 respectiv pe A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b concură în H.

N. N. MIHĂILEANU.

R. A''_0, B''_0, C''_0 sunt izotomicele picioarelor înălțimilor și A''_0 H e perpendiculară pe A_b A_c [G. M. XXXVI, 323].

40. Intr'un triunghiu ABC, fie I, I_a, I_b, I_c cercurile tritangente. Cercul BII_aC taie din nou laturile AC, AB în A_b, A_c. Să se arate că A_bA_c este tangentă comună cercurilor I, I_a și că trece prin piciorul bisectoarei interioare din A.

N. N. MIHĂILEANU.

R. $AA_b \cdot AC = AA_c \cdot AB = AI \cdot AI_a = AB \cdot AC$

$$\therefore \quad AA_b = AB\,,\ AA_c = AC$$

triunghiurile ABC, AA_b A_c fiind egale, prin poziția lor admit un același cerc înscris și exînscris relativ la A.

41. Centrele I_a, I_b, I_c ale cercurilor exînscrise se proiectează pe dreapta OI care unește centrele cercului circumscris și înscris în M_a, M_b, M_c.

$$I_a M_a + I_b M_b + I_c M_c = 0.$$

N. N. MIHĂILEANU.

R. OI trece prin centrul de greutate al triunghiului I_a I_b I_c [F. G. M. § 462 pag. 229].

42. In triunghiul ABC, fie (A_1), (B_1), (C_1) un sistem de cercuri MALFATTI cercurile înscrise în triunghiurile ABC, $A_1B_1C_1$ sunt concentrice.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Cercul înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$ este centrul radical al cercurilor considerate căci perpendicularele duse din el sunt tangente interioare cercurilor două câte două. Insă într'un sistem de cercuri MALFATTI, centrul cercului înscris în triunghiul ABC este centrul lor radical; de altfel I este centrul de omologie al triunghiurilor considerate.

PROBLEME PROPUSE

4687. Un baston are o tijă rectilinie terminată la un cap cu un mâner semicircular. Care este poziția de echilibru când îl punem într'un cuiu? In ce caz vârful liber cade pe verticala cuiului? Aceleaşi probleme dacă capătul semicircular se aşează pe cuiu. Se va neglija efectul grosimii şi frecările pe cuiu.

I. IONESCU.

4688. Să se găsească un sistem de numeraţie a cărui bază să fie un număr întreg şi în care numărul abc — care de asemenea se cere a se afla — să se poată scrie cba.

AL. A. ROŞU.

4689. Să se demonstreze, că, dacă primii trei termeni ai şirului lui FIBONACCI sunt:

$$u_1 = u_2 = 1 \ , \ u_3 = 2,$$

atunci

$$u_{60t} = 10m \ , \ u_{60t+1} = 10m + u_1 \ , \ u_{60t+2} = 10m + u_2 \ , \ldots ,$$

unde m şi t sunt numere întregi.

G-L GH. BUICLIU.

4690. Să se demonstreze că dacă cercul circumscris şi cercul celor nouă puncte al unui triunghiu ABC se taie sub 120^0, atunci:

1°. Raza unuia din cercurile tritangente triunghiului ortic A'B'C' este triplul razei cercului circumscris triunghiului ABC;

2°. Dreapta care uneşte ortocentrul cu punctul lui LEMOINE este paralelă cu dreapta lui EULER a triunghiului ortic.

3°. Ortocentrul triunghiului ortic este centrul cercului lui BROCARD al triunghiului ABC.

4°. Suma distanţelor centrului celor nouă puncte la laturile triunghiului A'B'C' este egală cu raza cercului circumscris triunghiului fundamental.

V. THÉBAULT.

4691. Intr'un triunghiu ABC, punctul I fiind intersecţia cevienelor AA', BB', CC', să se stabilească identitatea:

$$\sum \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} = 2 + \prod \frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}} \cdot$$

ADRIAN GHEORGHIU.

4692. Fie A'B'C' triunghiul complimentar al triunghiului de referinţă ABC, H ortocentrul lui şi M, N, P punctele unde cercurile descrise pe $\overline{AH}$, $\overline{PH}$, $\overline{CH}$ ca diametre intersectează a doua oară cercul circumscris.

Să se arate, că triunghiurile A'B'C' şi MNP sunt omologice şi că picioarele cevienelor AM, BN, CP sunt trei puncte colineare.

THEODOR GH. COCEA.

4693. Se dă ecuaţiunea:

$$f(x) \equiv x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = 0.$$

a) Să se formeze ecuaţiunea F (y), care are ca rădăcini pătratele diferenţelor rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = 0$;

b) Să se arate că ecuaţiunea F (y) are o singură rădăcină negativă, din care să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiunii $f(x) = 0$;

c) Să se determine rădăcina negativă a ecuaţiunii F $(y) = 0$ prin metoda rădăcinilor întregi, cu ajutorul căreia, să se rezolve apoi complet ecuaţiunea $f(x) = 0$.

M. GHERMĂNESCU.

4694. Dacă A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu, avem relaţia:

$$\sin\frac{\pi}{5} \cdot \sum \sin\frac{A}{10} + \cos\frac{\pi}{5} \cdot \sum \cos\frac{A}{10} + \cos\frac{\pi}{10}$$

$$= 4 \sin\frac{3\pi}{20} \cdot \sin\frac{A}{20} \sin\frac{B}{20} \sin\frac{C}{20} + 4 \cos\frac{3\pi}{20} \cos\frac{A}{20} \cos\frac{B}{20} \cos\frac{C}{20} \cdot$$

L-T. C. IONESCU-ŢIU.

4695. Se consideră un punct M în interiorul unui triunghiu ABC. Se notează:

$$(AB\ ,\ AM) = \varphi_1\ ;\ (BC\ ,\ BM) = \varphi_2\ ;\ (CA\ ,\ CM) = \varphi_3\ .$$

Să se demonstreze relația:

$$\operatorname{cotg}\varphi_1 \cdot \operatorname{cotg}\varphi_2 \cdot \operatorname{cotg}\varphi_3 - \Sigma \operatorname{cotg}A \cdot \operatorname{cotg}\varphi_2 \cdot \operatorname{cotg}\varphi_3 + \Sigma \operatorname{cotg}A \operatorname{cotg}B \operatorname{cotg}\varphi_3 = \operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4696. Avem un vas cilindric plin pe jumătate cu un lichid oarecare. Ce lucru mecanic trebue să facem ca să-l ridicăm după generatoare pe un cerc al bazei.

ION C. SCHILERU-DILI.

4697. Se consideră un patrulater strâmb ABCD pe ale cărui laturi AB , BC , CD , DA se iau arbitrar respectiv punctele $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Fie $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ simetricele acestor patru puncte față cu mijloacele laturilor respective.

Să se arate că tetraedrele $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ au același volum.

CEZAR COȘNIȚĂ.

4698. Se dă șirul de numere reale:

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ \ldots\ ,\ u_n\ ,\ \ldots$$

verificând relația de recurență $u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}$.

Se consideră, într'un plan raportat la două axe dreptunghiulare Ox, Oy, punctele $P_0(u_0\ ,\ u_1)\ ;\ P_1(u_1\ ,\ u_2)\ ;\ \ldots\ ,\ P_n(u_n\ ,\ u_{n+1})\ ,\ \ldots$

Să se determine $p,\ q$ astfel ca linia poligonală $P_0\,P_1 \ldots P_n \ldots$ să fie *convexă*.

TIBERIU POPOVICIU.

Rectificări. I. La exercițiul 38, pag. 549, la numitorul ultimei fracții se înlocuește π cu H.

II. Numărul problemei propusă dela pag. 552 este 4685, nu 6685, cum din eroare s'a imprimat.

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Arşavschi A. (4495); *Avram N. C.* (3491); *Bădescu E. A.* (3491); *Cardara Gh.* (4381); *Chiriţă M. C.* (3491); *Godeanu I. V.* (3491); *Grumăzescu M.* (4429); *Negrea A. L. M.* (4604, 29, 52, 63, 69); *Păpoiu E.* (3491); *Savin C. I.* (3491); *Vişa E.* (C, N).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de* geometrie, *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.

Manuscrisele **se vor scrie pe o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* (sub presă).

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“

(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 41871

complet — 1935/36 —
C III R 28

GAZETA MATEMATICA

APARE ODATĂ PE LUNĂ

ANUL XLI

NUMĂRUL 12. — AUGUST 1936

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII" SIBIIU

SUMARUL

1. André-Marie Ampère (1775 — 1836) (urmare şi sfârşit) . . . . . *Ion Ionescu.*
2. Asupra unor însumări . . . . . *I. V. Mătieş.*
3. O propoziţie despre punctul Miquel . . *N. N. Mihăileanu.*
4. Asupra curbelor plane . . . . . *Tiberiu Popoviciu.*
5. Note Matematice: 47 — 52.
6. Bibliografie.
7. Cereri: 259.
8. Diverse.
9. Probleme rezolvate: 4349, 4425, 4521, 4549, 4565, 4579, 4608, 4616.
10. Exerciţii: 43 — 51.
11. Probleme propuse: 4699 — 4710.
12. Tabla de Materii.

ABONAMENTUL 200 LEI PE AN.

BUCUREŞTI

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
1936

SPRE ŞTIINŢĂ

Gazeta Matematică se publică de către **Societatea „Gazeta Matematică"**, având sediul în Bucureşti, („Casa *Gazeta Matematică*", Calea Griviţei 158), compusă din Doctori sau Licenţiaţi în matematici, Ingineri cu diplome recunoscute de Stat şi Ofiţeri de arme speciale (Art. 5 din Statute). Lista membrilor se publică în primul număr al fiecărui an.

Societatea este administrată de o delegaţie de 3 membri, compusă din D-nii: **Gh. Iliescu**, Inginer Şef, Directorul Fabricii de Chibrituri-Filaret; **A. Ioanovici**, Inginer; **Al. D. Bunescu**, Inginer, Directorul General al Monitorului Oficial şi Imprimeriilor Statului, Casier.

Toate manuscrisele, articolele, notele, problemele rezolvate, problemele propuse şi exerciţiile se vor redija în conformitate cu instrucţiunile ce se pot procură dela *„Gazeta Matematică"* în schimbul sumei de 5 (cinci) lei trimeasă prin poştă.

Manuscrisele nepublicate nu se înapoiază.

Pentru uniformitatea semnăturilor şi spre a se evită confuziuni, corespondenţii sunt rugaţi a iscăli în ordinea următoare: numele de botez complet, iniţiala părintelui, numele de familie.

Probleme nerezolvate: 485, 766, 887, 1000, 08, 56, 58, 146, 78, 270, 71, 97, 99, 310, 33, 67, 84, 99, 412, 50, 553, 650, 79, 711, 29, 64, 876, 906, 14, 29, 59, 87, 2004, 17, 70, 74, 170, 338, 405, 30, 39, 66, 77, 503, 56, 77, 87, 607, 38, 55, 65, 84, 713, 17, 35, 69, 80, 814, 65, 86, 909, 12, 26, 36, 47, 3045, 69, 81, 127, 61, 208, 55, 60, 98, 304, 10, 16, 18, 50, 405, 12, 24, 25, 89, 522, 23, 33, 42, 45, 46, 62, 72, 73, 608, 27, 32, 47, 57, 65, 81, 82, 84, 99, 700, 33, 36, 93, 804, 29, 36, 44, 53, 64, 80, 96, 909, 13, 16, 18, 20, 33, 44, 83, 4010, 13, 30, 34, 45, 53, 59, 62, 68, 70, 73, 85, 102, 11, 12, 19, 32, 48, 50, 51, 63, 67, 69, 92, 203, 06, 09, 10, 30, 36, 40, 49, 52, 56, 75, 77, 80, 81, 83, 88, 89, 90, 301, 03, 15 19, 20, 33, 37, 40, 42, 44, 52, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 80, 84, 89, 93, 95, 96, 99, 404, 12, 16, 26, 38, 45, 49, 52, 61, 64, 65, 66, 68, 73, 74, 79, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 98, 500, 03, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 22, 30, 31, 33, 34, 47, 50, 58, 59, 61, 78, 80, 87, 88, 90, 92, 93, 96, 98, 601, 02, 03, 05, 13, 15, 18, 30, 36, 41, 45, 47, 50, 57, 66, 70, 71, 72, 75, 77, 80, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 700, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10.

Enunţurile problemelor nerezolvate, propuse în anii I — XXIX cu No. 171 — 3208, se găsesc publicate într'un Număr Special, care se poate procura dela *«Gazeta Matematică»* cu preţul 12 lei.

A apărut

CULEGERE DE PROBLEME DE TRIGONOMETRIE

PARTEA I (Goniometrie)

DE

V. CRISTESCU

EDIȚIA II-a REVĂZUTĂ ȘI ADĂOGITĂ

DE

GH. TH. GHEORGHIU

Prețul: 95 lei

„SPHINX“

REVUE MENSUELLE DES QUESTIONS RÉCRÉATIVES

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE

DANS LE MONDE ENTIER

ABONNEMENTS 1 AN: BELGIQUE, 35 FR.; FRANCE, 25 FR.

ETRANGER, 10 BELGAS

ADMINISTRATION:

„SPHINX“, 75, Rue Philippe Baucq

R. C. 51922 Tel: 33.48.58

Ch. postaux { Bruxelles No. 192338
Paris No. 160061

BOLETIN MATEMATICO

FUNDAT ÎN ANUL 1928. — ABONAMENTUL ANUAL: 200 LEI

SE PRIMEŞTE LA „GAZETA MATEMATICĂ“,

Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

Director: Dr. B. I. BAIDAFF

CEA MAI IMPORTANTĂ REVISTĂ PERIODICĂ

DE MATEMATICĂ DIN AMERICA DE SUD,

PUBLICATĂ ÎN BUENOS-AIRES

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE (1775—1836)

(Urmare dela pagina 558)

Acum, după ce am arătat pe scurt opera lui AMPÈRE, să arătăm câteva caracteristice ale vieţii lui.

Am spus că AMPÈRE, fără să fie şcolar, a fost toată viaţa lui profesor. El a trebui să înveţe pe alţii ceeace el a învăţat singur! De lipsa de a fi fost şcolar s'a resimţit în profesoratul său. Astfel, prin modul său de prezentare la tablă sau la explicaţiuni făcea deseori să se facă haz de dânsul; nu cunoaştea apoi niciunul din procedeele copiilor de a înşela pe profesorii lor. Astfel de exemplu, el era miop, nu vedea clar la depărtare şi cu contururi nedefinite bine. Numai odată călătorind cu unul care purta ochelari, i-a cerut să-i puie şi el ca să-i încerce, şi atunci i s'a părut că vede o lume nouă. Bănuind că unii din şcolarii lui nu văd bine ce scria la tablă întreabă clasa dacă scrie destul de mare ca să vază bine şi cei din fundul clasei; este rugat de aceştia să scrie mai mare. După câteva lecţiuni este rugat să scrie ceva mai mare; alţii îi cer mai târziu să scrie şi mai mare şi aşa mai departe. AMPÈRE, care era de o credulitate copilărească, a luat în serios toate aceste cereri, a sporit necontenit mărimea literelor şi mai ales a cifrelor, până ce ajunsese să nu poată scrie decât cinci cifre pe tot latul tablei, după cum afirmă prietenul lui intim ARAGO! Bine înţeles că la fiecare sporire copiii făceau mare haz că l'au păcălit!

AMPÈRE a fost un om bun, o fire timidă, un caracter neşovăitor. După cum spune SAINTE BEUVE, el cunoştea mai bine natura şi universul de cât cum trebuia să se poarte în lume şi în societate. In această privinţă era stângaciu şi neglijent. Iubita lui JULIE îi scria odată: *„Dacă faci vreo vizită, caută să ai aerul unui om onest căci aceasta va face plăcere şi bietei tale neveste"*. El umbla cu haine vechi, murdare, şi pătate sau arse de pe la experienţele care le făcea. WOEHLER, în urma unei vizite pe care i-a făcut-o în 1833, a scris o scrisoare lui BERZELIUS în care spune: *„Un om original cum puţini se găsesc. Un om destul de mare, cam curbat de etate, fără dinţi, cu buza inferioară mare şi atârnând în jos, cu ochii strălucitori şi proeminenţi, cu o perucă ce lasă să se vadă pe ici pe colo din chelia capului, îmbrăcat cu un frac negru, care era foarte vechiu şi uzat, cu rufăria totdeauna murdărită de tabac pe care-l lua cu el în două doze"*.

AMPÈRE nu se împăca deloc cu viața sgomotoasă din Paris și regreta viața liniștită pe care o dusese în tinerețe la Poleymieux, după cum reiese din versurile reproduse ceva mai departe.

După moartea tatălui său, AMPÈRE nu a dus decât o viață de mizerie. Și când câștiga mai mult, cheltuia cu cărțile și aparatele pentru cercetările și studiile lui. Deseori se împrumuta dela prietenii lui, oameni de știință, cu sume mici ca să poată trăi el și familia lui. S'a zis chiar că știința și mizeria au fost tovarășele vieții lui.

El era cu totul desinteresat; nu a căutat niciodată nici glorii efemere, nici situațiuni materiale, cum de altfel spune el însuși în următoarele versuri:

Pourquoi d'une gloire inutile
Irais-je chercher les frivoles honneurs
Ou, pour grossir sans cesse un trésor inutile
De l'aveugle Phébus implorer les faveurs,
Retournons dans ces lieux champêtres,
Ou chaque heure amenait quelques nouveaux plaisirs.
Et, content des moissons, du champs qui vit naître
Doublons notre fortune, en bornant nos désirs.

AMPÈRE era melancolic, avea mișcările încete; nu putea face lecțiunile fără a se plimba de colo până colo. Nu sta în repaos de cât în timpul somnului; tot timpul era frământat; creierul său îl fierbea continuu. La Academia din Paris sunt 38 de cartoane voluminoase cu memorii și manuscrise rămase dela el.

Lui AMPÈRE ideile și sentimentele îi apăreau brusc, spontaneu. Astfel pentru el multă vreme muzica nu constituia de cât o problemă de acustică; studia vibrațiunile, bătăile, și își punea probleme matematice din ele. Numai pe la 30 de ani, ducându-se la un concert de muzică germană, s'a făcut legătura în el dintre ureche și inimă, și a început să simtă plăcerea de a asculta muzica. SAINTE BEUVE spune despre dânsul:

„Son esprit immense était le plus souvent comme une mer agitée; la première vague soudaine y faisait montagne, le liège flottant ou le grain de sable y étaient aisement lancés jusqu'aux cieux".

WOEHLER spune că, cu toate curiozitățile lui, era totuși unul dintre oamenii cei mai remarcabili și mai respectați ai timpului său. Unii bătrâni, ca ARAGO și THENARD, îl necăjeau cu glume și cu

înțepături, însă el le primea fără a se supăra și de multe ori le răspundea cu mult umor. El este fără nicio îndoială, — spune tot WOEHLER, — unul din capetele cele mai adânc speculative și pare că poseda o erudițiune din cele mai vaste.

Când unul dintre cei ce stau de vorbă cu el se plictisea, el îl distra cu jocuri de cuvinte, șarade, etc. Iată o șaradă care are ca răspuns locul lui de copilărie *Poleymieux:*

Mon premier est un nom d'apôtre.
Mon second sert à délimiter les champs.
Mon troisième est un adverbe comparatif.
Mon tout est un endroit ravissant.

AMPÈRE era un om foarte popular, nu din cauza marei lui erudițiuni, pe care poporul nu o putea aprecia, ci din cauza anecdotelor care se povesteau despre el. Astfel el era foarte distrat; a și fost supranumit «AMPÈRE DISTRATUL». Aceasta se explică prin faptul că mintea lui era totdeauna preocupată cu rezolvarea unor probleme științifice, care-l făceau să uite în ce situațiune se află. Aceste anecdote au circulat prin Franța și prin alte țări, chiar un sfert din veac după moartea lui. Multe din ele erau culese de elevi sau studenți ai săi, care le prindeau la cursuri, făceau mare haz de dânsele, le povesteau prin toată țara, mărind astfel popularitatea lui AMPÈRE.

Astfel la curs AMPÈRE se ștergea deseori pe fața asudată cu cârpa de șters tabla, pe care apoi o lua ca batistă acasă; alteori ștergea tabla cu batista și o lăsa la școală! Unii din studenții lui veneau la școală ca să vadă mai mult asemenea acte de distracție decât să urmeze lecțiunile lui!

Intr'o dimineață ducându-se la școală, vede pe jos o piatră de o formă mai curioasă, o ridică și o examinează mergând încet spre școală. Când a ajuns la Podul Artelor peste Sena, se uită la ceas și vede că se apropie ora de a intra la curs; aruncă ceasul din mână peste parapetul podului, bagă piatra în buzunar și se duce să-și facă lecția!

Altădată, tot pe când se ducea la școală, îi vine în minte un mijloc de a rezolva o chestiune care-l preocupa de mai multă vreme. Curios de a afla mai repede rezultatul, vede o trăsură așteptând la o poartă, se duce la ea, scoate din buzunar o cretă, pe care o purta totdeauna cu el, începe să scrie pe spatele trăsurii formule și s'apucă de făcut calculele necesare. Intre timp vine clientul

birjarului, se urcă în trăsură şi caii pornesc. AMPÈRE, care era aproape de a găsi rezultatul, o ia la goană după trăsură, calculează înainte şi nu se opreşte până ce nu a găsit necunoscuta!

Intr'o zi, la o întrunire la care au participat şi prelaţi, după terminarea discuţiunilor, ia tricornul unuia dintre aceştia îl pune pe cap şi se duce cu el acasă!

Intr'o seară fiind chemat la o masă de către un personaj de seamă, unde se cuvenea să fie foarte rezervat, AMPÈRE uită la un moment dat că nu este la el acasă, aşa că după ce i s'a dat o mâncare care nu i-a plăcut a spus cu glas tare: «Masa asta este detestabilă, soro! n'ai ajuns să pricepi că nu trebue să mai angajezi bucătărese până ce nu te asiguri că ştiu să gătească bine?»

Umbrelele şi spada academică le uita mai totdeauna pe unde se ducea. Intr'o seară se duce la masa unui inspector şi uită să-şi lase spada la vestiar. I se atrage atenţia în sufragerie şi atunci scoate spada şi o pune sub un scaun. Pe acel scaun a venit de s'a aşezat stăpâna casei, astfel că după sfârşitul mesei a trebuit să aştepte până târziu de tot când acea Doamnă s'a ridicat dela masă. Când a încercat să ridice de acolo spada a fost observat şi s'a produs un râs general.

SAINTE BEUVE povesteşte că într'o seară fiind cu prietenii săi C. JORDAN şi DEGERANDO, AMPÈRE a început să le explice modul cum este alcătuit universul; el le-a vorbit 13 ore neîntrerupt, cu o luciditate continuă. La finele acelor ore a spus că ar mai avea mult de povestit dar că se simte obosit!

Odată prezentându-i-se o carte despre viitorul chimiei, o citeşte, i se pare că conţine lucruri diabolice şi îi dă imediat foc!

La o şedinţă a Academiei de Ştiinţe, pe când AMPÈRE făcea o comunicare, intră o persoană străină care a produs oarecare mişcare în sală. AMPÈRE şi-a văzut de cititul lui. La terminare depune comunicarea la birou şi se duce să-şi reia locul lui obişnuit. Găseşte însă că acel strein îi ocupase locul lui. Se învârteşte pe acolo şi văzând că acela nu pleacă ca să-i lase locul, se duce şi se plânge preşedintelui Academiei, că un strein i-a luat locul. Acesta îi răspunde că acel Domn nu e strein ci e membru al Academiei.

— De când? întreabă AMPÈRE.

— Dela 5 nivôse anul VI, răspunde streinul.

— Din ce secţiune face parte?

— Din secţiunea de mecanică.

Ampère ia anuarul Academii şi găseşte că la acea dată a fost ales membru Napoleon Bonaparte. Uluit, se duce de-i cere scuze. Napoleon îi spune că vina e a lui căci nu i-a făcut nicio vizită; îi întinde mâna şi îl invită pentru seara următoare la masă la Palat, spunându-i că are să stea alături de Impărătească, pentru ca să nu o ia drept altă persoană. In seara următoare Ampère a uitat să se ducă!

Am spus că Ampère a murit la 10 Iunie 1836. Nimicnicia vieţii a arătat-o el în o poezie adresată Juliei, pe când era în tratative de căsătorie, în versurile următoare:

Toute passe! C'est ainsi que la course des âges
Sur les ailes du temps emporte nos beaux jours,
Qu'un ciel pur et serein se couvre des nuages
Que l'absence succède aux plus tendres amours.

Puţini oameni de ştiinţă au avut după moarte memoria lor omagiată şi venerată ca Ampère! Mulţi scriitori şi scriitoare i-au descris viaţa, opera şi caracterul, iar de curând două volume mari au fost publicate cu corespondenţa lui.

Oraşul lui natal Lyon, unde a fost profesor de matematici la primul Liceu, a dat numele lui Ampère acelui liceu.

In anul 1881, adunarea electricienilor din toată lumea a dat numele de Amper unităţii de intensitate pentru electricitatea dinamică.

Americanii au dat numele lui unei staţii de cale ferată la 17 km de New-York, în jurul căreia s'a format azi orăşelul Ampère.

In anul 1920 s'a comemorat centenarul descoperii legilor lui Oersted şi Ampère în toată lumea.

In 1934 doi americani au dat Societăţii electricienilor din Franţa fondurile necesare pentru a răscumpăra casele din Poleymieux, unde Ampère şi-a petrecut copilăria şi tinereţea, casă în care s'a instalat un muzeu numit «Maison Ampère». Aci se adună manuscrise, aparate, modele rămase de la dânsul şi se strânge tot ce priveşte viaţa, opera şi invenţiunile lui. De acest muzeu îngrijeşte asociaţia: *Société des Amis d'André-Marie Ampère* înfiinţată la 1930, şi care publică un Buletin.

In zilele de 5, 6, 7 şi 8 Martie anul acesta, cu ocaziunea Târgului din Lyon, s'a făcut o Expoziţiune de electricitate în care este o sală mare octogonală pentru comemorarea lui Ampère. In acea sală şi la Poleymieux s'au făcut comemorări pentru slăvirea memoriei lui Ampère de către reprezentanţii ştiinţei şi industriei din lumea întreagă. S'au ţinut numeroase cuvântări pentru prea mărirea

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

genialului AMPÈRE. D-l HERRIOT, fost Prim Ministru în Franţa, a încheiat cuvântarea sa prin următoarele cuvinte:

„On dit que nous sommes assemblés pour célebrer le centenaire de la mort d'AMPÈRE. *Or, jamais il n'a été si vivant parmi nous. Un homme comme lui ne meurt pas ; car le tombeau des morts, c'est l'esprit des vivants. Les manifestations qui viennent de se dérouler marqueront, car ce sont les fêtes de la domination et de la grandeur de l'esprit".*

Asemenea comemorări s'au făcut mai de către toate Societăţile ştiinţifice şi tehnice. La noi, în ziua de 8 Martie, — şi la ora la care s'a făcut comemorarea dela Lyon, — s'a făcut comemorarea lui AMPÈRE la Societatea Politechnică din Bucureşti, unde au luat cuvântul D-l C. BUŞILĂ, Preşedintele acelei Societăţi, D-l N. VASILESCU-KARPEN, Rectorul Şcoalei Politechnice «Regele Carol II», din Bucureşti, D-l D. HURMUZESCU, Decanul Facultăţii de Ştiinţe, D-nii I. IONESCU şi I. ŞTEFĂNESCU-RADU, Preşedintele Asociaţii Producătorilor de energie electrică, cărora le-a răspuns D-l d'ORMESSON, Ministrul Franţei la Bucureşti.

O a doua comemorare a avut loc la «Fundaţia universitară CAROL I» sub Preşedenţia Majestăţi Sale Regele CAROL II, în ziua de 4 Mai, unde au vorbit D-l V. VÂLCOVICI, Preşedintele Societăţii române de ştiinţe, D-l C. BUŞILĂ, D-l N. VASILESCU-KARPEN, D-l D. HURMUZESCU şi D-l d'ORMESSON. La această solemnitate s'a comemorat şi bicentenarul naşterii lui JAMES WATT, la cuvântările respective răspunsul fiind dat de d-l Ministru al Angliei.

AMPÈRE a fost un om popular în viaţa lui, după cum am arătat prin anecdotele ce se povesteau despre dânsul. Ştiinţa lui l-a făcut însă nemuritor, căci azi numele lui este pomenit de toată lumea care se serveşte într'un fel sau în altul de electricitate. Cu aceasta, şi cu ce a spus D-l HERRIOT, se adevereşte o cugetare a lui AMPÈRE, cu care încheiu acest articol de comemorare:

„Scopul omului nu este această viaţă; cele mai nobile facultăţi ale lui se refer la o altă existenţă. Ar fi cu totul lipsit de sens ca în o fiinţă limitată, destinată unei durate mărginite, să existe facultăţi care să-l înalţe până la cunoştinţa infinitului şi să-l facă să simtă eternitatea!".

I. IONESCU.

ASUPRA UNOR INSUMĂRI

In cele ce urmează, voiu calcula sumele

1) $S_{mn} = \alpha_{m+1} a_1 a_2 \ldots a_m + \alpha_{m+2} a_2 \ldots a_{m+1} + \alpha_{n+1} a_{n-m+1} \ldots a_n$

2) $S'_{mn} = \dfrac{\alpha_{m+1}}{a_1 a_2 \ldots a_m} + \dfrac{\alpha_{m+2}}{a_2 \ldots a_{m+1}} + \ldots + \dfrac{\alpha_{n+1}}{a_{n-m+1} \ldots a_n}$

unde $a_i = a_1 + (i-1)r$, $\alpha_i = \alpha_1 + (i-1)\rho$ şi $m = 1, 2, \ldots < n$.

Pentru aceasta înlocuesc în relaţiile (1) şi (2) respectiv:

$$\alpha_{m+i} = \alpha_0 + (m+i)\rho \text{ şi } \alpha_{m+i} = \alpha_m + i\rho$$

şi găsesc respectiv

3) $S_{mn} = \alpha \cdot \Sigma_{mn} + \rho X_{mn}$; $S'_{mn} = \alpha_m H_{mn} + \rho Y_{mn}$

în cari trebue să determin pe:

4) $\Sigma_{mn} = a_1 a_2 \ldots a_m + a_2 a_3 \ldots a_{m+1} + \ldots + a_{n-m+1} \ldots a_n$

5) $H_{mn} = \dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_m} + \dfrac{1}{a_2 a_3 \ldots a_{m+1}} + \ldots + \dfrac{1}{a_3 \ldots a_{m+1}} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-m+1} \ldots a_n}$.

6) $X_{mn} = (m+1) a_1 a_2 \ldots a_m + (m+2) a_2 \ldots a_{m+1} + \ldots + (n+1) a_{n-m+1} \ldots a_n$,

7) $Y_{mn} = \dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_m} + \dfrac{2}{a_2 \ldots a_{m+1}} + \ldots + \dfrac{n-m+1}{a_{n-m+1} \ldots a_n}$.

Sumele (4) şi (5) sunt date în *„Théorie de Nombres“ par* LUCAS, *pag. 56 şi 152* şi anume:

8) $$\begin{cases} \Sigma_{mn} = \dfrac{a_{n-m+1} \ldots a_n a_{n+1} - a_0 a_1 \ldots a_m}{(m+1)r} \\ H_{mn} = \dfrac{1}{(m-1)r}\left(\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{m-1}} - \dfrac{1}{a_{n-m+2} \ldots a_n}\right), (m \neq 1) \end{cases}$$

unde $a_0 = a_1 - r$ şi $a_{n+1} = a_n + r$.

Sumele (6) şi (7) sunt date de D-l MAIOR I. LINTEŞ în *Gazeta Matematică, vol. XLI, pag. 130 ş. u.*, unde nu s'a ţinut seamă de ultimii termeni şi deci s'a ajuns la resultate eronate.

Astfel am:

$$a_1 a_2 - a_0 a_1 = 2ra_1$$
$$a_2 a_3 - a_0 a_2 = 3ra_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n a_{n+1} - a_0 a_n = (n+1) r a_n$$
$$\Sigma_{2,n+1} - a_0 \Sigma_{1,n} = r X_{1,n}$$

şi în general

9) $$\Sigma_{m+1,\,n+1} - a_0 \Sigma_{1,n} = r X_{mn}$$

în care, înlocuim pe $\Sigma_{m+1,\,n+1}$ şi $\Sigma_{m,n}$, date de prima relaţie din (8), se găseşte suma X_{mn} şi la rândul ei ţinând seama şi de (4), suma căutată S_{mn}.

Pentru suma (7) observ că:

$$\frac{r}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{(n-1)r}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_{n-1}} - \frac{n-1}{a_n}$$
$$r Y_{2,n} = H_{1,n-1} - \frac{n-1}{a_n}$$

şi în general

10) $$(m-1) r Y_{mn} = H_{m-1,\,n-1} - \frac{n-m+1}{a_{n-m+1} \dots a_n}$$

Suma $H_{m-1,\,n-1}$ o dă relaţia a doua din (8). Relaţiile (10) şi (8) dau relaţia căutată (2).

Cazul exceptat $m = 1$ îmi dă progresia armoică:

$$H_{1,n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

ce nu se poate însuma. Deci $Y_{1,n}$ şi $S'_{1,n}$ nu se pot însuma.

Aplicaţii.

1°. Să se calculeze suma

$$S(x,n) = 3x(x+1) + 4(x+1)(x+2) + \dots + (n+1)(x+n-2)(x+n-1).$$

Suma e de forma (1), în care

$$a_i = x + i - 1\,,\ i = 1,2,\ldots n\,,\ m = 2\,,\ \alpha_m = 0\,,\ r = \rho = 1,$$

deci

$$S(x,n) = S_{2,n} = X_{2,n} = \Sigma_{3,n+1} - (x-1)\,\Sigma_{2,n}\,.$$

Dar:

$$\Sigma_{3,n+1} = \frac{1}{4}\big[(x+n-2)(x+n-1)(x+n)(x+n+1) - (x-1)\,x\,(x+1)(x+2)\big]$$

$$\Sigma_{2,n} = \frac{1}{3}\big[(x+n-2)(x+n-1)(x+n) - (x-1)\,x\,(x+1)\big]$$

$$\therefore\quad S(x,n) = \frac{1}{12}\big[(x-1)\,x\,(x+1)(x-10) - (x+n-2)(x+n-1)(x+n)(x-3n-7)\big].$$

Pentru cazul $x = 1$

$$S(1\,,n) = \frac{1}{4}(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2).$$

Pentru verificare, voiu calcula direct suma $S(1\,,n)$, care se poate scrie succesiv:

$$S(1\,,n) = 3\,.\,1\,.\,2 + 4\,.\,2\,.\,3 + \ldots + (n+1)\,(n-1)\,n$$

$$S(1\,,n) = 1\,.\,2\,.\,3 + 2\,.\,3\,.\,4 + \ldots + (n-1)\,n\,(n+1)$$

$$\therefore\quad \frac{S(1\,,n)}{3\,!} = \sum_{2}^{n} \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{3\,!} = C_3^3 + C_4^3 + \ldots + C_{n+1}^3 = C_{n-2}^4$$

C_n^m fiind simbolul combinărilor de n obiecte luate câte m. In fine găsesc

$$S(1\,,n) = 3\,!\,C_{n+2}^4 = \frac{1}{4}(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)$$

rezultatul de mai sus.

2. Să se calculeze suma:

$$S(x\,,n) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots + \frac{n-2}{(x+n-3)(x+n-2)(x+n-1)}\,.$$

Se observă că

$$S(x,n) = S'_{3,n} = Y_{3,n} = \frac{1}{2}\left[H_{2,n-1} - \frac{n-2}{(x+n-2)(x+n-1)}\right].$$

$$H_{2,n-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n-1}$$

$$\therefore \quad S(x,n) = \frac{(n-2)(n-1)}{2x(x+n-2)(x+n-1)}$$

şi pentru $x = 1$, găsesc

$$S(1,n) = \frac{n-2}{2n}.$$

Pentru verificare plec dela identitatea

$$\frac{n-2}{(x+n-3)(x+n-2)(x+n-1)}$$

$$= \frac{n-2}{2} \cdot \frac{1}{x+n-3} - \frac{n-2}{x+n-2} + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{1}{x+n-1}$$

uşor de stabilit, în care fac $n = 3,4,\ldots n$, însumez şi găsesc

$$S(x,n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{n-1}{x+n-2} + \frac{n-2}{x+n-1}\right].$$

I. V. MĂTIEŞ
Prof. Blaj.

Observaţiuni:

D-l MĂTIEŞ, face două interesante rectificări, menţionând însă acelaş număr de termeni. Dacă însă ne mărginim la cei n termeni ai progresiei, atunci în mod sigur avem:

$$S_1 = 2a + 3b + \ldots + (n+1)\,l$$

$$S_2 = 3ab + 4bc + \ldots + (n+1)\,k\,.\,l$$

. . . . . .

. . . . . .

$$S_{m-1} = m\,.\,\underbrace{ab\ldots g}_{n-1} + (m+1)\,.\,\underbrace{bc\ldots h}_{n-1} + \ldots + (n+1)\,\underbrace{i\ldots kl}_{n-1}.$$

Şi desvoltând analog raţionamentul, găsim formula generală:

$$\sum_m - \alpha\left[\sum_{m-1} - \underbrace{i\ldots k^l}_{m-1}\right] = r\cdot\left[S_{n-1} - (n+1)\underbrace{i\ldots kl}_{m-1}\right].$$

Iar pentru cazul al doilea:

$$r\cdot(m-1)\cdot S'_m = H_{m-1} - \frac{n-m+1}{\underbrace{i\ldots kl}_{n-1}}\cdot$$

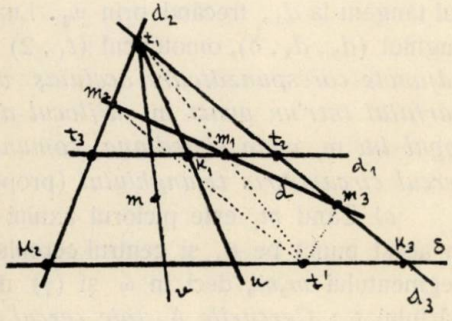
Ceeace ne rectifică rezultatul.

I. L.

O PROPOZIŢIE DESPRE PUNCTUL MIQUEL

1. Se consideră trei drepte d_1, d_2, d_3 care formează triunghiul $t \equiv t_1t_2t_3$; printr'un punct m_1 de pe d_1 se duce o paralelă $d \equiv m_1m_2m_3$ la polara lui m_1 faţă de dreptele d_2d_3. *Punctul m* MIQUEL *al figurii* (t, d) *este acelaş, oricare ar fi* m_1 *pe* d_1.

Dreapta d este caracterizată prin însuşirea: $m_1m_2 = m_1m_3$; fiind dat m_2 pe d_2, se deduce prin el o paralelă la d_3 până taie în t' transformata (δ) a dreptei d_1 în omotetia $(t_1, 2)$; paralela din t' la d_2 determină pe m_3 şi reciproc, se construeşte m_2 cu m_3 dat. Există deci între m_2 şi m_3 o corespondenţă omografică şi dreapta (d) înfăşoară o conică (p). Se observă însă că m_2 şi m_3 devin în acelaş timp puncte la infinit pe d_2 şi d_3, d devine dreapta dela infinit d_∞ şi (p) fiind tangentă dreptei d_∞ este o parabolă.



O poziţie particulară a dreptei d este d_1, când m_1 devine mijlocul μ_1 al segmentului t_2t_3. De asemenea când m_2 e în t_1, m_3 devine $\mu_3 \equiv (\delta, d_3)$ şi pentru m_3 în t_1, m_2 devine $\mu_2 \equiv (d_2, \delta)$, iar d devine d_3, respectiv d_2. Parabola (p) este deci înscrisă triunghiului (d_1, d_2, d_3) şi focarul ei m, este punctul MIQUEL al figurei $(d_1d_2d_3d)$ şi deci fix, când d, variind ca în enunţ, înfăşoară parabola.

2. Contactele parabolei cu d_2, d_3 fiind μ_2 şi μ_3 şi tangenta d_1, paralelă cu coarda $\mu_2\mu_3$, dreapta care uneşte intersecţia t_1 a tangentelor în μ_2, μ_3, cu punctul de tangentă μ_1 al dreptei d_1, este diametrul (u) conjugat direcţiei d_1 deci paralel cu axa, şi e mediană a triunghiului t. Dreapta (v) care uneşte pe t_1 cu focarul m, fiind isogonala direcţiei axei (n), faţă de tangentele d_2, d_3, este simediană triunghiului: *focarul* m *se află în punctul unde simediana retaie cercul* (c) *circumscris triunghiului* t, *circumscris parabolei* (proprietate cunoscută).

Deci când m_1 descrie dreapta d_1, cercul (γ) circumscris triunghiului $\tau \equiv (d, d_2, d_3)$, trece prin acelaş punct fix m; formează un fascilol linear care cuprinde şi cercul (c), cu axul radical pe simediana triunghiului şi cu centrul pe diametrul cercului (c), perpendicular pe (v), deci trecând prin polul simedianei, ω — intersecţia tangentei în t_1 la (c) cu d_1.

3. Cazuri particulare se pot obţine, mutând pe m_1 în poziţii particulare.

a) Perpendiculara pe bisectoare, dusă prin piciorul ei pe latura opusă, e o dreaptă d *şi determină cu celelalte două laturi un triunghiu din familia* (τ), *înscris într'un cerc* (γ) *care taie cercul* (c) *după simediana* (v). (Am întâlnit această propoziţie, rezolvând o problemă mai veche din G. M., propusă de D-l Prof. A. ANGELESCU; acesta a şi fost punctul meu de plecare pentru întreaga chestiune).

b) Când m_1 este în t_2, m_2 şi m_3, devin t_1 şi μ_3, deci cercul tangent în t_1 la d_2 şi trecând prin μ_3 este un cerc (γ); analog pentru cercul tangent la d_3, trecând prin μ_2. Luând ca element de referinţă triunghiul (d_2, d_3, δ), omoteticul $(t_1, 2)$ al lui t, se obţine: *Cercurile adjuncte corespunzătoare aceluiaş vârf, se taie pe simediana vârfului într'un punct* m, *mijlocul distanţei dintre vârf şi omologul lui* m, *unde simediana, comună ambelor triunghiuri, retaie cercul circumscris triunghiului* (propoziţie cunoscută).

c) Când m_1 este piciorul axului ortic, d devine perpendiculara în acest punct pe d_1 şi centrul cercului (γ) este pe d_1, mediatoarea segmentului m_2m_3 deci în ω şi (γ) devine cercul APOLLONIUS al vârfului t_1: *Cercurile* A, *taie cercul* (c) *circumscris triunghiului, după simediane* (propoziţie cunoscută), etc.

N. N. MIHĂILEANU.

ASUPRA CURBELOR PLANE

1. Fie o curbă plană raportată la tangenta şi normala într'un punct ordinar O al ei. Un punct M vecin de O are coordonatele :

$$x = s + \dots$$

(1)

$$y = \frac{1}{2R} \cdot s^2 - \frac{R'}{6R^2} s^3 + \dots$$

R fiind raza de curbură în O şi R' derivate ei în raport cu arcul s. Pentru simplificare presupunem că desvoltările (1) sunt valabile deci că curba e analitică în vecinătatea punctului O.

Fie A un punct fix pe tangenta dusă în O de coordonate (m, O) şi M_1 (x_1 , y_1) punctul unde AM tae a doua oară curba. Se presupune evident că M e suficient de aproape de O pentru ca M_1 să fie determinat în mod unic.

Arcul $s_1 = OM_1$ este infinit mic împreună cu s şi se poate desvolta în seria :

$$s = \lambda_1 s + \lambda_2 s^2 + \dots \tag{2}$$

x_1 , y_1 se obţin din (1) punând s_1 în loc de s. Inlocuind apoi pe s_1 cu valoarea lui din (2) avem x , y, x_1 , y_1 exprimate în funcţie de s. Insă A, M, M_1 sunt colineare deci :

$$m (y - y_1) = x_1 y - x y_1$$

din care, egalând coeficienţii aceloraşi puteri a lui s, găsim :

$$m \cdot \frac{1}{2R} (1 - \lambda_1^2) = 0$$

$$m \cdot \left(\frac{R'}{6R^2} - \frac{1}{R} \lambda_1 \lambda_2 - \frac{R'}{6R^2} \lambda_1^3 \right) = \lambda_1 (1 - \lambda_1) \cdot \frac{1}{2R}$$

Dar avem $1/R \neq 0$, şi $m \neq 0$ prin ipoteză, deci $\lambda_1^2 = 1$, adică $\lambda_1 = \pm 1$. Se poate uşor vedea că $\lambda_1 = 1$ nu poate conveni, prin urmare $\lambda_1 = -1$. Obţinem apoi :

$$\lambda_2 = -\left(\frac{1}{m} - \frac{R'}{3R} \right) = \lambda$$

$$x_1 = -s + \left(\frac{R'}{3R} - \frac{1}{m} \right) s^2 + \dots$$

$$y_1 = \frac{1}{2R} s^2 - \frac{1}{R} \left(\frac{R'}{6R} - \frac{1}{m} \right) s^3 + \dots$$

2. Fie N un punct pe MM_1 aşa ca raportul anarmonic $(M_1NMA) = c^{st}$. Fie ξ , η coordonatele lui N.

$$\xi = \frac{x + k\mu x_1}{1 + k\mu} = \frac{xy_1 - kx_1y}{y_1 - ky}$$

$$\eta = \frac{y + k\mu y_1}{1 + k\mu} = \frac{yy_1(1-k)}{y_1 - ky}$$

unde :

$$\frac{x + \mu x_1}{1 + \mu} = m, \quad \frac{y + \mu y_1}{1 + \mu} = 0 \ , \ \mu = -\frac{y}{y_1}$$

k fiind o constantă impusă prin condiţia de mai sus.

Putem acum obţine desvoltările lui ξ, η în serie după puterile lui s. Fără a intra în amănunte reproducem rezultatul ce se obţine printr'un calcul simplu :

$$\xi = \frac{1+k}{1-k} \cdot s + \left[\frac{k(3+k)}{(1-k)^2}\lambda - \frac{R'}{3R} \cdot \frac{4k}{(1-k)^2}\right] \cdot s^2 + \ldots$$

$$\eta = \frac{1}{2R} \cdot s^2 + \left(\frac{k}{1-k} \cdot \frac{\lambda}{R} - \frac{R'}{6R^2} \cdot \frac{1+k}{1-k}\right) \cdot s^3 + \ldots$$

Când M variază în vecinătatea lui 0, N descrie o curbă pe care o vom numi *polara de indice* k *al punctului A*. Dacă $m \to \infty$ avem *diametrul de indice* k *al punctului A*. Dacă $k = -l$ avem polara în sensul D-lui Prof. ANGHELUŢĂ [1] [2].

Vom studia cazul când k este esenţial diferit de — 1. Inainte de a da proprietăţile ce ne-am propus a expune să facem câteva observaţii :

a) k poate lua orice valoare finită sau infinită.

b) Două curbe polare de indice k şi $1/k$ nu sunt distincte căci dacă M vine, în urma variaţiei continue, în M_1, acesta vine în mod necesar în M.

---

1) A se vedea T. POPOVICIU „Asupra curbelor plane" *Curierul Matematic*, vol. III (1927) pp. 33 — 41.

2) TH. ANGHELUŢĂ. „Curba polară a unei curbe plane ... etc." G. M., vol. XXXII (1927) pp. 161 — 166.

3. Dacă facem $s \to 0$, deducem :

$$\frac{d\eta}{d\xi} \to 0, \text{ deci :}$$

Toate polarele de indice $k \neq -1$ sunt tangente între ele precum şi curbei date în punctul 0.

Avem acum, accentele însemnând derivare în raport cu s.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \quad \frac{\eta''\xi' - \eta'\xi''}{\xi'^3}$$

de unde

$$\lim_{s \to 0} \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{R}\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$$

deci :

Toate polarele de acelaşi indice k au aceeaş rază de curbură egală cu :

$$\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 . R.$$

E de remarcat că raza de curbură *nu depinde de m* adică de poziţia lui A pe tangenta în O.

Calculând derivatele de ordinul al treilea găsim :

$$\lim_{s \to 0} \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^4 \left[\frac{12k}{m(1-k)^2} \frac{1}{R} - \frac{R'}{R^2}\right]$$

deci :

Două polare de aceleaşi indice au în general un contact de ordinul al 2-lea în punctul O.

4. Ne propunem acum a trata o problemă oarecum inversă şi a da totodată o extensiune a noţiunei de *curbă polară.*

Să considerăm punctul M (x, y) corespunzând arcului s şi M_1 (x_1, y_1) corespunzând arcului s_1 dat de (2). Dreapta MM_1 taie o dreaptă fixă :

$$\Delta \equiv \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

într'un punct P şi fie N conjugatul armonic a lui P faţă de M şi M_1.

Coordonatele ξ, η ale punctului N sunt:

$$\xi = \frac{2\alpha x x_1 + \beta (x_1 y + x y_1) + \gamma (x + x_1)}{\alpha (x + x_1) + \beta (y + y_1) + 2y}$$

$$\eta = \frac{\alpha (x_1 y_1 + x y_1) + 2\beta y y_1 + \gamma (y + y_1)}{\alpha (x + x_1) + \beta (y + y_1) + 2\gamma}$$

şi putem calcula desvoltările acestor coordonate după puterile lui s. Inutil să intrăm în detaliile calculului, e destul să indicăm rezultatele ce se obţin.

Să punem:

$$p_0 = 0 \qquad q_0 = q_1 = 0$$

$$p_1 = \gamma (1 + \lambda_1) \qquad q_2 = \frac{\gamma}{2R}(1 + \lambda_1^2)$$

$$p_2 = 2\alpha\lambda_1 + \gamma\lambda_2$$

$$r_0 = 2\gamma$$

$$r_1 = \alpha (1 + \lambda_1)$$

$$r_2 = \alpha\lambda_2 + \frac{\beta}{2R}(1 + \lambda_1^2)$$

şi încă sub ipoteza $\gamma = 0$:

$$q_3 = \frac{\alpha}{2R}\lambda_1 (1 + \lambda_1)$$

şi sub ipotezele $\gamma = 0$, $\alpha = 0$,:

$$p_3 = \frac{\beta}{2R}\lambda_1 (1 + \lambda_1)$$

$$p_4 = \beta\left[\frac{2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2}{2R} - \frac{R'}{6R^2}\lambda_1\, 1 + \lambda_1^2)\right]$$

$$q_4 = \frac{\beta}{2R}\lambda_1^2 .$$

Primii termeni ai desvoltărilor în chestie se obţin cu ajutorul acestor numere.

5. Ne propunem să examinăm alura curbei descrise de punctul N în vecinătatea lui O când M variază. Trebue pentru aceasta să distingem mai multe cazuri.

A) $1 + \lambda_1 \neq 0$. Avem

$$\xi = \frac{p_1}{r_0} . s + \ldots , \eta = \frac{q_2}{r_0} . s^2 + \ldots \quad \gamma \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \xi = \dfrac{p_2}{r_1} . s + \ldots , \eta = \dfrac{q_3}{r_1} . s^2 + \ldots & \alpha \neq 0 \\ \xi = \dfrac{p_3}{r_2} . s + \ldots , \eta = \dfrac{q_4}{r_2} . s^2 + \ldots & \alpha = 0 \end{array}\right\} \gamma = 0$$

şi se deduce că: *în vecinătatea lui* O *punctul* N *descrie o curbă tangentă curbei date.*

B) $\lambda \neq 0 \ , \ 1 + \lambda_1 = 0.$

In acest caz arcele OM, OM_1 în valoare absolută sunt infiniţi mici echivalenţi.

Avem:

$$\xi = \frac{p_2}{r_0} . s^2 + \ldots , \eta = \frac{q^2}{r_0} . s^2 + \ldots$$

deci locul lui N în vecinătatea lui O *traversează curba dată.* Coeficientul unghiular al curbei (N) în O este:

$$\frac{1}{R} . \frac{\gamma}{\gamma\lambda_2 - 2\alpha}$$

şi se vede că: *tangenta în* O *la curba descrisă de punctul* N *este aceeaş pentru toate dreptele* Δ *care trec printr'un acelaş punct al tangentei în* O *la curba dată.*

Dacă Δ este dreapta dela infinit coeficientul unghiular este $1/R\gamma_2$.

C) $\gamma = 0 \ , \ 1 + \lambda_1 = 0 \ , \ \alpha \neq 0 \ , \ \lambda_2 \neq 0$. Avem:

$$\xi = -\frac{2}{\lambda_2} + \left(2 - \frac{2\beta}{\alpha\lambda_2 R}\right) . s + \ldots$$

$$\eta = -\left(\frac{1}{2R} - \frac{R'}{3R^2\lambda_2}\right) . s^2 + \ldots$$

prin urmare:

Δ *fiind o dreaptă care trece prin* O *şi arcele* OM *şi* OM_1 *fiind echivalente în valoare absolută, curba descrisă de* N *este tangentă într'un punct fix la tangenta în* O *dusă curbei date.*

Dacă în loc de $\alpha \neq 0$ presupunem $\alpha = 0$ dreapta Δ este însăşi tangenta în O şi coeficientul unghiular al tangentei la curba descrisă de N este egal cu q_4/p_4.

6. Să presupunem că: $s_1 = -s$.

Δ fiind oricare avem

$$\xi = -\frac{\alpha}{\gamma} \cdot s^2 + \ldots, \quad \eta = \frac{1}{2R} \cdot s^2 + \ldots$$

şi coeficientul unghiular al tangentei la curba (N) este

$$-\frac{\gamma}{2R\alpha}.$$

De aci rezultă o construcţie simplă al acestei tangente:

Fie D punctul unde dreapta Δ tae tangenta în O la curba dată, C centrul de curbură în O şi C_1 un punct pe prelungirea OC aşa ca: $CC_1 = OC$. Tangenta cerută este perpendiculară dusă din O pe C_1D.

Dacă Δ trece prin O în geneal curba (O) este tangentă curbei date în O. Dacă însă Δ este însăşi tangenta OT, curba (N) traversează curba dată, în O coeficientul unghiular al tangentei la curba (N) fiind: $\frac{3}{2R'}$.

Dar dacă notăm prin ρ raza de curbură a desfăşuratei curbei date în punctul O avem în valoare absolută:

$$RR' = \rho.$$

De aci rezultă următoarea construcţie a tangentei:

Considerăm porţiunea tangentei OT în sensul în care razele de curbură cresc. Pe prelungirea lui OC luăm un punct C_2 astfel ca: $CC_2 = 2 \cdot OC$. Se ia un segment C_2C_3 perpendicular pe OC_2 egal cu 2ρ şi în acelaş sens cu OT. Tangenta cerută este OC_3.

Să presupunem că punctele M în M_1 sunt aşa luate încât OM şi OM_1 să fie egal înclinate pe OT. Avem

$$x_1 y + x y_1 = 0$$

de unde:

$$\lambda_1 - 1 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{2R'}{3R}.$$

Să aflăm tangenta la locul mijlocului segmentului MM_1 în punctul O. Aci dreapta Δ este dreapta dela infinit. Se vede uşor că coeficientul unghiular este tot: $3/2R'$. Avem deci aceeaşi construcţie a tangentei ca mai sus.

Această din urmă problemă a fost propusă de D-l GH. ŢIŢEICA în «G. M.», vol. XI, p. 100 sub numărul 1058.

TIBERIU POPOVICIU.

NOTE MATEMATICE

47. *Asupra numerelor terminale ale pătratelor.* Am arătat [1]), că în sistemul zecimal nu există niciun pătrat de una din formele *abab* , *abba* , *aabb*.

Voiu arăta în cele ce urmează că există însă pătrate perfecte terminate cu formele precedente de 4 cifre, exceptând cazul evident

$$a = b = 0.$$

1°. *Pătrate terminate în abab.* Pentru a găsi forma tuturor acestor pătrate N^2, observ că numărul de 4 cifre de forma $n = abab$, cu care el se poate termina nu poate fi decât unul din următoarele:

$n = 0404,\ 1616,\ 2121,\ 2929,\ 3636,\ 6161,\ 6464,\ 6969,\ 9696$ [2]).

Am relatat în *Mathesis* 1934 (în supliment) problema care constă în a găsi pătratele terminate la dreapta prin un număr dat de cifre [3]). Rezultă, aplicând acea problemă, că numerele N cores-

1) *Gazeta Matematică,* Vol. XXXVII, pag. 41.

2) V. THÉBAULT. *Mathesis* (supplément 1934 — 4).

3) Problema aceasta a fost tratată şi în *Gazeta Matematică* de D-l I. V. MĂTIEŞ şi anume în Vol. XXXVII, pag. 366 pentru pătrate şi în Vol. XLI, pag. 332 pentru cuburi.

N. R.

punzătoare valorilor succesive ale lui n din şirul precedent, sunt următoarele :

$n = 0404$; $N = 2500p \pm 102$

$n = 1616$; $N = 2500p \pm 204$

$n = 2121$; $N = 5000p \pm 3989$

$n = 2929$; $N = 5000p \pm 557$ şi $N = 5000p \pm 673$

$n = 3636$; $N = 5000p \pm 4694$

$n = 6161$; $N = 5000p \pm 369$ şi $N = 5000p \pm 881$

$n = 6464$; $N = 5000p \pm 2092$

$n = 6969$; $N = 5000p \pm 563$

$n = 9696$; $N = 5000p \pm 264$.

2⁰. *Pătrate terminate în abba.* In acest caz n nu poate fi decât 1001, 1441, 1881, 4004, 4224, 4884, 5225, 9009, 9449, 9889 şi N va fi de una din formele

$n = 1001$; $N = 5000p \pm 1$

$n = 1441$; $N = 5000p \pm 521$ şi $N = 5000p \pm 729$

$n = 1881$; $N = 5000p \pm 109$

$n = 4004$; $N = 2500p \pm 2$

$n = 4224$; $N = 5000p \pm 1332$

$n = 4884$; $N = 5000p \pm 2378$

$n = 5225$; $N = 5000p \pm 515$

$n = 9009$; $N = 5000p \pm 1503$

$n = 9449$; $N = 5000p \pm 3357$

$n = 9889$; $N = 5000p \pm 1833$.

3⁰. *Pătrate terminate în aabb.* Numărul n nu poate fi decât 2244, 3344, 6644, 7744 şi atunci avem

$n = 2244$; $N = 5000p \pm 838$

$n = 3344$; $N = 5000p \pm 4312$

$n = 6644$; $N = 2500p \pm 238$

$n = 7744$; $N = 2500p \pm 88$.

V. THÉBAULT
Le Mans (Franţa).

48. *Curiozităţi aritmetice.* In nota cu acest titlu dela pag. 53 Vol. XXXV, *Gazeta Matematică,* D-l V. THÉBAULT observă că pătratele

$$36^2 = 1296 \quad \text{şi} \quad 336^2 = 112896$$

au ultimul grup de 2 (sau 3) cifre egal cu un multiplu al primului grup de 2 (sau 3 cifre).

Atât la primul cât şi la ultimul din aceste pătrate se mai observă că:

$$8 \times 12 = 96\ ,\ 3 \times 12 = 36 \quad \text{şi} \quad 8 \times 112 = 896\ ,\ 3 \times 112 = 336.$$

Ne propunem a găsi toate numerele N pentru care pătratul lui $3 \times N$ să se obţină prin *sudarea* numerelor N şi $8 \times N$.

Avem de examinat 2 cazuri.

1°. Când:

$$(3 \times N)^2 = N \times 10^n + 8n \qquad (1)$$

în care n este numărul cifrelor lui 8N. Din (1) se scoate

$$N = \frac{10^n + 8}{9} = \underbrace{11\ldots12}_{n-1}$$

$$\therefore \quad 8N = \underbrace{88\ldots896}_{n-2} \quad \text{şi} \quad 3N = \underbrace{33\ldots36}_{n-1}$$

aşa că avem soluţia generală

$$\underbrace{33\ldots36}_{n-1}^2 = \underbrace{11\ldots12}_{n-1}\,\underbrace{88\ldots896}_{n-2}.$$

2°. Când

$$(3 \times N)^2 = 8N \times 10^n + N \qquad (2)$$

unde n este numărul cifrelor lui N. Din (2) se scoate:

$$N = \frac{8 \times 10^n + 1}{9}\,\underbrace{88\ldots89}_{n-1}$$

$$\therefore \quad 8N = \underbrace{711\ldots12}_{n-1} \quad \text{şi} \quad 3N = \underbrace{266\ldots67}_{n-1}$$

aşa că avem, pentru cazul 2°, soluţia generală

$$\underbrace{266\ldots67}_{n-1}^2 = \underbrace{711\ldots12}_{n-1}\,\underbrace{88\ldots89}_{n-1}.$$

Mai general, dacă N, p, q sunt numere întregi şi dacă

$$\frac{10^n + p}{q^2} \quad \text{sau} \quad \frac{p \times 10^n + 1}{q^2}$$

sunt numere întregi iar pN sau N are n cifre, atunci pătratul lui $q \times$ N se obţine prin *sudarea* numerelor N şi pN sau $p \times$ N şi N.

G-L GH. BUICLIU.

49. *O chestiune de concurs.*

Deoarece chestiunea de Algebră dată la clasa VIII-a, la concursul *Gazetei* din acest an, nu a fost tratată de niciun concurent, voiu da mai jos o schiţă a soluţiei, spre a se vedea că aceasta intra în posibilităţile de rezolvare pe care trebue să le aibă orice elev al clasei a opta.

1°. Fie ecuaţia de gradul al patrulea cu coeficienţi reali

(1) $$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

între rădăcinile căreia există relaţia

(2) $$x_3^2 + x_4^2 = u(x_1^2 + x_2^2).$$

Existenţa relaţiei (2) implică pe a uneia între u şi coeficienţii a, b, c, d, relaţie care se va obţine eliminând rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4, între (2) şi cele patru relaţiuni existând între coeficienţii şi rădăcinile ecuaţiei (1).

Eliminarea se poate face în mai multe moduri: observând însă că în (2) figurează numai pătratele rădăcinilor ecuaţiei (1), este preferabil să formăm mai întâi ecuaţia care are ca rădăcini pătratele rădăcinilor ecuaţiei (1). Aceasta se obţine, fie eliminând pe x între (1) şi $x^2 = y$, fie formând ecuaţia $f(x)\, f(-x) = 0$ şi înlocuind apoi pe x^2 prin y. Vom obţine, pe o cale sau alta, o ecuaţie de forma

(3) $$F(y) = y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0.$$

Insemnând prin y_1, y_2, y_3, y_4, rădăcinile acestei ecuaţii, vom avea

(4) $$(y_1 + y_2) + (y_3 + y_4) = -A,$$

(5) $$(y_1 + y_2)(y_3 + y_4) + y_1 y_2 + y_3 y_4 = B,$$

(6) $$y_1 y_2 (y_3 + y_4) + y_3 y_4 (y_1 + y_2) = -C,$$

(7) $$(y_1 y_2)(y_3 y_4) = D,$$

la care adăugăm ceeace devine (2)

$$(8) \qquad y_3 + y_4 = u(y_1 + y_2).$$

Din (4) şi (8) deducem

$$(9) \quad y_1 + y_2 = -\frac{A}{1+u}, \quad y_3 + y_4 = -\frac{Au}{1+u}$$

cu cari (5) şi (6) devin

$$(10) \qquad y_1 y_2 + y_3 y_4 = B - \frac{A^2 u}{(1+u)^2},$$

$$u y_1 y_2 + y_3 y_4 = \frac{C(1+u)}{A}.$$

Valorile lui $y_1 y_2$, $y_3 y_4$, scoase din aceste relaţiuni şi introduse în (7), dau după oarecari simplificări

$$(11) \quad \varphi(u) = (C^2 - ABC)(1+u)^6 + A^2 D(1-u)^2 (1+u)^4$$
$$+ A^2 (AC + B^2) u (1+u)^4 - 2A^4 B u^2 (1+u)^2 + A^6 u^3 = 0,$$

ecuaţie de gradul al şaselea în u, care se constată uşor că este reciprocă, observând că rămâne neschimbată dacă înlocuim u prin $\frac{1}{u}$.

2°. Rezultatul acesta era de prevăzut. In adevăr, relaţiunea (2) se poate scrie

$$u = \frac{x_3^2 + x_4^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

şi se vede că, permutând rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 în toate modurile posibile, expresiunea u ia $C_4^2 = 6$ valori distincte, două câte două inverse una alteia căci, valorii lui u de mai sus îi corespunde şi valoarea

$$u' = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2} = \frac{1}{u}.$$

3°. Scriind ecuaţia (11) sub forma

$$(12) \qquad \varphi(u) = \alpha(u^6 + 1) + \beta u (u^4 + 1)$$
$$+ \gamma u^2 (u^2 + 1) + \delta u^3 = 0,$$

o putem uşor reduce la o ecuaţie de gradul al treilea efectuând schimbarea cunoscută

$$u + \frac{1}{u} = v; \tag{13}$$

vom obţine

$$\psi(v) = \alpha v^3 + \beta v^2 + (\gamma - 3\alpha) v + \delta - 2\beta = 0, \tag{14}$$

care are cel puţin o rădăcină reală. Acestei rădăcini reale v îi corespund două rădăcini pentru ecuaţia (11), date de ecuaţia (13); acestea sunt reale dacă $v^2 - 4 \geqslant 0$, adică dacă rădăcina v a ecuaţiei (14) este exterioară intervalului $(-2, +2)$, putând fi chiar egală cu una din limite. Dacă atunci efectuăm schimbarea de necunoscută

$$z = \frac{v-2}{v+2}$$

ecuaţia ce se obţine din (14), adică

$$\Psi(z) = 8\alpha(1+z)^3 + 4\beta(1+z)^2(1-z) + 2(\gamma - 3\alpha)(1+z)(1+z)^2 + (\delta - 2\beta)(1-z)^3 = 0 \tag{15}$$

trebue să aibă o rădăcină pozitivă, $\Psi(0)\,\Psi(\infty) < 0$, adică

$$4(\alpha+\gamma)^2 - (2\beta+\delta)^2 \leqslant 0.$$

4°. Din cele de mai sus rezultă imediat o metodă pentru rezolvarea ecuaţiei generale de gradul al patrulea (1): vom forma ecuaţia (11), apoi (14), căreia îi vom determina o rădăcină, cu care vom determina o valoare a lui u, graţie relaţiei (13). Valoarea lui u, astfel determinată, introdusă în (9) şi (10) completează rezolvarea.

Putem chiar evita formarea şi rezolvarea ecuaţiei (14), dacă putem găsi direct o rădăcină a ecuaţiei (12), ca de exemplu, în cazul rădăcinilor întregi sau fracţionare.

M. G.

50. *Rezolvarea unui sistem diofantian în numere întregi.* In soluţia dată în Nota No. 38, pentru rezolvarea în numere întregi a sistemului diofantian:

$$b^2 + c^2 + d^2 = 2a^2,$$

$$b^4 + c^4 + d^4 = 2a^4,$$

D-l A. GLODEN pune o condiție restrictivă, care nu este necesară și care face să se piardă un mare număr de soluții ale problemei.

In adevăr, ajungând la condiția ca z^2+3 să fie pătrat, D-sa pune $z^2+3=(z+t)^2$ în care t este un *întreg*. Ori aceasta nu este *necesar* căci luând $d=1$, D-sa este ținut — după cum chiar singur o spune — să găsească valori *raționale* pentru *a, b, c,* deci este *necesar* ca t să fie *rațional.* In aceste condițiuni, punând $t=\frac{u}{v}$, în care de astă dată u și v sunt numere *întregi,* soluția D-lui A. GLODEN se transformă în:

$$(A)\quad a=\pm k(u^2+3v^2)\,,\ b=\pm k(u^2-2uv-3v^2),$$
$$c=\pm k(u^2+2uv-3v^2)\,,\ d=\pm 4kuv,$$

în care semnele *nu* se corespund, iar k este un factor de proporționalitate.

Ca aplicație, dacă luăm $u=1$, $v=2$, obținem soluția

$$15^2+7^2+8^2=2\,.\,13^2\quad,\quad 15^4+7^4+8^4=2\,.\,13^4$$

care, cu toată bunăvoința, nu rezultă din formulele D-lui A. GLODEN pentru nici o valoare întreagă a lui t.

Ar fi de văzut dacă nu cumva formulele (A) reprezintă soluția cea mai generală în numere întregi a sistemului considerat.

M. G.

51. *O ecuație funcțională.*

Ne propunem a rezolva ecuația funcțională:

$$(1)\quad a f^m(x+y)+b f^n(x)+c f^p(x-y)=0.$$

Facem $y=\pm x$ și avem:

$$a f^m(2x)+b f^n(x)+c f^p(0)=0$$

$$a f^m(0)+b f^n(x)+c f^p(2x)=0$$

sau prin scădere:

$$a f^m(2m)-c f^p(2x)=a f^m(0)-c f^p(0);$$

care derivată în raport cu x dă:

$$[ma\, f^{m-1}(2x) - pc\, f^{p-1}(2x)]\, f'(2x) = 0$$

şi dacă presupunem $f(x) \neq$ const.; atunci trebue să avem:

$$m = p \quad ; \quad a = c.$$

Făcând acum în (1) $y = 0$ se are:

$$2a\, f^m(x) + b\, f^n = 0$$

şi conform ipotezei de mai sus avem:

$$m = n \quad ; \; b = -2a,$$

şi astfel ecuaţia (1) devine:

$$(1') \qquad f^n(x+y) - 2f^n(x) + f^n(x-y) = 0;$$

unde notând:

$$f^n(x) = \mathrm{F}(x)$$

se are:

$$(2) \qquad \mathrm{F}(x+y) - 2\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x-y) = 0$$

care relaţie conform lemei lui SCHWARZ spune că:

$$\mathrm{F}(x) = \alpha x + \beta$$

unde α şi β sunt două constante.

Astfel fiind ecuaţia (1) are soluţia:

$$f(x) = (\alpha x + \beta)^{\frac{1}{n}}.$$

Pentru cazurile: $n = -1\,;\, \frac{1}{2}\,;\, 1\,;\, 2$; ecuaţia (1) se află studiată de D-l Profesor A. ANGELESCU în «G. M». — XXXII — 281.

HAR. IONESCU-BISS.

52. *O nouă generalizare a problemei 4624* [1]). Se dau progresiile aritmetice:

$$\div\, a_1 . a_2 \ldots a_n \quad \text{şi} \quad \div\, b_1 . b_2 \ldots b_n$$

de raţii r, r_1 şi se cere suma:

$$S = a_1 b_1 + a_2(b_1 + b_2) + \ldots + a_n(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

---

1) A se vedea soluţia dela pag. 449 şi nota dela pag. 527, Vol. XLI.

Se găseşte uşor

$$S = \frac{n(n+1)}{2} a_1 b_1 + \frac{n(n^2-1)}{6}(2b_1 r + a_1 r_1) + \frac{n(n^2-1)(3n-2)}{24} rr_1 .$$

In mod analog considerând progresiile geometrice

$$\therefore a_1 : a_2 : \ldots : a_n \quad \text{şi} \quad \therefore b_1 : b_2 : \ldots : b_n$$

de raţii p şi q se găseşte

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (b_1 + b_2 + \ldots b_i) = \frac{a_1 b_1}{q-1}\left[\frac{q(p^n q^n - 1)}{pq-1} - \frac{p^n - 1}{p-1}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i (b_1 + b_2 + \ldots b_i) = \frac{a_1 b_1}{q-1}\left[\frac{q(p^n q^{2n} - 1)}{pq^2-1} - \frac{p^n q^n - 1}{pq-1}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_1 + a_2 + \ldots a_i)(b_1 + b_2 + b_i)$$

$$= \frac{a_1 b_1}{(p-1)(q-1)}\left[\frac{pq(p^n q^n - 1)}{pq-1} - \frac{p(p^n - 1)}{p-1} - \frac{q(p^n - 1)}{q-1} + n\right].$$

N. DOBRESCU
Prof. R.-Sărat.

BIBLIOGRAFIE

Mathesis. Vol. L. No. 5. Mai 1936. Gembloux. Asupra unei formule quasi-binomiale, de M. LURQUIN. Asupra afinităţii complexe şi asupra dreptei lui SIMSON, de R. GOORMAGHTIGH. Probleme de aritmetică, de V. THÉBAULT. Asupra varietăţilor hiperbolice, de LILA GUSSENHOVEN. Curbe, situate pe cilindri sau pe conuri, ale căror plane tangente fac cu planele osculatoare un unghiu constant, de R. DEAUX. Conicele în câmpurile de involuţii eliptice de drepte, de P. DELENS.

BIBLIOTECA CENTRALĂ a „ASOCIAŢIUNII" SIBIIU

Deutsche Mathematik. Anul I. Fasc. I. Ianuarie 1936. Leipzig. ALEXANDER VON BRILL, de E. SCHÖNHARDT. Evoluţia istorică a studiului transformării lineare şi sferice, de E. A. WEISS. Asupra teoremei deviaţiei lui POISSON, de TH. VAHLEN. O inegalitate caracteristică pentru sferă, de EDM. SGHOLZ. Asupra spaţiului total diferenţial geometric, de W. RINOW. O varietate de drepte izotrope în spaţiu euclidian pluridimensional, de HERBERT KNOTHE. Suprafeţele de ordinul al doilea care sunt de două feluri în sensul apolar reciproc, de AUGUST KAMPMANN. Asupra variaţei modulului la mărimea domeniului de operaţie, de WERNER WEBER. Asupra teoriei interpolării, de UDO WEGNER. O caracterizare simplă a continuului convex în R_3, de GEORG AUMANN.

Revista Matematică din Timişoara. Anul XVI. No. 5. 15 Iulie 1936. Generalizarea unei teoreme a lui FOURET, de CAIUS IACOB.

Idem. Anul XVI. No. 6. 15 August 1936. Asupra triunghiurilor speciale, de V. THÉBAULT. O problemă de teoria numerelor, de GH. CONSTANTINESCU.

Journal de Mathématiques Élémentaires, publié par H. VUIBERT. Anul LX. No. 19. 1 Iulie 1936. Paris.

Idem. Anul LX. No. 20. 15 Iulie 1936. Paris.

Sphinx. Revue mensuelle de questions récréatives. Anul VI. No. 8. August 1936. Bruxelles.

Buletinul „I. R. E". Anul IV. No. 1. Martie 1936. Organ al *Institutului naţional român pentru studiul amenajării şi folosirii izvoarelor de energie).* Bucureşti.

Buletinul Soc. Politecnice. Vol. L. No. 4. Aprilie 1936. Bucureşti.

Idem. Vol. L. No. 5. Mai 1936. Bucureşti.

Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. Vol. CXXI. Fasc. IV. Aprilie 1936. Buenos-Aires.

Boletin Matematico. Anul IX. No. 3. Buenos-Aires. Număr omagial pentru JOSÉ S. CORTI, pentru aniversarea a 75 de ani etate. Cele opt operaţiuni fundamentale ale aritmeticei, de B. I. BAIDAFF. Aritmetica coeficienţilor sistemului metric, de B. I. BAIDAFF.

Revista Ştiinţifică „V. Adamachi". Anul XXII. No. 2. Aprilie-Iunie 1936. Iaşi.

Buletinul Şedinţelor. Societatea Română de Ştiinţe. Anul I. No. 1. 1936. Bucureşti.

Chestiuni de Examen. Fasc. IV. (Publicaţia *Soc. Lic. în Matematici dela Universitatea din Cluj).* Litografiată. Cuprinde chestiunile propuse la Facultatea de Ştiinţe din Cluj, în sesiunile anului 1935, însoţite şi de soluţiuni. 1936. Cluj.

J. Watt şi A.-M. Ampère. Comemorarea lor centenară. Cuprinde cuvântările rostite la festivitatea organizată de Soc. Română de Ştiinţe şi Soc. Politecnică. 1936. Bucureşti.

M. VOLBERG. Promenade récréative au pays d'EINSTEIN. Gauthier-Villars. 1936. Paris.

INGINER A. D. BUNESCU. Normalizarea în industria grafică românească. Fasc. VI. (Publicaţia *Institutului românesc de organizarea ştiinţifică a muncii).* 1936. Bucureşti.

INGINER A. D. BUNESCU. Industria grafică de Stat. (Extras din *Buletinul Soc. Politecnice).*

A. MYLLER. *Curs de geometrie analitică,* pentru elevii Clasei VIII-a, Secţia ştiinţifică. Editura Seminarului matematic, Iaşi. Preţul 75 lei. Iaşi. 1936.

Se vinde în folosul Seminarului Matematic de pe lângă Universitatea din Iaşi.

CERERI

259. Se cunoaşte egalitatea:

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

Mai există alte funcţiuni de m şi n întregi şi pozitivi care să satisfacă această relaţie? Cum s'ar putea determina ele dacă ar exista?

Din consideraţiunea relaţiei funcţionale de mai sus s'ar putea deduce direct expresiunea generală a coeficienţilor binomului, indiferent dacă pentru aceasta ar trebui să ne dăm unele condiţiuni suplimentare?

EUGEN VISA.

DIVERSE

Sporirea Bibliotecii

Handbuch der Ingenieurwissenschaften.

I. Band: Vorarbeiten Erd, — Strassen, — Grund — und Tunnelbau:

I. Abteilung, Leipzig 1883.
II. „ „ 1884.
III. „ „ 1887.

Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

Handbuch der Ingenieurwissenschaften.
III. Band : Der Wasserbau.
I. Abteilung, Leipzig 1882.
II. „ „ 1882 şi 1895.
Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

Handbuch der Ingenieurwissenschaften.
H. GÖRGES & K. ZICKLER.
Die Elektrotechnik in ihrer Anwendung auf das Bauwesen.
Leipzig 1890.
Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

Handbuch der Ingenieurwissenschaften.
II. Band : Der Brückenbau.
I. Abteilung, Leipzig 1886.
II. „ „ 1890.
III. „ „ 1888.
IV. „ „ 1888.
Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

M. SCHWARTE. Technik des Kriegswesens.
Leipzig-Berlin 1913.
Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

EDMUND HENSINGER VON WALDEGG.
Handbuch für Specielle Eisenbahn-Technik,
Erster Band, Leipzig 1877.
Alas Leipzig 1877.
Donată de D-l A. D. BUNESCU, Inginer.

BARBU ŞTEFĂNESCU. Noţiuni de aritmetica practică. Pentru uzul classiloru primarie de ambe-sexe. Ediţia V. Bucureşti 1870.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

IOHANNES KRANER. Probleme aritmetice. Manualu pentru usulu şcoalelor primare, secundare şi comerciale, conţinând 6000 probleme. Bucureşti 1888.
Donată de D-l I. IONESCU, Inginer.

A. D. BUNESCU. Inginerul în industria grafică.
Donată de D-l Inginer A. D. BUNESCU.

AL. I. STOENESCU. Probleme de mecanică.
Donată de D-l AL. I. STOENESCU.

PROBLEME REZOLVATE

PROBLEMA 4349. *Să se găsească limita*

$$\lim_{x=0} \frac{n^3 \sin mx + m^3 \operatorname{sh} nx - mn\,(m^2 + n^2)}{p^3 \operatorname{tg} qx + q^3 \operatorname{th} px - pq\,(p^2 + q^2)}.$$

ŞT. E. OLTEANU.

Soluţie dată de D-ra MARGARETA CARACUDOVICI (studentă), de D-nii NEGREA A. MIRCEA (Brăila) şi TUDOR STOICESCU. Folosind seriile care reprezintă funcţiunile trigonometrice şi seriile care reprezintă funcţiunile hiperbolice, putem scrie

$$\sin mx = mx - \frac{m^3x^3}{6} + \frac{m^5x^5}{120} + \lambda_1 x^7,$$

$$\mathrm{sh}nx = nx + \frac{n^3x^3}{6} + \frac{n^5x^5}{120} + \lambda_2 x^7,$$

$$\mathrm{tg}qx = qx + \frac{q^3x^3}{3} + \frac{2q^5x^5}{15} + \lambda_3 x^7,$$

$$\mathrm{th}px = px - \frac{p^3x^3}{3} + \frac{2p^5x^5}{15} + \lambda_4 x^7,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sunt patru funcţiuni de x, care pentru $x = 0$ iau valori *finite* şi diferite de zero. Introducând aceste valori în expresia dată găsim, făcând toate reducerile,

$$\lim_{x=0} \frac{\dfrac{n^3m^3(m^2+n^2)}{120} + (n^3\lambda_1 + m^3\lambda_2)\,x^2}{\dfrac{2p^3q^3(p^2+q^2)}{15} + (p^3\lambda_3 + q^3\lambda_4)\,x^2} = \frac{m^3n^3(m^2+n^2)}{16p^3q^3(p^2+q^2)},$$

care este limita căutată.

Observări. 1°. Au dat soluţii foarte bune aplicând regula lui l'HOSPITAL, D-ra M. DRĂGUŢ (stud. Cluj) şi D-nii: A. ARŞAVSCHI, C. I. CHIRIAC, GH. STĂNCULESCU.

2°. D-nii: M. F. AMĂRĂŞTEANU şi D. D. MAVRODIN au înlocuit funcţiunile hiperbolice prin funcţiunile trigonometrice corespunzătoare şi au găsit ca limită: $-\dfrac{m^3n^3}{2p^3q^3}$.

3°. Afară de soluţiile menţionate s'au mai primit încă 12 soluţii dela lic. Militar din Cernăuţi *identice*, precum şi 4 soluţii conţinând greşeli de calcul.

Gh. Th. Gh.

PROBLEMA 4425. *Se consideră parabola cu focarul în* O *şi se ia pe raza vectoare* OM *segmentul* $\overline{MP} = a$. *Fie* (C) *curba descrisă de punctul* P. *Să se calculeze în funcţie de* $\overline{OM} = r$, *distanţa dela focarul* O *până la punctul* T, *unde tangenta în* P *la curba* (C) *taie axa parabolei.*

Să se trateze aceeaşi problemă înlocuindu-se parabola cu o elipsă sau cu o iperbolă.

D. V. IONESCU.

Soluţie. Să considerăm conica (Γ) cu focarul în O, având pe Ox ca axă de simetrie, excentricitatea egală cu e şi parametrul egal cu p. Se ştie că ecuaţia conicei este în coordonate polare

$$(1) \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} .$$

Coordonatele punctului P în funcţie de θ sunt

$$x = (r + a)\cos\theta$$

$$y = (r + a)\sin\theta$$

unde r este dat de formula (1).

Coeficientul unghiurilor al tangentei în P la curba (C) este

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{(r + a)\cos\theta + r'\sin\theta}{-(r + a)\sin\theta + r'\cos\theta} .$$

Derivând ecuaţia (1) găsim

$$-re\sin\theta + r'(1 + e\cos\theta) = 0$$

de unde

$$r' = \frac{r^2 e \sin\theta}{p} .$$

Urmează că

$$m = \frac{p(r + a)\cos\theta + r^2 e\sin^2\theta}{-p(r + a)\sin\theta + r^2 e\sin\theta\cos\theta} .$$

Ecuația tangentei în P la curba (C) este

$$Y-(r+a)\sin\theta=\frac{p(r+a)\cos\theta+r^2e\sin^2\theta}{-p(r+a)\sin\theta+r^2e\sin\theta\cos\theta}[X-(r+a)\cos\theta.$$

Făcând $Y=0$, găsim că distanța $OT=X$ este dată de formula

$$X=(r+a)\cos\theta+(r+a)\sin\theta\frac{p(r+a)\sin\theta-r^2e\sin\theta\cos\theta}{p(r+a)\cos\theta+r^2e\sin^2\theta}.$$

sau

$$X=\frac{p(r+a)^2}{p(r+a)\cos\theta+r^2e(1-\cos^2\theta)}.$$

Din ecuația (1) scoatem

$$\cos\theta=\frac{p-r}{re}$$

și

$$p(r+a)\cos\theta+r^2e(1-\cos^2\theta)=\frac{p(r+a)(p-r)}{re}$$

$$+\frac{r^2e^2-(p-r)^2}{e}=\frac{(e^2-1)r^3+pr^2-apr+ap^2}{re}.$$

Deci

$$X=\frac{epr(r+a)^2}{(e^2-1)r^3+pr^2-apr+ap^2}.$$

In cazul parabolei $e=1$ și avem

$$X=\frac{r(r+a)^2}{r^2-ar+ap}.$$

Dacă în formulele precedente se face $a=0$, curba (C) se confundă cu conica Γ și avem formula cunoscută

$$X_1=\frac{epr}{(e^2-1)r+p}$$

care pentru parabolă ($e = 1$) se reduce la

$$X_1 = r.$$

Au rezolvat problema D-nii: CONST. I. BERDAN, Bucureşti; IANCU N. SAGER; GEORGE SILAŞ, student Cluj; SERGIU TARASCIUC.

PROBLEMA 4521. *Fiind date patru funcţiuni de* x, f_1, f_2, f_3, f_4, *să se demonstreze că există două funcţiuni* u *şi* v, *astfel încât să avem:*

$$\begin{vmatrix} f'_1 & f_1^2 & f_1 & 1 \\ f'_2 & f_2^2 & f_2 & 1 \\ f'_3 & f_3^2 & f_3 & 1 \\ f'_4 & f_4^2 & f_4 & 1 \end{vmatrix} = u'v - v'u,$$

unde F′ *înseamnă derivata lui* F. *Să se arate că* $\frac{u}{v}$ *este tocmai raportul anarmonic al celor patru funcţiuni, din care să se deducă, în fine, proprietatea caracteristică a ecuaţiei lui* RICCATI.

M. GHERMĂNESCU.

Soluţie dată de D-nii: MIRCEA-LEONTE A. NEGREA şi SERGIU TARASCIUC (licenţiaţi în Matematici) şi DIM. MAVRODIN (student). Să însemnăm cu D determinantul din enunţ, pe care să-l desvoltăm după elementele primei coloane, observând că minorii corespunzători sunt determinanţi VAN DER MONDE; obţinem

$$D = f'_1(f_2-f_3)(f_3-f_4)(f_2-f_4) - f'_2(f_1-f_3)(f_3-f_4)(f_1-f_4)$$
$$+ f'_3(f_1-f_2)(f_2-f_4)(f_1-f_4) - f'_4(f_1-f_2)(f_2-f_3)(f_1-f_3)$$

sau prin transformări succesive,

$$D = f'_1[(f_2-f_3)(f_1-f_4)(f_2-f_4) - (f_1-f_3)(f_2-f_4)(f_2-f_3)]$$
$$- f'_2[(f_1-f_3)(f_2-f_4)(f_1-f_4) - (f_2-f_3)(f_1-f_4)(f_1-f_3)]$$
$$+ f'_3[(f_1-f_3)(f_2-f_4)(f_1-f_4) - (f_2-f_4)(f_2-f_3)(f_1-f_4)]$$
$$- f'_4[(f_2-f_3)(f_1-f_4)(f_1-f_3) - (f_1-f_3)(f_2-f_4)(f_2-f_3)],$$

$$D=(f_2-f_3)(f_1-f_4)[f'_1(f_2-f_4)-f'_4(f_1-f_3)-f'_3(f_2-f_4)+f'_2(f_1-f_3)]$$
$$-(f_1-f_3)(f_2-f_4)[f'_1(f_2-f_3)+f'_2(f_1-f_4)-f'_3(f_1-f_4)-f'_4)(f_2-f_3)],$$
$$D=(f_2-f_3)(f_1-f_4)[(f_2-f_4)(f'_1-f'_3)+(f_1-f_3)(f'_2-f'_4)]$$
$$-(f_1-f_3)(f_2-f_4)[(f_2-f_3)(f'_1-f'_4)+(f_1-f_4)(f'_2-f'_3)],$$
$$D=(f_2-f_3)(f_1-f_4)[(f_2-f_4)(f_1-f_3)]'$$
$$-(f_2-f_4)(f_1-f_3)[(f_2-f_3)(f_1-f_4)]'.$$

Se vede imediat că cele două funcţiuni $u(x)$ şi $v(x)$ sunt:

$$u(x)=(f_2-f_3)(f_1-f_4),\ v(x)=(f_2-f_4)(f_1-f_3),$$

astfel încât

$$D=u'v-v'u.$$

Avem apoi:

$$\frac{u}{v}=\frac{(f_2-f_3)(f_1-f_4)}{(f_2-f_4)(f_1-f_3)}=\frac{f_2-f_3}{f_2-f_4}:\frac{f_1-f_3}{f_1-f_4}=(f_1,f_2,f_3,f_4),$$

adică tocmai raportul anarmonic al celor patru funcţiuni.

Fie acum o ecuaţie diferenţială tip RICCATTI

$$y'=Ay^2+By+C,$$

în care A, B, C sunt în general funcţiuni de x. Dacă f_1, f_2, f_3, f_4 sunt soluţii particulare ale acestei ecuaţii, avem:

$$f'_i=Af_i^2+Bf_i+C,\qquad i=1,2,3,4$$

între care, eliminând pe A, B, C, obţinem tocmai $D=0$ care este, în virtutea celor de mai sus, echivalentă cu

$$u'v-v'u=0,$$

din care deducem, împărţitul prin uv

$$\frac{u'}{u}-\frac{v'}{v}=0$$

sau

$$\left(\log \frac{u}{v}\right)' = 0,$$

deci $\frac{u}{v} = \text{const.}$

Regăsim astfel proprietatea caracteristică a ecuației lui RICCATI: *Raportul anarmonic a patru integrale particulare distincte este constant.*

Notă. 1. Din cele de mai sus se pot deduce proprietățile corespunzătoare ale ecuației particulare de tip BERNOULLI:

$$y' = Ay^2 + By. \tag{1}$$

Nu avem decât să presupunem că ecuația lui RICCATI admite soluția particulară $f_4 = 0$, ceeace atrage $C \equiv 0$, astfel că ecuația lui RICCATI se reduce la cea de mai sus, iar funcțiunile u și v se reduc la:

$$u = \frac{f_2 - f_3}{f_2}, \quad v = \frac{f_1 - f_3}{f_1},$$

astfel că

$$\frac{u}{v} = \frac{f_2 - f_3}{f_2} : \frac{f_1 - f_3}{f_1} = k = \text{const.},$$

sau

$$f_1(f_2 - f_3) = kf_2(f_1 - f_3). \tag{2}$$

Ori, ecuația cea mai generală de tip BERNOULLI

$$y' = Ay^n + By \tag{3}$$

se poate reduce la (1) prin schimbarea de funcțiune $y = \sqrt[n-1]{z}$; urmează că:

Intre trei integrale particulare ale ecuației tip BERNOULLI

$$y' = Ay^n + By$$

există relațiunea:

$$f_1^{n-1}\left(f_2^{n-1} - f_3^{n-1}\right) = kf_2^{n-1}\left(f_1^{n-1} - f_1^{n-1}\right). \tag{4}$$

2. Se știe că ecuația generală de tip BERNOULLI, de forma (3), se poate reduce la o ecuație lineară prin schimbarea de funcțiune $y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{z}}$. Această posibilitate se datorește relațiunii (3) și apare ca un caz particular al următoarei proprietăți generale:

Dacă între trei soluţii particulare ale unei ecuaţii dijerenţiale de primul ordin

$$y' = F(x, y)$$

există o relaţiune

$$\Phi(f_1, f_2, f_3) = \text{const.},$$

atunci ecuaţia dată se poate reduce la o ecuaţie lineară.

Această proprietate remarcabilă a fost stabilită de D-nul G. MIHOC în teza de doctorat (Buletinul Soc. Române de Ştiinţe, t. 36).

M. G.

PROBLEMA 4549. *Să se formeze un număr şi pătratul său utilizând de câte două ori pe fiecare din cifrele 1, 2, 4, 8.*

G-L GH. BUICLIU.

Fie N şi N^2 numerele căutate. De oarece pătratul unui număr de n cifre are $2n$ sau $2n - 1$ cifre, cu cele 8 cifre date se va putea forma un număr N de 3 cifre şi unul N^2 de 5 cifre. Cum

$$10000 < N^2 \leqslant 99999$$

rezultă

$$100 < N \leqslant 316$$

şi ţinând seamă de cifrele date în enunţ

$$(1) \qquad 112 \leqslant N \leqslant 288.$$

In condiţiunile (1) şi cu cifrele date prin enunţ se pot forma următoarele 22 numere de 3 cifre:

112, 114, 118, 121, 122, 124, 128, 211, 212,

214, 218, 221, 224, 228, 241, 242, 244, 248,

281, 282, 284, 288.

Observ că numerele terminate cu 4 dau pătrate terminate cu 6, deci inacceptabile.

Apoi deoarece suma

$$2(1+2+4+8)=30$$

a cifrelor numerelor N şi N^2 se divide cu 3, urmează că

$$N+N^2=N(N+1)$$

trebue să se dividă cu 3. Deci unul din numerele N sau $N+1$ se divide prin 3, nu însă prin 9.

Rezultă că din şirul numerelor precedente neterminate cu 4, se vor reţine numai acele care sunt divizibile prin 3, fără a fi divizibile cu 9, şi acelea de forma *mult.* $3-1$.

Numărul N poate fi printre numerele

$$112,\ 122,\ 128,\ 212,\ 218,\ 221,\ 248,\ 281,\ 288$$

pe care ridicându-le la pătrat se găsesc soluţiile

$$122^2=14884 \quad \text{şi} \quad 221^2=48841.$$

Au găsit soluţiile exacte prin încercări mai numeroase D-nii: N. D. ŞTEFĂNESCU, V. L. FLORESCU (Lic. „N. Filipescu", Târgovişte); A. CĂLINESCU (Roşiorii de Vede); P. C. MAZILU; D. I. LEBĂDĂ (Lic. militar Iaşi); M. AMĂRĂŞTEANU (Craiova); C. N. GAVRILESCU (Bacău) şi M. GRUMĂZESCU (Şc. Ofiţeri de Artilerie).

D-l V. CEAUŞESCU (Lic. militar Tg.-Mureş) a găsit numai soluţia 221^2.

PROBLEMA 4565. *Se dau numerele:*

$$A=6!\ 10!\ 14!\ 15!\ 21!\ 35!\ 210!$$

$$B=2!\ 3!\ 5!\ 7!\ 30!\ 42!\ 70!\ 105!\ 2^{48}\cdot 3^{24}\cdot 5^{12}\cdot 7^{8}.$$

Să se arate că A *este divizibil cu* B, *fără să se facă împărţirea directă.*

MAIOR I. LINTEŞ.

In G. M., XXXI, pag. 84, se arată că formula produsului numerelor prime cu un număr dat N şi inferioare lui, este:

$$\Pi(N)=\frac{N!\ \Pi\left(\frac{N}{ab}\right)!\ \Pi\left(\frac{N}{abcd}\right)!\ldots}{\Pi\left(\frac{N}{a}\right)!\ \Pi\left(\frac{N}{abc}\right)!\ldots\ \Pi a^{\frac{\varphi(N)}{a-1}}\ldots}$$

unde $a, b, c, \ldots$ sunt factorii primi ai lui N şi $\varphi(N)$ este indicatorul lui N.

Dacă luăm $N = 210 = 2.3.5.7$, atunci constatăm, după formula dată că:

$$\Pi(N) = \frac{A}{B}$$

adică numerele A şi B se împart exact, având drept cât produsul numerelor prime cu *210* şi mai mici decât el.

Au rezolvat problema făcând desvoltările factorialelor şi împărţind direct D-nii: E. GABOVSCHI, M. F. AMĂRĂŞTEANU, şi încă trei corespondenţi cari nu au scris, în soluţia trimisă, enunţul complet al problemei.

I. L.

PROBLEMA 4579. *Cu cifrele 1, 2, 3,... 9 luate câte odată, să se formeze numere de trei cifre în progresie aritmetică.*

V. THÉBAULT.

Fie

$$N_1 = s_1 z_1 u_1 \quad ; \quad N_2 = s_2 z_2 u_2 \quad ; \quad N_3 = s_3 z_3 u_3$$

cele 3 numere aşa încât

$$(1) \qquad N_2 - N_1 \equiv N_3 - N_2$$

sau, ceeace este tot una,

$$100(2s_2 - s_1 - s_3) + 10(2z_2 - z_1 - z_3) + (2u_2 - u_1 - u_3) \equiv 0$$

oricare ar fi cifrele s_i, z_i, u_i. Această condiţiune este satisfăcută, dacă:

$$(2) \quad s_1 + s_3 = 2s_2 \quad ; \quad z_1 + z_3 = 2z_2 \quad ; \quad u_1 + u_3 = 2u_2$$

şi reciproc. Condiţiunile (2) arată că cifrele de acelaşi ordin ale celor 3 numere N_i sunt în progresie aritmetică.

Deci pentru a forma cu cifrele date numere N_i în progresie aritmetică este *necesar* şi *suficient*, a forma din acele cifre 3 grupe de câte 3 cifre în progresie aritmetică. Una din grupe va fi grupa cifrelor *s*, alta a cifrelor *z* şi alta a unităţilor *u*.

E uşor de stabilit că singurele grupe formate în aceste condiţiuni, cu cifrele 1, 2, 3,...9, sunt:

I) grupele: (1, 2, 3) ; (4, 5, 6) ; (7, 8, 9) de raţie 1

II) » : (1, 4, 7) ; (2, 5, 8) ; (3, 6, 9) » » 3.

In fiecare grupă s'au considerat cifrele numai în progresie crescătoare, ceeace nu este o restricţiune a condiţiilor (2) care arată că cifrele pot fi în progresii crescătoare sau descrescătoare. Ba mai mult, unele grupe pot fi în progresie crescătoare şi altele în progresie descrescătoare.

Din grupele I) şi II) pe care le numim grupe *fundamentale* se obţin grupe *derivate* schimbând între ele cifrele extreme. De exemplu (1, 2, 3) este o grupă fundamentală, iar (3, 2, 1) o grupă derivată. Se vede că o grupă fundamentală are o singură grupă derivată.

Fie g_1 o grupă fundamentală sau derivată a grupei (1, 2, 3) şi g_2, g_3 notaţiuni analoage pentru celelalte grupe ale şirului I). Se vede că la o grupă g_1 pentru sutele s se pot asocia 2 grupe g_2 sau 2 grupe g_3 pentru zecile z, deci avem 4 grupe care încep cu g_1. La fiecare din aceste grupe g_1g_2 sau g_1g_3 se pot asocia 2 grupe g_3 sau g_2 pentru unităţile u. Deci la o grupă g_1 vom avea 8 soluţiuni N_i. Cum avem 2 grupe g_1 înseamnă că vom avea în total 16 soluţiuni N_i, care au la sute cifrele 1, 2, 3 din grupa g_1.

Raţionând la fel pentru soluţiunile N_i care au la sute grupele g_2, g_3 sau ale celor 3 grupe din şirul II), rezultă că problema are în total 96 soluţiuni, a căror formaţiune nu este greu de găsit. Din aceste 96 soluţiuni, 48 sunt progresii aritmetice crescătoare şi 48 sunt progresii aritmetice descrescătoare.

Iată tabloul celor 48 progresii crescătoare:

÷ 123.456.789	÷ 213.546.879	÷ 417.528.639
÷ 129.456.783	÷ 219.546.873	÷ 419.528.637
÷ 132.465.798	÷ 231.564.897	÷ 437.528.619
÷ 138.465.792	÷ 237.564.891	÷ 439.528.617
÷ 147.258.369	÷ 273.546.819	÷ 471.582.693
÷ 149.258.367	÷ 279.546.813	÷ 473.582.691

÷ 167.258.349	÷ 291.564.837	÷ 491.582.673
÷ 169.258.347	÷ 297.564.831	÷ 493.582.671
÷ 174.285.396	÷ 312.645.978	÷ 714.825.936
÷ 176.285.394	÷ 318.645.972	÷ 716.825.934
÷ 183.456.729	÷ 321.654.987	÷ 734.825.916
÷ 189.456.723	÷ 327.654.981	÷ 736.825.914
÷ 192.465.738	÷ 372.645.918	÷ 741.852.963
÷ 194.285.376	÷ 378.645.912	÷ 743.852.961
÷ 196.285.374	÷ 381.654.927	÷ 761.852.943
÷ 198.465.732	÷ 387.654.921	÷ 763.852.941.

Se observă că, câte 6 din aceste 48 progresii au rațiile 89, 91, 109, 111, 267, 273, 327 și 333.

Notă. D-l C. SĂNDULACHE (Băseşti, Bacău) a dat cele 12 soluțiuni crescătoare cu rațiile 111 și 333.

D-şoara ALEXANDRA AL. VASILESCU (Lic. Carmen Sylva, Timişoara), a dat cele 12 soluțiuni crescătoare și descrescătoare cu rația 111.

D-l D. D. MATEI (Lic. Internat, Iași) a dat 24 soluțiuni.

G-L GH. B.

PROBLEMA 4608. *Fie* ABC *un triunghiu inscris în cercul* O, *iar* M *un punct pe* BC. *Proiecțiile lui* M *pe* AB *și* AC *le notăm cu* A_1 *și* A_2. *Să se arate că unghiul format de* A_1A_2 *cu diametrul vârfului* A *este egal cu unghiul format de* AM *cu* BC.

GH. VASILIU.

Fie A′ cealaltă extremitate a diametrului AO și fie P intersecția lui A_1A_2 cu diametrul AA′.

Pe figură se citește că:

$\sphericalangle A_1AA' = \sphericalangle MCA'$ ca având aceeași măsură, arcul BA′,

$\sphericalangle MCA' = \sphericalangle A_2MC$ ca alterne interne, deci

$$\sphericalangle A_1AP = \sphericalangle A_2MC.$$

In fine: $\sphericalangle AA_1A_2 = \sphericalangle AMA_2$ având aceeași măsură în cercul circumscris patrulaterului (inscriptibil prin construcție) AA_1MA_2.

Ori cum în triunghiul AA_1P, avem că:

$$\sphericalangle A_1AP + \sphericalangle AA_1P = \sphericalangle APA_2$$

deducem că:

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle APA_2 \qquad \text{c. c. t. d.}$$

Au rezolvat astfel problema D-ra VASILESCU A. ALEXANDRA (cl. VI lic. «Carmen-Silva», Timişoara) şi D-nii: APOSTOL V. RADU (Buzău), CHIRIŢĂ MIHAIL (şc. of. marină), DOBRESCU D. PAVEL (lic. milit. «N. Filipescu»), FLORESCU VICTOR (cl. V lic. milit. «N. Filipescu»), GRUMĂZESCU MIRCEA, NEGREA A. MIRCEA (Brăila), PETRESCU I. ION, POSTELNICESCU M. C. (lic. milit. «N. Filipescu»), ŞTEFĂNESCU D. NIC. (lic. milit. «Nic. Filipescu»), SILAŞ GEORGE (student, Cluj), STOICA AL. D. (lic. «Marele Voevod-Mihai») şi ŢIŢEICA IOAN ILIE (lic. milit. «N. Filipescu»).

Observări: 1°. Problema se poate enunţa mai general astfel: Un punct M din planul unui triunghiu ABC se proiectează pe laturile AB şi AC în A_1 şi A_2. Unghiul ce-l face AM cu latura BC este egal cu cel făcut de A_1A_2 cu diametrul AD. Demonstraţia rămâne aceeaşi.

2°. In cazul particular când M se confundă cu piciorul înălţimii vârfului A, depe latura BC, obţinem problema 282 din R. M. T.

3°. D-nul ŢIŢEICA IOAN ILIE, observă că: atunci când M este în B sau în C, A_1A_2 se confundă cu BB_h, CC_h, cari fac astfel cu AD unghiurile C şi B. Deci avem propoziţia: *„Înălţimile coborîte din două vârfuri ale unui triunghiu formează cu diametrul corespunzător celuilalt vârf un triunghiu asemenea cu cel de referinţă“.*

G. V.

PROBLEMA 4616. *Să se rezolve în numere întregi şi pozitive ecuaţia:*

$$x^2(x^2+y^2)+x^2(2xy+z)+xyz=1.$$

GH. VASILIU.

Ecuaţia dată se poate pune sub forma:

$$x\,(x+y)\,(x^2+xy+z)=1.$$

Şi cum rădăcinile ei, trebuesc să fie întregi pozitivi, evident că:

$$x=1$$

$$x+y=1$$

$$x^2+xy+z=1.$$

Deci rădăcinile sunt:

$$x=1 \text{ şi } y=z=0.$$

Au rezolvat astfel problema: D-ra VASILESCU A. ALEXANDRINA şi D-nii: AMĂRĂŞTEANU F. MARCEL, FLORESCU L. VICTOR şi ŞTEFĂNESCU D. NICOLAE.

Observare. — Problema de faţă am publicat-o în Aprilie 1925 sub No. 191 în revista «Foaia Matematică» — pe vremea când eram elev în clasa VI-a de liceu. — Foaia Matematică, nu a mai apărut şi astfel problema rămânând nerezolvată, am republicat-o acum în G. M.

GH. V.

EXERCIŢII

43. Se cere cubul de cinci cifre:

$$\overline{dmszu}=\overline{dm}^3.$$

HAR. IONESCU-BISS.

R. $\overline{dm}^2\cdot(\overline{dm}-1000)=\overline{szu}\quad\therefore\quad\overline{szu}=k\times\overline{dm}$

$$\overline{dm}=\sqrt{k+1000}\quad\therefore\quad\overline{dm}\geqslant 32$$

deci $k\leqslant 31$ însă pentru ca $\overline{dm}$ să fie întreg avem singura valoare $k=24$; deci $\overline{dm}=32$ şi soluţia:

$$32^3=32768.$$

44. In triunghiul ABC, fie A', B', C' contactele cercurilor exînscrise, pe laturi şi cuprinse între laturi. Cercurile ABB', ACC' se taie pe bisectoarea vârfului A.

N. N. MIHĂILEANU.

R: Axul radical al cercurilor ABB', ACC' este izogonala cevienei din A, a complimentarului punctului NAGEL.

45. In triunghiul ABC, fie I_a, I_b, I_c centrele cercurilor tritangente; fie I'_a, I'_b, I'_c punctele lor de tangenţă cu BC, CA, AB şi I''_a, I''_b, I''_c simetricele punctelor I'_a, I'_b, I'_c în raport respectiv cu I_a, I_b, I_c. Dreptele AI''_a, BI''_b, CI''_c sunt concurente în punctul lui GERGONNE al triunghiului.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Fie I şi A_i, B_i, C_i cercul înscris şi contactele lui cu laturile:

$$\frac{AI}{AI_a} = \frac{IA_i}{I_a I'_a} = \frac{IA_i}{I_a I''_a} \text{ deci A, } A_i, I''_a \text{ sunt colineare.}$$

46. In triunghiul ABC, fie I_a centrul cercului exînscris, relativ la A. Perpendicularele duse prin I_a pe BI_a şi CI_a, taie respectiv pe BA şi CA în B_c şi C_b. Să se arate că patrulaterul BCC_bB_c este circumscriptibil.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Fie încă B_a, C_a intersecţiile cu BC, ale dreptelor I_aB_c, I_aC_b, $I_aB_a = I_aB_c$ şi $I_aC_a = I_aC_b$ deci $\Delta(I_aB_aC_a) = \Delta(I_aC_bB_c)$ şi C_bB_c este tangentă cercului I_a.

47. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1-\cos x}{2+\cos x} \geqslant \frac{x^2}{6}$$

pentru $0 < x < \pi$.

TUDOR STOICESCU.

R. Consider funcţia:

$$y = \frac{1-\cos x}{2+\cos x} - \frac{x^2}{6}$$

a cărei variaţie se studiază.

48. Să se demonstreze identitatea:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} \equiv \cos^2 2\alpha.$$

TUDOR STOICESCU.

R. Adun primei linii elementele liniei a IV-a şi obţin:

$$\Delta = (\cos\alpha + \sin\alpha) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \end{vmatrix}.$$

Adun la coloana III-a elementele coloanei a II-a şi desvolt după elementele primei linii:

$$\Delta = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \begin{vmatrix} -\cos\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 = \cos^2 2\alpha.$$

49. Se cere curba (c) ştiind că tangenta şi normala într'un punct curent al ei taie axele de coordonate în punctele A şi B; A' şi B', iar mijlocul lui A'B descrie dreapta $Y + mX = 0$.

HAR. IONESCU-BISS.

R. Din ecuaţiile tangentei şi normalei la curba (c) avem:

$$A'(x + yy', 0) \quad , \quad B(0, y - xy)$$

şi scriind că mijlocul lui A'B descrie dreapta dată suntem conduşi la ecuaţia diferenţială:

$$(mx - y)\, y' = (x + my)$$

care dă ca soluţie $r = ke^{m\theta}$, deci o spirală logaritmică.

Problema subsistă dacă vom lua în locul dreptei date o dreaptă oarecare Δ şi în locul mijlocului lui A'B un punct oarecare de pe A'B.

50. Într'o elipsă, tangenta comună a perechii de cercuri cu centrele în focare şi trecând printr'un punct curent, înfăşoară cercul principal.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Distanţa centrului la tangentă este semisuma distanţelor focarelor sau a razelor vectoare, deci semiaxa mare.

51. Fie P un punct arbitrar în planul triunghiului ABC. Transversalele unghiulare ale lui P, retaie cercul circumscris triunghiului ABC în A_1, B_1, C_1. Tangentele în A_1, B_1, C_1 la cercul O, formează un triunghiu omologic cu ABC.

N. N. MIHĂILEANU.

R. Tangenta dusă în A_1 taie latura BC în A' şi fie B', C' analoage.

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{\sin BA_1A'}{\sin CA_1A'} = \frac{\sin PAB}{\sin PAC} \cdot \frac{\sin BCA_1}{\sin CBA_1} = \frac{\sin^2 PAB}{\sin^2 PAC}$$

şi A', B', C' sunt colineare.

PROBLEME PROPUSE

4699. Dacă s'ar scrie în ordinea mărimii toate permutările făcute cu cifrele 1, 3, 6, 6, 8, 9, a câtea ar corespunde datei zilei în care a avut loc prăbuşirea a două tribune în tabăra dela Cotroceni, de lângă Bucureşti?

I. IONESCU.

4700. Se cere pătratul perfect *abcd* în care *a* este indicatorul lui *d*, *c* indicatorul lui *a*, iar *d* indicatorul lui *b*.

EMILIAN MEREUŢĂ.

4701. Se dau în plan punctele A, B, C şi o dreaptă Δ trecând prin A. Fie M un punct pe Δ. Paralela din M la BC taie pe AC în N şi pe AB în N'. Paralela din N la AB taie pe MB în P, iar paralela din N' la AC taie pe MC în Q. Să se demonstreze că dreptele BQ, CP sunt paralele cu Δ.

G-L GH. BUICLIU.

4702. Dacă A', B', C' sunt intersecţiile cevienelor unui punct K, din planul triunghiului ABC, cu cercul circumscris acestui triunghiu, să se demonstreze că tangentele în A', B', C' taie respectiv pe BC, CA, AB în trei puncte colineare.

In ce caz dreapta se confundă cu dreapta lui LEMOINE a triunghiului fundamental?

M. C. POSTELNICESCU.

4703. Fie ABCD un patrulater inscriptibil şi OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 perpendicularele duse din centrul O al cercului circumscris lui respectiv pe AB, BC, CD, DA.

Fie a_1, a_2, a_3, a_4 ; b_1, b_2, b_3, b_4 ; ... şi f_1, f_2, f_3, f_4 punctele de intersecţie ale fascicolului de drepte OX_1, OX_2, OX_3, OX_4 respectiv cu AB ; BC ; CD ; DA ; AC şi BD.

Să se arate că punctele : $M(Af_1, Bd_1)$; $N(Be_2, Ca_2)$; $P(Cf_3, Db_3)$; $Q(De_4, Ac_4)$; $R(Af_4, Da_4)$; $S(Be_1, Ab_1)$; $T(Cf_2, Bc_2)$; $U(De_3, Cd_3)$ sunt conciclice.

THEODOR G. COCEA.

4704. Două drepte mobile în jurul unui punct O fac necontenit un unghiu constant şi întâlnesc o dreaptă fixă în punctele A , B.

Înfăşurătoarea cercului OAB este un cerc.

CEZAR COŞNIŢĂ.

4705. Se consideră piramida regulată, având vârful în S şi ca bază pătratul ABCD. Ştiind că φ şi ψ înseamnă respectiv unghiurile plane corespunzătoare diedrelor AB, SA, să se demonstreze relaţia :

$$|\cos\psi| = \cos^2\varphi,$$

$|\cos\psi|$ înseamnă valoarea absolută a lui $\cos\psi$.

GH. DUMITRESCU.

4706. Să se demonstreze identitatea

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot \frac{(\lambda-\nu-n)(\lambda-\nu-n-1)\ldots(\lambda-\nu-n-m+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+m)} \equiv \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)}.$$

GH. TH. GHEORGHIU.

4707. Să se demonstreze că, dacă ecuațiunea

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

are toate rădăcinile reale, atunci și ecuațiunea:

$$x^3 + \sqrt[3]{2}\, px + q = 0$$

are toate rădăcinile reale. Reciproca este adevărată?

M. GHERMĂNESCU.

4708. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\cos 5x - 5\cos^3 x = m.$$

Discuțiune.

GH. POPESCU-BOTOȘANI.

4709. Fie M și M′ punctele care împart latura BC în raportul $\frac{n}{p}$; N și N′ punctele care împart latura CA în raportul $\frac{p}{m}$; P și P′ punctele care împart latura AB în raportul $\frac{m}{n}$.

1°. Să se arate că cercurile de diametre MM′, NN′, PP′ luate câte două au aceeași axă radicală;

2°. Ce relație trebue să existe între m, n, p și laturile triunghiului pentru ca cercurile să taie această axă radicală?

GH. D. SIMIONESCU.

4710. Fie patru puncte A, B, C, D în planul unei elipse date. Să se găsească minimul sau maximul sumei ariilor triunghiurilor MAB și MCD, când M este un punct oarecare mobil pe elipsă.

M. NICOLAU.

TABLA DE MATERII

A. ARTICOLE

1. Aritmetica şi Teoria numerelor

		Pag.
Maior I. Linteş	Extinderi asupra indicatorilor	278
I. V. Mătieş	Terminaţiunile cuburilor perfecte şi a rădăcinelor lor	332
O. N. Ţino	Asupra problemei 1402	53
Lt. C-dor Av. Gr. Zapan	Divizibilitatea numerelor	45

2. Geometria

N. Abramescu	Proprietăţi geometrice ale mişcărei unor figuri	409
D. Barbilian	Asupra fascicolelor de cercuri	61
G-l Gh. Buicliu	Limita unor triunghiuri	33
R. Goormaghtigh	Sur une généralisation du théorème de DROZ-FARNY	374
Al. I. Guţu	Asupra unei probleme de geometrie elementară	219
C. Ionescu-Bujor	Asupra unor tetraedre	77
C. Ionescu-Bujor	Asupra unor configuraţii de puncte colineare	375
N. N. Mihăileanu	O propoziţie despre punctul Miquel	611
Al. V. Niculescu	O teoremă de geometria triunghiului	423
G-l Gh. I. Popescu	O soluţie geometrică şi o generalizare a problemei 1386	127
Gh. D. Simionescu	O teoremă relativă la patrulatere circumscriptibile	79
V. Thébault	Sur les brocardiens d'un point du plan d'un triangle	121
V. Thébault	Sphères du tétraèdre	172
V. Thébault	Asupra unui grup de patru sfere tangente două câte două	419
Gh. Ţiţeica	Topologie elementară	30
I. I. Ţiţeica	Asupra unui triunghiu special	473
Gh. Vasiliu	Aplicaţiuni ale calculului vectorial	225

3. Algebra

Pag.

N. Botea . . . . . O generalizare a formulei lui LEIBNITZ 74
N. I. Ciorănescu . . . . Medii definite prin operaţii de mediaţie aritmetică asupra argumentelor unor funcţiuni 71
Gh. Th. Gheorghiu . . . Asupra funcţiunilor lui BESSEL 76
M. Ghermănescu . . . . O clasă de constante remarcabile 51
A. G. Ioachimescu . . . Volumul şi centrul de greutate al calotei sferice 27
Maior I. Linteş . . . . . Asupra unor însumări 130
I. V. Mătieş şi I. L. . . . Asupra unor însumări 607
M. Nicolescu . . . . . O clasă specială de funcţiuni periodice 68
Lt. C-dor Gh. Niculescu. Asupra ecuaţiunilor cu rădăcinile în progresie aritmetică 378
Tib. Popoviciu . . . . . Observaţie asupra ecuaţiilor algebrice având toate rădăcinele reale 67
P. Sergescu . . . . . Asupra rădăcinilor ecuaţiilor în care coeficientul lui x^p are cel mai mare modul 38

4. Trigonometria

Gh. Th. Gheorghiu . . . Generalizarea formulelor trigonometrice dintr'un triunghiu în domeniul complex 569

5. Geometria analitică şi infinitezimală

N. Abramescu . . . . . Limita razei cercului circumscris triunghiului format de trei tangente infinit vecine la o curbă plană 31
D. Barbilian . . . . . Conicele de ramificare a trei conice în fascicol 462, 518, 559
Lt. M. Focşeneanu . . . Două probleme 425
M. Ghermănescu . . . . Asupra problemelor 1386 şi 2889 469
D. V. Ionescu . . . . . O proprietate a unei familii de traectorii . . . 57
Tib. Popoviciu . . . . . Asupra curbelor plane 613

6. Analiza

Th. Angheluţă . . . . . Asupra unor integrale 59
G. Călugăreanu . . . . Din generalizările constantei lui EULER 176
M. Ghermănescu . . . . „ „ „ „ „ . . . 179
A. Myller . . . . . Curbura lui BACALOGLU 123

7. Mecanica

Maior I. Linteş . . . . Spectrul detentei de gaze la gura ţevilor de tun sau armă 36

8. Istoria Matematicelor

Pag.

I. Ionescu . . . . . Prima aritmetică tipărită în limba română . . 20
I. Ionescu . . . . . Nomenclatura geometrică română 169
I. Ionescu . . . . . Seminarul matematic de pe lângă universitatea din Iaşi 217
I. Ionescu . . . . . ANDRÉ-MARIE AMPÈRE 508, 553, 601
V. Marian . . . . . Scrierile matematice ale lui GH. LAZĂR . . 414, 460
V. Marian . . . . . Tabla ţibetului 515

9. Diverse

G. Borneanu . . . . . Cuvântare rostită la dezvelirea bustului Ing. I. D. TEODOR 505
Ing. Şef I. I. Chiţulescu Rezolvarea problemelor practice de matematici 40
G. Ţiţeica . . . . . Patruzeci de ani de la întemeierea *Gazetei Matematice* 17

B. CHESTIUNI ÎN LEGATURĂ CU REDACŢIA ŞI SOCIETATEA „GAZETA MATEMATICĂ“

1. Diverse

* * * . . . . . Lista membrilor Societăţei *Gezeta Matematică* 5
* * * . . . . . Membri decedaţi 16
Delegaţia . . . . . Sărbătorirea celor 40 ani ai *Gazetei Matematice* 265
Cuvântarea D-lui A. D. BUNESCU 266
Cuvântarea D-lui Dr. C. ANGELESCU, Ministrul instrucţiunei publice 272
Cuvântarea D-lui I. IONESCU 275
Cuvântarea M. S. REGELUI CAROL II 277
Cuvântarea D-lui Ing. A. IOANOVICI 313
Cuvântarea D-lui Rector VASILESCU-KARPEN . 315
Cuvântarea D-lui Prof. GH. ŢIŢEICA 317
Cuvântarea D-lui Prof. Dr. HURMUZESCU . . . 319
Cuvântarea D-lui Prof. P. SERGESCU 320
Cuvântarea D-lui Prof. M. NICULESCU 322
Cuvântarea D-lui Rector C. TEODORESCU . . 324
Cuvântarea D-lui General I. DUMITRESCU . . 325
Cuvântarea D-lui Prof. GR. G. STRATILESCU . 361
Cuvântarea D-lui Dr. V. SĂVESCU 364
Cuvântarea D-lui Prof. V. ALACI 366
Cuvântarea D-lui Prof. N. ABRAMESCU 367
Cuvântarea D-lui Prof. GH. EM. FILIPESCU . . 368
Cuvântarea D-lui GH. TH. GHEORGHIU 369
Cuvântarea D-lui V. GRIGORESCU 371
Cuvântarea D-lui Prof. A. G. IOACHIMESCU . 373

2. Premii şi concursuri

		Pag.
I. Buşilă, A. Ioanovici	Concursul *Gazetei Matematice* din 1935 . . .	82
A. D. Bunescu Delegaţia	Concursul *Gazeta Matematică* din 1936 . . .	83
I. Buşilă, Gh. Iliescu	Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor *Gazetei Matematice* pentru cursul anului 1935 — 36	85
* * *	Programa analitică hotărită pentru concursul *Gazeta Matematică* din anul 1936	133
I. Buşilă, Maior I. Linteş Lt. C-dor Ing. Gr. Zapan	Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „G-ral *Sc. Panaitescu*“	135
I. Ionescu, P. Sergescu, A. Bunescu	Raport asupra lucrărilor propuse pentru premiul *V. Conta* în 1935	181
G-l Gh. Buicliu, I. Ioanovici, Al. A. Roşu	Premiul „Ing. *Al. Roşu*“	227
Delegaţia	Concursul *Gazeta Matematică*. Candidaţii admişi la concurs	331
Comisiunea	Premiul „Ing. *A. Roşu*“	429
G. Ţiţeica	Rezultatul concursului *Gazeta Matematică* . .	457
Col. Gh. Liteanu, Ing. A. Ioanovici	Raportul comisiunei pentru acordarea premiului «*V. Cristescu*»	524

C. NOTE MATEMATICE

1. Aritmetica şi Teoria numerilor

2[1])	*G-l Gh. Buicliu*	O nouă soluţie a problemei 2683	88
5.	*G-l Gh. Buicliu*	Observaţii relative la problema 4415	136
22.	*G-l Gh. Buicliu*	Completarea soluţiei problemei 4031	283
40.	*G-l Gh. Buicliu*	Curiozităţi numerice	527
44.	*G-l Gh. Buicliu*	Asupra pătratelor perfecte	576
48.	*Gl. Gh. Buicliu*	Curiozităţi aritmetice	621
14.	*G. G. Constantinescu şi I. L.*	Asupra problemei 4031	228
24.	*G. G. Constantinescu*	Asupra problemei 4033	288
50.	*M. Ghermănescu*	Rezolvarea unui sistem diofantian în numere întregi	624
38.	*A. Gloden*	Rezolvarea unui sistem diofantian în numere întregi	478
33.	*Maior I. Linteş*	Asupra problemei 4572	431
13.	*I. V. Mătieş*	Asupra unui articol de aritmetică	227
21.	*V. Thébault*	Curiozităţi aritmetice	282
47.	*V. Thébault*	Asupra numerelor terminale ale patratelor . .	619

1) Numărul din această coloană indică numărul de ordine al notei matematice în Volumul XLI.

2. Geometria

		Pag.
34. *C. Ionescu-Bujor*	Asupra rapoartelor anarmonice ale unei configurații de puncte colineare	432
32. *P. Mirescu*	In legătură cu problema 4475	430
6. *V. Thébault*	Formules relatives aux triangles	137
10. *V. Thébault*	Généralisation de théorèmes de NEUBERG et de GOB	184
18. *V. Thébault*	Cube et tétraèdre trirectangle	233
25. *V. Thébault*	Din proprietățile triunghiurilor	338
28. *V. Thébault*	Asupra punctului minimului sumei patratelor distanțelor la două planuri date	380

3. Algebra

20. *B. I. Baidaff*	O soluție directă a problemei 4448	236
52. *N. Dobrescu*	O nouă generalizare a problemei 4624	626
4. *M. Ghermănescu*	Asupra teoremei lui CESARO	89
11. *M. Ghermănescu*	Asupra problemei 4258	185
27. *M. Ghermănescu*	Asupra unor serii	341
29. *M. Ghermănescu*	Asupra unei serii	381
49. *M. Ghermănescu*	O chestiune de concurs	622
41. *Oct. S. Ianculescu*	O generalizare a problemei 4624	527
51. *Har. Ionescu-Biss*	O ecuație funcțională	625
26. *Maior I. Linteș*	Divizibilitatea progresiilor aritmetice	339
30. *Maior I. Linteș*	Asupra problemei 4266	381
12. *M. Mănescu*	Asupra întrebuințării cantităților omogene în rezolvarea sistemelor de ecuații	186
45. *Lt.-Comandor Gh. Niculescu*	O generalizare și aplicațiile ei	577
23. *Tib. Popoviciu*	Asupra problemei 457	285
15. *I. C. Savin*	Generalizarea problemei 4457	232
7. *O. Țino*	Asupra unei proprietăți cunoscute	138
36. *E. Vișa & P. C. Mazilu*	Asupra problemei 4271	435
8. *Lt. C-dor Gr. Zapan*	Diviziunea polinoamelor prin $x^n - a$	140

4. Trigonometria

35. *P. C. Mazilu*	Asupra notei Nr. 43 din Vol. XXXIX	434

5. Analitica

42. *Lt. M. I. Focșeneanu*	Asupra unor articole	528

6. Istoria Matematicelor

7. *I. Ionescu*	Programul aritmeticei la școala română din Brașov în clasa pregătitoare pentru comerț în anul 1837	88
9. *I. Ionescu*	Primii elevi ingineri români	183
37. * * *	Acum o sută de ani în lumea matematică	477, 575

7. Diverse

Pag.

17. *N. Botea* . . . . . Asupra unei generalizări a formulei lui LEIBNITZ 233
16. *G-l Gh. Buicliu* . . Relativ la împărţirea polinoamelor prin $x^n - a$ 233
19. *G-l Gh. Buicliu* . . Chestiuni de prioritate în legătură cu un articol din geometria triunghiului 235
3. *Ing. Şef I. Chiţulescu* Asupra problemei 1773 89
31. *I. Ionescu* . . . . . Săptămână de ani 429
46. *G. D. Simionescu* . Rezolvitorii problemei 4543 579
39. *V. Thébault* . . . . Notă bibliografică asupra câtorva curiozităţi ale numerelor 525
16. *Lt. C-dor Gr. Zapan* Observare 233

D. CHESTIUNI DE EXAMEN

Concursul Gazetei Matematice din 1936 480
Şcoala Politechnică «Regele Carol II» . Concursul de admitere 1935 . 141

E. BIBLIOGRAFII

1. Lucrări recenzate [1])

N. Botea [2]) . . . . . PIÈRE-HUMBERT. Potentiels et prépotentiels . 532
I. Ionescu . . . . . P. COUDEC & A. BALLICCIONI. Premier livre du tetraèdre 94
I. Ionescu . . . . . R. ESTÈVE & MITAULT. Cours de géométrie . 189
I. Ionescu . . . . . R. GARNIER. Leçons d'algébre et de géométrie. 94
I. Ionescu . . . . . L. LONG. Le livre d'algèbre du bacalauréat . . 238
I. Ionescu . . . . . J. B. POMEZ. Calcul des probabilités 529
I. Ionescu . . . . . H. TOUTSCH. Die *Honterus* presse in 400 jahren. 96

2. Lucrări nerecenzate

E. Abason . . . . . Geometrie descriptivă 343
E. Abason, Al. Andronic, Gh. Dumitrescu . . . Trigonometrie 343
N. Abramescu . . . . . Algebra financiară pentru clasa VI-a 147
N. Abramescu . . . . . Algebra superioară pentru clasa VII-a 147
N. Abramescu . . . . . Astronomie pentru clasa VIII-a 147
N. Abramescu . . . . . Geometrie analitică pentru clasa VIII-a 147
N. Abramescu . . . . . Lecţiuni elementare de algebră superioară . . 147
N. Abramescu . . . . . Mecanica pentru clasa VIII-a 189
N. Abramescu . . . . . Trigonometrie 147

---

1) S'au scris recenzorii în ordine alfabetică, iar la fiecare recenzor lucrările recenzate au fost înscrise în ordinea alfabetică a autorilor.

2) In general recenzorii şi-au semnat recenziile numai cu iniţialele numelui şi pronumelui. Pentru istoric, le dăm aci numele întreg.

		Pag.
G. Bouligand, Ch. Brunold, A. Grumbach, M. Morand, P. Sergescu, M. Taboury, A. Turpain	L'évolution des sciences phisiques et mathématiques	436
A. D. Bunescu	Normalizarea şi industria grafică românească	629
N. Ciorănescu	Curs elementar de Algebră superioară	579
I. N. Constantinescu	Table de logaritmi centezimali	437
Ion Dumitriu	Culegere de probleme de geometrie analitică	238
M. Ghermănescu	Curs de algebră superioară	437
Maior I. Linteş	Noţiuni elementare de Aerodinamică şi de mecanica avionului	579
R. G. Loyarte	Fisica general	291
Al. Manicatide & N. Abramescu	Algebra pentru clasa IV-a secundară	147
Al. Manicatide & N. Abramescu	Algebra pentru clasa V-a secundară	147
A. Myller	Curs de geometrie analitică	629
Miron Niculescu & Al. Niculescu	Curs elementar de geometrie analitică	147
L. Seifert	Sur une surface de sixième degré	343
C. C. Teodorescu	Anuarul laboratorului de rezistenţă şi încercări de materiale	238
M. Volberg	Promenade récréative au pays d'Einstein	629
J. Zahradnicek	Ueber die Erregung von ungedömpften mechanischen Schwingungen	343
* * *	*Chestiuni de examen*, propuse la secţia matematică a Facultăţii de Ştiinţe din Cluj	343, 628
* * *	J. WATT şi A. M.-AMPÈRE	629

3. Extrase, suplimente şi teze

I. S. Antoniu	Methode de construction graphique de la courbe réprésentative de la derivée d'une fonction	291
Ing. A. D. Bunescu	Industria grafică de Stat	629
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les fonctions métasphériques	189
M. Ghermănescu	Sur le thèorème de PICARD-BOREL	436
M. Ghermănescu	Sur le nombre des valeurs exceptionelles des fonctions algebroïdes	437
A. Gloden	Sobre las identidades numericos	529
C. Iacob	Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites	95
Maior I. Linteş	Problema preciziunei gurilor de foc	95
Maior I. Linteş	Contributo alla soluzione di alcuni problemi di artigleria	95
Maior I. Linteş	Discuţiuni asupra stabilităţii unui material de artilerie	189

Pag.

Maior I. Linteş . . . . Eforturile suportate de un avion pe timpul ressursei 189
Maior I. Linteş . . . . Teoria şi calculul frânelor de gură 580
Maior I. Linteş . . . . Noutăţi în „Balistica Exterioară" 580
Maior I. Linteş . . . . L'influence dela pluie sur la trajectoire d'un projectile 580
Maior I. Linteş . . . . Sur l'instabilité des coutours ouverts 580
M. Nicolesco . . . . . Extension du théorème de LIOUVILLE aux fonctions harmonique d'ordre *p.* . . . 147
M. Nicolesco . . . . . Séries de puissances harmoniques dans un domaine borné 147
O. Onicescu . . . . . Propieta topologiche delle transformazioni puntuali dello spazio 96
O. Onicesco . . . . . La topologie de fonction d'un point du plan ou de l'espace 96
O. Onicescu . . . . . Sur les valeurs prises par un ensemble de fonctions dans le plan et dans l'espace 96
O. Onicescu . . . . . Un problème d'analyse 96
O. Onicescu & G. Mihoc. Sur les chaines de variables statistiques . . . 96
O. Onicescu & G. Mihoc. Sopra le leggi-limite delle probabilità 530
P. Sergescu . . . . . Sur quelques aspects des mathématiques contemporaines 436
P. Sergescu . . . . . Les mathématiques dans le *Journal des savants* 436
G. D. Simionescu . . . Sur les triangles trihomologiques et triorthologiques 580
C. C. Teodorescu . . . Allocution au congrès interbalcanique des mathématiciens 147
C. C. Teodorescu . . . Nouvel emploi des moments d'inertie aux questions statiques 147
V. Thébault . . . . . Sur les nombres curieux 95
G. Ţiţeica . . . . . Sur les réseaux à invariants constants 94
G. Ţiţeica . . . . . Réseaux et congruences 94
Gh. Gh. Vasiliu . . . Zur Theorie rechtwinkliger geodetischer koordinaten 580

4. Reviste periodice

Anales de la Sociedad Cientifica, Argentina 95, 237, 290, 291, 341, 382, 530, 579, 628
Boletin del Seminario Matematico J. REY PASTOR 95, 437
Boletin Matematico 93, 95, 147, 238, 291. 341, 382, 484, 579, 628
Boletin Matematico Elemental 484
Buletinul I. R. E. 94, 628
Buletinul Institutului Român pentru betoane şi drumuri moderne 383
Buletinul Şedinţelor Soc. Române de Ştiinţe. 628
Buletinul Soc. Politechnice 628

Pag.

Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'École Politechnique Roi Charles II 237
Bulletin Mathématique de la Société Romaine des Sciences 93
Bulletin of the American Mathematical Society, 93, 96, 146, 238, 342, 383, 530
Contribucion al Estudio de las Ciencias Fisicas y Matematicas . . 530, 579
Deutsche Mathematik 628
Gazeta Matematică Supliment cu exerciţii . . . 238, 291, 342, 383, 531, 579
Gazeta Matematică. Volum jubilar 290
Journal de Mathématiques élémentaires 189, 238, 290, 291, 342, 383, 531, 580, 628
Matematica 289, 435
Mathesis 95, 146, 240, 291, 342, 531, 627
Numerus 147, 189, 240, 290, 341, 436, 529, 579
Pitagora 240, 291, 342, 383, 531
Revista Matematică din Timişoara . 93, 146, 241, 291, 342, 383, 531, 580, 628
Revista Ştiinţifică «*V. Adamachi*» 241, 383, 580, 628
Sphinx 531, 580, 628
Ştiinţă şi Progres 290, 343, 437, 530, 580
The Mathematical Gazette 93, 241, 291, 383, 531
Universidad Nacional de *La Plata*. Anuario 241

F. CERERI *)

Nr. Cererii	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul	*Nr. Cererii*	*Pagina la care a fost:* Propusă	Răspunsul
1 . . .	24 (XXI)	?	28 . . .	213 (XXII)	?
4 . . .	24 „	?	29 . . .	231 „	?
5 . . .	24 „	?	30 . . .	258 „	?
7 . . .	59 „	?	31 . . .	277 „	?
8 . . .	59 „	?	32 . . .	277 „	259 (XXIII) 39, 186 (XXIV)?
10 . . .	91 „	?	33 . . .	308 „	?
11 . . .	144 „	?	34 . . .	40 (XXIII)	?
12 . . .	145 „	?	35 . . .	40 „	?
13 . . .	145 „	219 (XXI) ?	36 . . .	65 „	?
14 . . .	183 „	?	37 . . .	86 „	211 (XXIII) ?
15 . . .	219 „	?	38 . . .	112 „	?
16 . . .	254 „	?	39 . . .	137 „	?
17 . . .	294 „	264 (XXXVIII) ?	40 . . .	157 „	?
20 . . .	420 „	?	41 . . .	185 „	?
23 . . .	17 (XXII)	?	42 . . .	211 „	?
24 . . .	75 „	?	43 . . .	235 „	?
26 . . .	161 „	?	44 . . .	259 „	?
27 . . .	187 „	?	45 . . .	275 „	?

*) In această tabelă semnul ? arată că nu s'a primit răspuns sau că se mai aşteaptă răspuns dacă e pus după răspuns.

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
46	13 (XXIV)	?
49	57 „	?
50	70 „	?
51	88 „	?
52	103 „	?
55	168 „	?
56	168 „	?
58	16 (XXV)	?
59	36 „	?
60	58 „	?
61	58 „	?
62	71 „	?
63	71 „	?
64	122 „	?
65	122 „	?
66	155 „	?
67	175 „	?
68	199 „	?
70	223 „	?
71	251 „	?
73	45 (XXVI)	?
74	45 „	?
75	94 „	?
77	198 „	?
78	227 „	?
80	263 „	?
81	27 (XXVII)	?
82	27 „	160 (XXVII)?
83	160 „	?
84	197 „	?
85	197 „	?
86	240 „	?
87	283 „	?
88	329 „	?
89	361 „	?
91	26 (XXVIII)	?
92	57 „	?
93	57 „	?
94	104 „	?
95	136 „	?
96	136 „	?
97	213 „	?
98	213 „	?
99	256 „	?
100	297 „	?
101	342 „	?
102	458 „	?
103	458 „	?
104	24 (XXIX)	?
105	58 „	?
107	145 „	?
108	226 „	?
109	298 „	?
112	419 „	?
113	454 (XXIX)	?
115	22 (XXX)	?
116	102 „	?
117	102 „	?
118	140 „	?
119	218 „	?
120	261 „	?
122	306 „	?
123	337 „	?
124	383 „	?
126	423 „	?
128	33 (XXXI)	?
129	55 „	?
130	56 „	?
131	100 „	?
134	184 „	?
142	53 (XXXII)	?
143	102 „	?
144	142 „	?
146	216 „	?
148	296 „	?
149	343 „	?
152	19 (XXXIII)	19(XXXIII)?
153	51 „	?
154	51 „	?
157	146 „	?
158	185 „	?
159	217 „	?
162	295 „	?
163	341 „	?
166	457 „	?
179	385 (XXXIV)	?
181	24 (XXXV)	?
186	216 „	?
193	466 „	?
196	57 (XXXVI)	?
201	221 „	?
207	414 „	?
208	462 „	?
210	62 (XXXVII)	?
211	98 „	?
212	137 „	?
214	217 „	?
215	260 „	?
219	425 „	?
220	448 „	?
223	94 (XXXVIII)	?
227	57 (XXXIX)	?
235	222 „	?
237	360 „	?
238	409 „	?
239	458 „	?
241	126 (XL)	?
243	212 „	?

Nr. Cererii	Pagina la care a fost: Propusă	Răspunsul
244	266 (XL)	?
245	309 „	?
247	499 „	?
248	553 „	?
249	99 (XLI)	437
250	148 „	?
251	189 „	?
252	241 „	?
253	292 (XLI)	?
254	343 „	?
255	384 „	?
256	485 „	?
257	533 „	?
258	581 „	?
259	629 „	?

G. DIVERSE

Pag.

1. Sporirea bibliotecei „Gazeta Matematică" . . 99, 148, 190, 242, 292, 344, 384, 438, 485, 533, 581, 629
2. Şedinţele Societăţei Române de Ştiinţe, Secţia Matematică 241, 292, 344, 384, 438, 533
3. Conferinţele D-lui Prof. P. SERGESCU la *Institut des Hautes Etudes* şi la *Societatea Matematică Belgiană* 343

H. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE

a) Repartizarea problemelor propuse după materii

Aritmetica şi teoria numerelor . . . . . 4559, 62, 5, 72, 9, 91, 601, 4, 5, 16, 27, 8, 9, 30, 40, 1, 51, 2, 63, 4, 5, 75, 6, 7, 8, 88, 9, 99, 700.
Geometria . . . . . 4560, 3, 4, 7, 8, 70, 4, 5, 6, 81, 2, 3, 92, 4, 5, 6, 603, 6, 7, 8, 9, 10, 5, 7, 9, 20, 1, 6, 31, 2, 3, 6, 9, 42, 3, 4, 53, 4, 5, 6, 7, 66, 7, 79, 80, 90, 1, 2, 7, 701, 2, 3, 5.
Algebra . . . . . 4569, 73, 7, 80, 4, 5, 8, 9, 97, 8, 9, 600, 12, 23, 4, 34, 7, 45, 6, 50, 61, 8, 71, 2, 81, 2, 3, 93, 706, 7.
Trigonometrie . . . . 4571, 8, 86, 7, 602, 11, 22, 5, 35, 47, 8, 58, 9, 60, 9, 70, 84, 94, 5, 708.
Analitica . . . . . 4590, 3, 613, 8, 49, 98, 704, 9, 10.
Descriptiva . . . . . 4566.
Analiza . . . . . 4614, 38, 62, 74, 85, 6.
Mecanica . . . . . 4561, 673, 87, 96.

b) Repartizarea problemelor propuse pe autori

N. Abramescu 4656
M. F. Amărăşteanu 4681
I. S. Antoniu 4588
Gh. Basacov 4607, 31, 53
N. Botea 4577, 85, 95, 620, 35, 74, 82
G-l Gh. Buicliu . . 4563, 93, 605, 18, 38, 54, 78, 89, 701
Al. D. Bunescu 4673
G. Călugăreanu 4613
E. Caraman 4633
Ing.-Sef I. I. Chiţulescu . . 4566
N. Ciorănescu . . 4611, 22, 48
Th. Gh. Cocea . 4642, 66, 92, 703
C. Coşniţă 4697, 704

G. Dumitrescu 4705
U. Florescu 4636, 64
Adr. Gheorghiu 4685, 91
Gh. Th. Gheorghiu . . 4578, 90, 8, 626, 41, 83, 95, 706
M. Ghermănescu . 4569, 89, 600, 30, 45, 62, 7, 93, 707
A. G. Ioachimescu 4561
D. V. Ionescu 4610
I. Ionescu . . 4559, 80, 91, 603, 15, 27, 39, 51, 63, 75, 87, 99
H. Ionescu-Biss 4677
C. Ionescu-Bujor . . 4575, 83, 94, 619, 43, 59, 84
Lt. C. Ionescu-Ţiu . . . 4657, 94
Maior I. Linteş 4565, 97, 623, 46, 68
E. Mereuţă 4700
N. N. Mihăileanu . .4586, 621, 32, 55, 69
P. Mirescu 4573, 637
M. Nicolau 4649, 710
I. St. Nicolescu 4599
Al. Niculescu 4572, 679
Lt. C-dor Gh. Niculescu 4567, 612, 50, 61, 72
O. Orănescu 4628
Al. Pantazi 4568
Gh. Popescu-Botoşani . 4571, 708
Tib. Popoviciu . . 4601, 14, 86, 98
M. C. Postelnicescu . . . 4702
Al. A. Roşu . . 4576, 607, 34, 88
S.-Lt. I. C. Savin 4670
I. C. Schileru-Dili . 4625, 71, 96
P. Sergescu 4665
G. D. Simionescu . 4574, 658, 709
N. D. Ştefănescu 4644
D. V. Stoica 4564
V. Thébault . 4579, 92, 604, 24, 9, 52, 80, 90
O. N. Ţino . 4562, 84, 96, 617, 47
G. Ţiţeica 4560
I. I. Ţiţeica 4582, 609
P. Trofimov 4581
Gh. Gh. Vasiliu . 4587, 602, 8, 16, 40, 60, 76
Lt. C-dor Gr. Zapan 4570

c) Indicarea paginei la care a fost propusă sau rezolvată

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1]	Rezolvată [2]
171	76 (II), 198 (XVI)	
485	104 (V), 198 (XVI)	NR
585 *)	172 (VI), 238 (XVI)	
676	148 (VII)	
691	196 „, 278 (XVI)	100
766	124 (VIII), 319 (XVI), 372 (XXX)	NR
887	172 (IX), 358 (XVI)	NR
914	267 (IX)	
944	52 (X)	108
1000 **)	220 „, 438 (XVI)	NR
1008	244 (X), 462 (XVI)	NR
1056	100 (XI)	NR
1058	100 „	NR
1092	196 „	
1146	76 (XII)	NR
1156	100 „	
1178	172 „	NR
1180	172 „	
1188	228 „	
1214	296 „	
1236	64 (XIII)	
1270	192 „	NR
1271	192 „	NR
1297	288 „	NR
1299	319 „	NR
1310	352 „, 372 (XXXI)	NR

1) Numărul latin din paranteză indică volumul în care problema este propusă. Problemele care au în coloana a doua mai multe numere, au fost publicate sau rectificate de mai multe ori în volumul respectiv.

2) NR însemnează că problema nu a fost încă rezolvată. Pentru celelalte redacţia posedă soluţiuni care nu au fost publicate.

*) Soluţia problemei 585 s'a publicat la pag. 88 Vol. VII. Se mai aşteaptă discuţia la punctele cerute în nota de la finele acelei soluţii.

**) A se vedea pag. 291 Vol. XXXI, cu lămuriri.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1342	64 (XIV)	
1367	128 „	NR
1379	160 „	
1384	191 „	NR
1398	224 „	
1399	224 „ / 200 (XVI)	NR
1412	256 (XIV)	NR
1424	228 „	
1450	352 „	NR
1497	128 (XV)	
1533	224 „	
1553	288 „	NR
1563	320 „	
1576	352 „	384
1577	352 „	
1591	39 (XVI)	
1632	159 „	
1637	160 „	
1650	200 „	NR
1656	239 „	
1676	279 „	
1679	280 „	NR
1690	320 „	
1702	360 „	
1711	399 „ / 372 (XXXI)	NR
1734	463 (XVI)	485
1735	464 „	
1753	80 (XVII)	
1764	120 „	NR
1773	160 „	109
1778	199 „	
1790	240 „	
1823	400 „	
1831	439 „	
1835	440 „	
1840	466 „	
1858	78 (XVIII)	
1876	119 „	NR
1882	120 „	
1898	199 „	
1906	200 „	NR
1911	239 „	
1914	239 „ / 280 „	NR
1922	278 „	
1929	279 „	NR
1934	280 „ / 320 „	
1944	319 „	
1945	320 „ / 360 „	
1948	358 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
1958	359 (XVIII)	
1959	360 „	NR
1969	399 „	
1976	431 „	
1987	462 „	NR
2004	40 (XIX)	NR
2016	79 „	
2017	80 „	NR
2018	80 „	
2024	118 „	
2025	119 „	
2032	120 „	
2035	159 „	
2038	159 „	
2048	198 „	
2055	200 „	
2056	200 „	
2058	200 „	
2063	238 „ / 280 „	
2065	239 „	
2070	240 „ / 280 „	NR
2074	278 „	NR
2079	279 „	
2083	280 „	
2091	319 „	
2106	358 „	
2108	359 „	
2110	359 „	
2112	360 „	
2116	398 „	
2118	399 „	
2129	438 „	
2130	460 „	
2133	439 „	
2144	461 „	
2145	462 „	
2147	462 „	
2170	119 (XX)	NR
2176	120 „	
2187	160 „	
2194	197 „	
2197	198 „	
2217	239 „	
2222	240 „	
2227	279 „	
2235	280 „	
2240	318 „	
2247	320 „	
2248	320 „	
2249	320 „	
2250	320 „	
2263	359 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2264	360 (XX)	
2265	360 „	
2266	360 „	
2274	398 „	
2281	400 „	
2284	439 „	
2289	439 „	
2290	439 „	
2295	461 „	
2298	462 „	
2301	462 „	
2302	462 „	
2311	40 (XXI)	
2318	79 „	
	160 „	
2330	118 „	
2332	119 „	
2337	120 „	
2338	122 „	NR
	422 (XXXI)	
2343	157 (XXI)	
2344	158 „	
2353	159 „	
2354	198 „	
2356	199 „	149
2357	199 „	
2365	200 „	
2370	239 „	
2375	240 „	
2381	278 „	
2390	280 „	150
2394	318 „	
2397	319 „	
2398	319 „	
2402	320 „	191
2405	320 „	NR
	423 (XXXI)	
2408	359 (XXI)	
2421	399 „	
2422	399 „	
2423	399 „	
2430	439 „	NR
2435	440 „	
2436	440 „	
2439	440 „	NR
2446	240 (XXIII)	151
	573 (XL)	
2456	31 (XXII)	
2458	32 „	243
2461	32 „	
2462	62 „	
2466	63 „	NR
2469	63 „	
2477	95 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
2497	144 (XXII)	
2500	144 „	
2502	167 „	152
2503	167 „	NR
	333 (XXXI)	
2510	191 (XXII)	
2529	262 „	
2537	287 „	
2539	288 „	
2545	312 „	
2552	47 (XXIII)	
2553	47 „	
2556	48 „	
2560	72 „	NR
2566	120 „	
2569	120 „	
2573	144 „	
2575	168 „	
2577	168 „	NR
2578	168 „	
2585	215 „	
2586	216 „	
2587	216 „	NR
2591	240 „	
2593	264 „	
2598	288 „	
2599	288 „	
2602	318 (XXXI)	
2607	31 (XXIV)	NR
2623	80 „	
2631	112 „	
2638	127 „	NR
2640	128 „	
2645	143 „	
2647	143 „	
2655	191 „	NR
2660	191 „	
2661	192 „	
2664	24 (XXV)	
2665	24 „	NR
2675	63 „	
2682	64 „	
2684	80 „	NR
2688	80 „	
2689	80 „	
2692	108 „	
2694	108 „	
2701	141 „	
2706	142 „	
2709	142 „	110
2713	143 „	NR
2717	143 „	NR
2727	168 „	
2731	191 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]		Rezolvată [2]
2735	192	(XXV)	NR
2752	264	„	
2758	56	(XXVI)	
2769	79	„	NR
2778	104	„	
2780	104	„	NR
2789	135	„	
2795	159	„	153
2803	160	„	
2814	192	„	NR
2818	216	„	
2820	216	„	
2822	216	„	
2827	247	„	
2828	248	„	
2850	335	„	
2851	335	„	
2861	40	(XXVII)	293
2865	70	„	NR
2886	104	„	NR
2888	104	„	
2895	143	„	
2906	184	„	
2909	221	„	NR
2912	222	„	NR
2920	262	„	
2922	263	„	
2926	264	„	NR
2936	343	„	NR
2947	376	„	NR
2953	416	„	
2955	416	„	
2959	448	„	
2960	448	„	
2969	39	(XXVIII)	
2971	39	„	
2972	40	„	110
2980	79	„	154
2983	79	„	
2985	80	„	
2993	119	„	
2996	120	„	
2999	120	„	
3000	120	„	
3003	159	„	
3005	159	„	
3013	199	„	
3019	200	„	
3041	319	„	
3045	319	„	295
3052	359	„	
3054	360	„	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]		Rezolvată [2]
3059	360	(XXVIII)	
3069	400	„	NR
3070	400	„	
3071	439	„	
3073	439	„	
3075	439	„	
3081	479	„	
	454	(XXXI)	NR
3085	480	(XXVIII)	
3086	480	„	
3090	480	„	
3091	39	(XXIX)	
3095	40	„	
3096	40	„	
3108	80	„	
3109	80	„	155
3118	120	„	
3127	159	„	NR
3134	199	„	
3150	240	„	
3160	280	„	
3161	318	„	NR
3167	320	„	
3173	358	„	
3177	359	„	
3178	360	„	
3180	360	„	
3189	400	„	
3198	440	„	
3208	480	„	NR
3210	480	„	
3220	40	(XXX)	
3227	80	„	
3228	80	„	
3230	80	„	NR
3232	119	„	
3236	119	„	
3239	120	„	
3245	160	„	
3248	160	„	
3249	160	„	
3251 *)	198	„	
3253	199	„	
3255	199	„	NR
3260	200	„	NR
3267	239	„	
3277	280	„	
3279	280	„	
3287	320	„	
3288	320	„	
3290	320	„	345
3291	358	„	

*) Un început de soluție s'a dat la pag. 314 Vol. XXX. Se așteaptă soluția completă.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3296	359 (XXX)	
3298	359 „	NR
3299	360 „	
3300	360 „	
3304	399 „	NR
3308	400 „	
3309	400 „	
3310	400 „	NR
3311	438 „	
3312	439 „	
3313	439 „	157
3316	439 „	NR
3318	440 „	NR
3319	440 „	
3320	440 „	
3330	480 „	
3332	119 (XXXI)	
3335 *)	40 „ / 158 (XXXVIII)	488
3340	40 (XXXI)	
3341	79 „	
3343	79 „	
3350	80 „	NR
3360	120 „	
3365	159 „	
3368	160 „	244
3389	240 „	
3396	280 „	
3404	318 „	
3405	319 „	NR
3412	358 „	NR
3419	360 „	
3424	399 „	NR
3425	399 „	NR
3429	400 „	
3430	400 „	
3439	440 „	
3445	479 „	
3448	479 „	
3456	119 (XXXIII)	
3457	39 (XXXII)	
3459	40 „	
3467 **)	79 „	
3468	80 „	
3472	80 „	
3474	119 „	
3477	119 „	
3488	159 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
3489	159 (XXXII)	NR
3493	160 „	
3495	199 „	
3497	199 „	
3499	199 „	
3503	200 „	
3504	200 „	
3506	239 „	
3509	239 „	
3512	240 „	
3513	240 „	
3521	279 „	
3522	280 „	NR
3523	280 „	NR
3524	280 „	
3533	320 „	NR
3534	320 „	
3535	359 „	
3536 ***)	438 „	
3542	360 „	NR
3545	398 „	NR
3546	399 „	NR
3547	399 „	
3551	39 (XXXIII)	
3554	400 (XXXII)	
3557	438 „	
3562	440 „	NR
3563	440 „	491
3565	479 „	
3572	480 „	NR
3573	480 „	NR
3584	79 (XXXIII)	
3588	80 „	
3589	80 „	
3593	119 „	
3597	120 „	
3600	120 „	
3607 ****)	159 „	
3608	159 „	NR
3610	160 „	
3620	199 „	
3622 *****)	239 „	
3625	239 „	
3627	278 „	NR
3630	240 „	
3632	279 „	NR
3635	279 „	
3639	280 „	

*) O soluție necomplectă s'a publicat la pag. 182 Vol. XXXVII.

**) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXII.

***) Vezi erata pag. 40 Vol. XXXIII.

****) Vezi erata pag. 240 Vol. XXXIII.

*****) Vezi erata pag. 280 Vol. XXXIII.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3640	280 (XXXIII)	
3644	319 „	
3647	320 „	NR
3650	320 „	
3653	359 „	
3657	359 „	NR
3658	360 „	
3659	360 „	
3660	360 „	
3664	399 „	
3665	399 „	NR
3675	439 „	
3677	440 „	
3681	478 „	NR
3682	478 „	NR
3684	479 „	NR
3689	480 „	
3692	39 (XXXIV)	
3693	39 „	
3699	40 „	NR
3700	40 „	NR
3702	79 „	
3703	79 „	NR
3705	79 „	
3706	79 „	
3713	119 „	
3714	119 „	
3720	120 „	
3725	160 „	
3732	199 „	
3733	119 (XXXV)	NR
3736	200 (XXXIV)	NR
3749	240 „	
3755	279 „	
3760	280 „	
3762	319 „	
3763	319 „	
3764	319 „	
3765	320 „	
3766	320 „	
3768	320 „	
3772	359 „	
3775	360 „	
3776	360 „	
3780	360 „	
3784	399 „	
3787	400 „	
3790	400 „	
3792	439 „	
3793	439 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3802	479 (XXXIV)	
3804	479 „	NR
3807	480 „	
3808*)	480 „	
3810	480 „	
3817	40 (XXXV)	
3819	40 „	
3820	40 „	
3823	79 „	
3824	79 „	
3829	80 „	NR
3832	119 „	
3836	120 „	NR
3837	120 „	
3839	120 „	
3840	120 „	
3844	159 „	NR
3845	159 „	
3849	160 „	
3853	199 „	NR
3863	239 „	
3864	239 „	NR
3867	240 „	
3873	279 „	
3874	38 (XXXVIII)	
3876	279 (XXXV)	
3880	280 „	NR
3883	319 „	
3896	360 „	NR
3900	360 „	194
3902	398 „	
3906	399 „	
3909	400 „	NR
3911**)	439 „	
3913	439 „	NR
3915	439 „	
3916	439 „	NR
3920	440 „	NR
3924	479 „	
3926***)	480 „	
3933	39 (XXXVI)	NR
3934	39 „	
3939	40 „	
3944	79 „	NR
3945	79 „	
3948	80 „	157
3950	80 „	
3958	119 „	246
3961	159 „	
3965	159 „	

*) A se vedea complectarea enunțului la pag. 288 Vol. XL.

**) Începutul soluției acestei probleme a fost dat la pag. 468 Vol. XXXVI.

***) Vezi rectificarea pag. 40 Vol. XXXVI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
3975	200 (XXXVI)	
3976	200 „	
3983	238 „	NR
3985	239 „	
3988	240 „	
3999	280 „	
4000	280 „	
4005	319 „	
4010	320 „	NR
4013	359 „	NR
4021 *)	398 „	
4022	398 „	
4024	398 „	582
4028	400 „	
4029	400 „	
4030	400 „	NR
4034	439 „	NR
4035	440 „	
4038	440 „	
4041	38 (XXXVIII)	
4044	479 (XXXVI)	
4045	142 (XL)	NR
4046	480 (XXXVI)	299
4053 **)	39 (XXXVII)	NR
4055	39 „	
4056	79 „	
4059	40 „	NR
4060	40 „	
4062	79 „	NR
4066	80 „	250
4067	80 „	
4068	80 „	NR
4070	80 „	NR
4073	119 „	NR
4074	119 „	
4075	120 „	
4080	120 „	
4083	159 „	
4084	159 „	
4085	159 „	NR
4088	160 „	
4091	199 „	
4093	199 „	
4096	200 „	
4097	200 „	
4098	200 „	
4102	239 „	NR
4103 ***)	239 „	
4104	239 „	
4105	240 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4107	240 (XXXVII)	
4111	279 „	NR
4112	279 „	NR
4118	280 „	
4121	318 „	
4125	319 „	
4126	319 „	
4127	320 „	
4132	359 „	NR
4135	359 „	
4146	399 „	
4148	400 „	NR
4150	400 „	NR
4151	438 „	NR
4154	438 „	586
4155	439 „	
4157	439 „	
4162	478 „	
4163	478 „	NR
4165	479 „	
4166	479 „	
4167	479 „	NR
4169	480 „	NR
4172	39 (XXXVIII)	
4173	39 „	
4175	39 „	
4177	40 „	
4181	78 „	
4184	79 „	
4185	79 „	
4186	80 „	588
4187	80 „	159
4190 ****)	80 „	
4191	118 „	
4192	118 „	NR
4194	119 „	
4196	119 „	
4199	120 „	
4203	159 „	NR
4205	160 „	
4206	160 „	NR
4210	160 „	NR
4213	198 „	349
4214	198 „	
4215	199 „	
4225	239 „	
4226	240 „	
4227	240 „	439
4230	240 „	NR
4232	279 „	

*) O soluție parțială a acestei probleme a fost dată la pag. 233 Vol. XXXVII.
**) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXVIII.
***) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXVIII.
****) Vezi erata pag. 120 Vol. XXXVIII.

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
4234	279 (XXXVIII)	
4236	280 „	NR
4238	280 „	
4240	280 „	NR
4243	319 „	
4244	319 „	
4245	319 „	
4247	320 „	
4248	320 „	
4249	320 „	NR
4250	383 (XXXIX)	
4251	359 (XXXVIII)	
4252	359 „	NR
4255	359 „	111
4256	359 „	NR
4257	359 „	
4266	400 „	161
4269	400 „	162
4270	400 „	
4271	439 „	197
4274	439 „	
4275	439 „	NR
4277	440 „	NR
4279	118 (XXXIX)	
4280	440 (XXXVIII)	NR
4281	479 „	NR
4283	479 „	NR
4285 *)	479 „	
4286	480 „	
4287	480 „	
4288	480 „	NR
4289	480 „	NR
4290	383 (XXXIX)	NR
4297	40 „	
4298	40 „	
4299	40 „	
4300	40 „	
4301	78 „	NR
4302	78 „	
4303	78 „	NR
4306	79 „	
4307	79 „	
4308	80 „	
4313	119 „	
4314	119 „	534
4315	120 „	NR
4316	120 „	
4318	120 „	198
4319	120 „	NR
4320	120 „	NR
4321	159 „	589

Nr. problemei	*Pagina la care a fost:* Propusă [1])	Rezolvată [2])
4326	159 (XXXIX)	
4329	160 „	
4330	160 „	252
4332	198 „	300
4333	198 „	NR
4335	198 „	
4337	200 „	NR
4338	200 „	441
4339	200 „	
4340	200 „	NR
4341	239 „	386
4342	239 „	NR
4343	240 „	112
4344	240 „	NR
4349	240 „	630
4350	240 „	
4352	286 „	NR
4354	287 „	113
4355	287 „	
4356	287 „	NR
4357	288 „	NR
4358	288 „	NR
4360	334 „	NR
4361	334 „	113
4362	334 „	NR
4363	335 „	NR
4365	335 „	
4367	336 „	201
4368	336 „	
4369	336 „	
4370	336 „	
4373	383 „	
4374	383 „	443
4375	383 „	492
4376	384 „	
4377	384 „	
4378	384 „	
4379	384 „	495
4380	384 „	NR
4382	431 „	302
4383	431 „	496
4384	431 „	NR
4385	431 „	
4386	431 „	591
4387	432 „	535
4389	432 „	NR
4391	478 „	NR
4393	478 „	NR
4394	479 „	
4395 **)	479 „	NR
4396	479 „	NR

*) Vezi erata pag. 40 Vol. XXXIX.

**) A se vedea erata pag. 48 Vol. XL.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4398	480 (XXXIX)	
4399	480 „	NR
4400	480 „	
4401	480 „	593
4402	480 „	
4404	526 „	NR
4405	526 „	
4406	526 „	
4407	527 „	
4409	527 „	
4410	527 „	
4411	528 „	
4412	528 „	NR
4413	528 „	
4414	528 „	
4416	46 (XL)	NR
4417	46 „	
4418 *)	47 „	
4419	47 „	256
4420	47 „	
4422	48 „	538
4423	48 „	
4424	48 „	390
4425**)	48 „	632
4426	48 „	NR
4427	94 „	114
4428	95 „	
4430	95 „	203
4432	95 „	
4435	96 „	
4436	96 „	350
4437	96 „	
4438	96 „	NR
4440	142 „	205
4441	143 „	
4442	143 „	
4443	143 „	
4445	143 „	NR
4446	143 „	
4447	144 „	
4448	144 „	164
4449	144 „	NR
4450	144 „	
4452	190 „	NR
4453	190 „	
4454	191 „	394
4455	191 „	
4456	191 „	207

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4458	191 (XL)	
4459	192 „	210
4460	192 „	
4461	192 „	NR
4462	192 „	258
4464	238 „	NR
4465	238 „	NR
4466	239 „	NR
4467 ***)	239 „	
4468	239 „	NR
4469	239 „	
4470	240 „	
4471	240 „	
4472	240 „	541
4473	240 „	NR
4474	240 „	NR
4476	285 „	NR
4477	285 „	
4478****)	285 „	
4479	285 „	NR
4480	286 „	NR
4481	286 „	NR
4482	287 „	
4483	287 „	NR
4484	287 „	NR
4485	288 „	
4486 *****)	288 „	NR
4487	334 „	NR
4488	334 „	
4489	334 „	NR
4490	335 „	NR
4491	335 „	
4492	335 „	NR
4493	336 „	305
4494	336 „	
4495	336 „	
4496	336 „	
4497	336 „	497
4498	336 „	NR
4500	382 „	NR
4501	382 „	
4502	382 „	
4503	383 „	NR
4504	383 „	
4505	383 „	
4506	383 „	444
4507	384 „	
4508	384 „	

*) Vezi rectificare pag. 144 vol. XL.
**) Vezi erata pag. 576 Vol. XL.
***) Vezi erata pag. 576 Vol. XL.
****) Vezi erata pag. 384 Vol. XL.
*****) Vezi erata pag. 120 Vol. XLI.

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4509	384 (XL)	
4510	384 „	259
4511	430 „	NR
4512	430 „	498
4513	430 „	NR
4514	431 „	NR
4515	431 „	NR
4516	431 „	NR
4517	431 „	NR
4518	431 „	
4519	432 „	395
4520	432 „	
4521	432 „	634
4522	432 „	NR
4523	478 „	260
4524	478 „	
4525	478 „	
4526	478 „	
4527	479 „	
4528	479 „	
4529	479 „	
4530	480 „	NR
4531	480 „	NR
4532	480 „	
4533	480 „	NR
4534	480 „	NR
4535	526 „	
4536	526 „	260
4537	527 „	397
4538	527 „	307
4539	527 „	400
4540	527 „	
4541	527 „	543
4542	527 „	
4543	528 „	403
4544	528 „	
4545	528 „	
4546	528 „	
4547	573 „	NR
4548	573 „	
4549	573 „	637
4550	574 „	NR
4551	574 „	
4552	574 „	
4553	574 „	352
4554	574 „	
4555	575 „	
4556	575 „	
4557	575 „	
4558	576 „	NR

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1]	Rezolvată [2]
4559	116 (XLI)	
4560 *)	116 „	
4561	116 „	NR
4562	117 „	
4563	117 „	
4564 **)	117 „	
4565	117 „	638
4566	118 „	
4567	118 „	595
4568	118 „	
4569	118 „	
4570	118 „	
4571	119 „	
4572	119 „	355
4573	119 „	
4574	119 „	
4575	119 „	
4576	119 „	
4577	120 „	
4578	120 „	NR
4579	166 „	639
4580	166 „	NR
4581	166 „	
4582	167 „	545
4583	167 „	
4584	167 „	445
4585	167 „	
4586	262 „	
4587	262 „	NR
4588	168 „	NR
4589	168 „	
4590	168 „	NR
4591	214 „	
4592	215 „	NR
4593	215 „	NR
4594	215 „	
4595	215 „	
4596	215 „	NR
4597	216 „	
4598 ***)	216 „	NR
4599	216 „	
4600	216 „	
4601	216 „	NR
4602	216 „	NR
4603	262 „	NR
4604	262 „	
4605	263 „	NR
4606	263 „	
4607 ****)	263 „	
4608	263 „	641

*) Vezi erata pag. 160 Vol. XLI.
**) A se vedea pag. 412.
***) Vezi erata pag. 264 Vol. XLI.
****) „ „ „ 312 „ „

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4609	263 (XLI)	
4610	263 „	
4611	264 „	
4612	264 „	NR
4613	264 „	NR
4614	264 „	
4615	310 „	NR
4616	311 „	642
4617	311 „	447
4618	311 „	NR
4619	311 „	
4620	311 „	
4621	311 „	
4622	312 „	
4623	312 „	448
4624	312 „	449
4625	312 „	
4626	312 „	
4627	359 „	
4628	359 „	NR
4629	359 „	
4630	359 „	NR
4631	359 „	
4632	359 „	
4633	359 „	
4634	360 „	
4635	360 „	
4636	360 „	NR
4637	360 „	
4638	360 „	
4639	406 „	
4640	406 „	
4641	407 „	NR
4642	407 „	
4643	407 „	
4644	407 „	
4645	407 „	NR
4646	408 „	
4647	408 „	NR
4648 *)	408 „	
4649	408 „	
4650	408 „	NR
4651	453 „	546
4652	453 „	
4653	454 „	
4654	454 „	
4655	454 „	
4656	454 „	
4657	454 „	NR
4658	455 „	
4659	455 „	

Nr. problemei	Pagina la care a fost: Propusă [1])	Rezolvată [2])
4660	455 (XLI)	
4661	455 „	
4662	455 „	
4663	502 „	
4664	503 „	
4665	503 „	
4666	503 „	NR
4667 **)	503 „	NR
4668	503 „	
4669	503 „	
4670	504 „	NR
4671	504 „	NR
4672	504 „	NR
4673	504 „	NR
4674	504 „	
4675	550 „	NR
4676	550 „	NR
4677	550 „	NR
4678	550 „	NR
4679	550 „	NR
4680	550 „	NR
4681	551 „	NR
4682	551 „	NR
4683	551 „	NR
4684	551 „	NR
4685 ***)	552 „	NR
4686	552 „	NR
4687	598 „	NR
4688	598 „	NR
4689	598 „	NR
4690	598 „	NR
4691	599 „	NR
4692	599 „	NR
4693	599 „	NR
4694	599 „	NR
4695	600 „	NR
4696	600 „	NR
4697	600 „	NR
4698	600 „	NR
4699	646 „	NR
4700	646 „	NR
4701	646 „	NR
4702	646 „	NR
4703	647 „	NR
4704	647 „	NR
4705	647 „	NR
4706	647 „	NR
4707	648 „	NR
4708	648 „	NR
4709	648 „	NR
4710	648 „	NR

*) Vezi erata pag. 456 Vol. XLI.

**) Vezi erata pag. 552 Vol. XLI.

***) I s'a rectificat numărul de ordine la pag. 600 Vol. XLI.

I. EXERCIŢII *)

Aritmetica şi Analiza nedeterminată . . . 29(501), 34(548), 43(643).
Geometria . . . . . 6(261), 8(309), 12(358), 13(358), 15(404) 19(450), 21(451), 25(500), 26(500), 27(501), 28(501), 33(547), 37(549), 38(549), 39(597), 40(597), 41(597), 42(597), 44(644), 45(644), 46(644), 50(645), 51(646).
Algebra . . . . . 1(165), 2(165), 3(165), 5(214), 7(261), 9(310), 14(358), 30(501), 31(502), 47(644), 48(645).
Trigonometria . . . . 4(166), 10(357), 11(358), 16(405), 17(405), 20(450), 22(451), 32(547), 35(548), 36(549).
Analiza . . . . . 18(406), 23(452), 24(452), 49(645).

J. TABLOUL NUMELOR

Ioanei V. R., 209.
Abason E., 6, 99, 237, 343, 457.
Abel, 290.
Abramescu N., 5, 6, 32, 88, 127, 147, 189, 367, 410, 414, 436, 454, 458.
Adam I. M., 110, 154, 155, 156, 294.
Aiyor, 338.
Alaci V., 5, 6, 150, 151, 191, 193, 241, 290, 291, 330, 343, 366, 435, 437, 484, 531, 580.
Alasia C., 384 438, 485.
Aldea N N., 110, 154, 160, 252, 300.
Alembert D'., 261, 509.
Alevra A., 330.
Alexandrescu T. I., 16.
Alexandrini O., 16.
Altschiller-Court N., 291.
Amărăscu D. G., 110.
Amărăscu O. G., 154.
Amărăşteanu F. M., 166, 207, 210, 258, 261, 331, 352, 355, 357, 391, 396, 399, 403, 405, 450, 493, 500, 531, 533, 541, 544, 546, 551, 631, 638, 639, 643.
Amfilochie, Episcopul Hotinului, 26.
Ampère André-Marie, 453, 478, 508, 509, 510, 511, 512, 514, 515, 546, 547, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 629.
Ampère Antoinette, 514.
Ampère Jean-Jacques, 509.
Ampère Jean-Jacques fiul, 512.
Andronache I. V., 351.
Andronescu Pl., 148.
Andronic Al., 343.
Angelescu A., 6, 233, 459, 552, 569, 612, 626.
Angelescu C. Dr., 266, 269, 272.
Angelescu El., 190.
Anghelescu V. Elizel, 331.
Angheluţă Th., 5, 6, 60, 614.
Antonescu N. Filofteia, 209, 261, 355, 396.
Antonescu M., 217.
Antoni P. C. 242, 243.
Antoniu Corn., 6.
Antoniu S. I., 5, 6, 110, 157, 159, 168, 194, 197, 201, 252, 255, 291, 457, 579.
Apolonius, 370, 470, 471, 612.
Apostol G. N., 331.
Apostol V. R., 113, 209, 261, 307, 331, 459, 493, 496, 642.
Appel, 383.
Appert A., 289, 290.
Aprihăneanu I., 242.
Arago, 511, 512, 556, 601, 602.
Arapu I., 148.
Arcadian P. N., 155.
Archimede, 251, 370, 422.
Ardeleanu D., 447.
Arghiriade Em., 6.
Armeanca I., 6.
Arsavschi Al., 196, 542, 631.
Asachi Gh., 169, 183, 438, Asaki P., 184.
Atanasescu T., 148.
Atanasiu I., 386.
Aubert, 233, 458.
Aumann G., 628.
Aurian A. J., 584.
Avogadro, 557.
Avram N. C., 160, 255, 439.
Avram A. T., 331.
Avramescu C., 6, 386.

Babini J., 95.
Bacaloglu E., 123, 124, 126.
Bacârea Al., 210,
Bădescu E. A., 112, 113, 159, 160, 162, 201, 209, 257, 258, 394.
Bădescu Ilie, 330.
Bădescu A L., 6.
Bădescu R., 290, 343, 530.
Bădulescu V. D., 203.
Baidaff Ig. B., 6, 93, 95, 237, 241, 382, 484, 488, 490, 628.
Băjenaru G. V., 331.
Balaban N., 240, 291, 342.
Balaban V., 16, 267, 367.
Bălăceanu Angela, 114, 592.

*) Numerile din paranteză indică pagina la care a fost propus exerciţiul, iar cele din afara parantezei indică numărul pe care-l poartă exerciţiul.

Balan I. E., 110.
Bălescu I., 386.
Ballantine P. J., 383.
Balliccioni A., 94.
Balş Al.,, 184.
Balş Gh., 533.
Balş Th., 184.
Bălteanu C., 56.
Banciu I., 6, 149.
Barbilian D., 5, 6, 66, 289, 292, 344, 384, 438, 469, 524, 569.
Barbu A. A., 331,
Barral S. J., 95.
Basacov Gh., 263, 359, 454.
Basye E R., 342.
Bateman H., 383.
Baurnfelnd M. C. von, 581.
Bayes, 529.
Beiu-Paladi G. E., 152, 160, 261.
Beldiman V., 184.
Beleş A., 56.
Bell O. P., 93.
Belloiu N. C., 306, 396.
Bercovici M., 149.
Berdan I. C., 634.
Bernouilli, 95, 383, 509, 636.
Berra S. E. A., 237, 530, 579.
Bertini, 146.
Bertrand, 178.
Berzelius, 601.
Bessel, 76, 284, 342, 532.
Bézout, 187.
Bianu I., 24.
Biernaki M., 38, 39.
Bigourdan G., 190.
Bilo J., 95.
Birkenmayer A., 436.
Black A., 146.
Blaga Em., 210, 404, 536.
Blanchet M. A., 190.
Blaschke W., 93, 241.
Bloch, 146.
Blum L. I., 148.
Boborodea I. I., 331.
Bodea E., 148.
Bodnărescu M. H., 331, 459, 546.
Boerescu C., 148.
Bogdan Gr. 306.
Bogdan Gr. I., 205, 209, 210, 331, 391, 447, 448, 450, 493, 536, 538.
Bogdan P. M., 110, 154.
Bogdan-Duică G., 96, 415.
Bogza G. V., 205, 220, 493.
Boian D. E., 331.
Boian Gh., 184.
Boian C. I., 495.
Boitan N., 351.
Boldescu P., 240, 291.
Bolyai, 485.
Bompiani E., 533.
Bondea E., 237.
Borel E., 436, 530, 579.
Borneanu G., 6, 345, 508.
Boroş C., 112,
Boroş C. I., 447, 448, 541. 544.
Borş M. d-ra, 217.
Botea N., 5, 6, 75, 110, 120, 154, 155, 167, 203, 205, 213, 215, 233, 235, 242, 256, 257, 311, 360, 394, 424, 457, 504, 532, 534, 551.
Botez P. M., 241.
Botez St. M., 6.
Bouligand G., 82, 436.
Bourdon M., 344.
Brahy Ed., 82.
Bran D., 184.
Brand L. 383.
Brătescu N., 110.
Bratu Gh., 7, 435.
Bravais, 579.
Brener M. A., 7.
Brianchon, 135, 164.
Bricard R., 525, 526.
Brill A. von, 628.
Brocard, 79, 167, 296.
Broglie L. de, 532.
Brown B. A., 383.
Brown T. E., 342.
Bruckner V., 7.
Brunold Ch., 435.
Brylinschi E., 148.
Buchner V., 148.
Bucur N. V., 205, 209, 210, 306, 331, 391, 396, 404, 448, 450, 493.
Bucurescu I., 491.
Budeanu Const., 165, 592.
Budeanu I. C., 7, 99.
Buetzenberger F., 242.
Buhuş M., 184.
Buicliu Gh., 5, 7, 35, 89, 114, 115, 117, 127, 137, 150, 152, 164, 207, 215, 227, 228, 232, 233, 236, 246, 250, 259, 263, 266, 284, 290, 299, 302, 311, 326, 337, 338, 349, 360, 365, 383, 386, 390, 400, 439, 454, 457, 469, 496, 497, 500, 501, 527, 550, 577, 589, 591, 598, 622, 637, 641, 646.
Bujoiu, E. I., 148, 149.
Bujoreanu, N., 7.
Bunescu D. A., 5, 7, 83, 183, 266, 290, 457, 504, 581, 629, 630.
Bungescu I., 7.
Bungeţeanu, Preduţa, 113. 250.
Buradescu Fr., 7.
Burghelea C., 331.
Bursan Al. C.. 447.
Buşilă Ad., 7.
Buşilă D. C., 7, 99, 148, 190, 243, 292, 344, 606.
Buşilă I., 5, 7, 83, 88, 135, 266, 290.
Buzescu P. A. V., 331.
Buzincu I. I., 203, 205. 210, 261, 306, 331, 391, 396, 459, 493, 536, 537, 541.
Buzincu S., 404.

Cabrera P., 579.
Cairns J. J., 146.
Calapso R., 289.
Calimachi (Domnitorul) 183.
Calimachi Al., 184.
Călin I. C. D. 450.
Călinescu I. A., 450, 638.
Călugăreanu G., 179, 180, 264, 344.
Cambureanu V. D., 7.
Cambureanu V., 7.
Campbell W. J., 530.
Cantacuzin I., 184.
Cantacuzin Sc., 184.
Capriel I., 7.
Caracudovici Margareta 258, 498, 535, 631.
Carafoli E., 457.
Caraman A., 331.
Caraman E., 7, 359.
Cardara Gh., 210, 396, 591.
Carlitz L., 383.
Carnot, 451, 501.
Carol I., 269, 273, 314.
Carol II, 265, 277, 325.
Carp D., 184.
Carron Julie, 512.
Carron, d-l, 512.

Cârstoiu I., 344.
Cartan E., 530.
Carvallo E. M., 533.
Casorati, 124.
Cassian Gh., 7.
Cassini, 162, 163, 343.
Cauchy, 60, 146, 180, 240, 344, 477.
Cayley, 61.
Cazacu N. C., 7.
Cazanacli P., 217,
Ceauşescu E. V., 82, 113, 162, 201, 205, 261, 307, 331, 355, 391, 396, 403, 404, 442, 447, 460, 493, 496, 538, 544, 588, 590, 638.
Cebes, 517.
Cehak G. A., 541.
Cehan G. A., 331.
Cercel N., 460.
Cercelaru Gr. D., 152, 261, 331, 396, 447, 448.
Cesare A. E., 238.
Cesaro E., 89, 90.
Ceva, 33, 134, 545.
Chasles 478, 563.
Chateau T., 581.
Cheney 526.
Chiranghelea Th. 184.
Chiriac I. C., 114, 115, 210, 258, 448, 450, 544, 631.
Chiriac N., 386.
Chiricescu V., 8.
Chiricuţă A, 8.
Chiriţă M. M., 404, 448, 450, 642.
Chiţulescu I. I., 5, 8, 45, 89, 109, 110, 118, 290, 457,
Cioc I. D., 82, 331, 579.
Cioc M., 8.
Ciorănescu I. C., 110.
Ciorănescu I. N., 5, 8, 74, 93, 161, 162, 258, 264, 292, 312, 344, 350, 384, 390, 393, 408, 436, 438, 533, 579, 582, 586.
Ciortea M., 149.
Ciucă I. I., 331.
Climescu C., 217.
Clujanu A.*), 295.
Coandă I. V., 112, 114, 203, 591.
Cocea G. Th., 404, 407, 503, 543, 599, 647.
Cojocaru P. P.. 205, 209, 210, 261, 305, 331, 355, 391, 396, 404, 448, 450, 493, 495, 496, 536, 538.
Coleş E., 149.
Collin, 226.
Comănescu A. T., 331.
Comberousse Ch. de, 252, 410.
Comte A., 181, 182.
Constantin N. Constanţa, 210, 261.
Constantinescu Gh. Ing., 8
Constantinescu Gh., 342, 531, 580, 628.
Constantinescu Gh. Gh., Prof., 147, 232, 289, 342, 382, 383, 386, 487, 531, 580.
Constantinescu I., 110, 149, 294.
Constantinescu N. I., 109, 437.
Constantinescu M., 237.
Constantinescu T, 8, 267, 270, 319.
Constantinescu Z., 5, 8.
Coresi, diacon, 97.
Coriolis, 478.
Cornăţeanu I. A., 209, 331, 448, 450, 546.
Corti S. J. 628.
Coşereanu I., 110.
Coşniţă C., 196, 491, 600, 647.
Coşniţă V., 110, 155, 193.
Costăchescu, Prof., 437.
Costăchescu V. C., 491.
Costescu C., 396.
Costinescu D., 8
Costescu S. C., 203, 205, 209, 210, 306, 404, 450, 493, 536.
Couderc P., 94.
Couette, 436.
Cowgill P. A., 146, 342.
Crăciunescu E., 240, 291, 383.
Crăciunescu I. M., 331, 459.
Craiu N. I., 196, 491.
Crauz, 36.
Creangă S. D-ra, 217.
Cremona, 146.
Crişan A. C., 26.
Cristea Em., 396.
Cristea P., 109.
Cristescu V., 16, 88, 265, 267, 268, 306, 313, 321, 367, 368, 369, 374, 572.
Cristopol A. C., 198.
Crofton W. M., 93.
Crupenschi Al., 184.
Csecke W., 307, 350, 351, 392, 396, 403, 404, 493, 496, 498, 528, 542, 543, 592.
Curchi I., 112, 160.
Cuvier, 557.
Daburon, 509.
Damaschin G., 149,
Dan Marin, 493, 495, 544.
Dănulescu G., 386.
Darboux G. 186, 311.
Davidescu Em., 16, 267.
Davis, 297.
Day E. R., 99.
Deac I, 403.
Deaux R., 95, 342, 531, 627.
Debeaux A., 581.
Deceanu Gh. Gh., 82, 210, 331, 396.
Dedekind, 146.
Defrise P., 291, 531.
Degerando, 604.
Delambre, 513.
Delens P., 627.
Denjoy A., 435.
Derigaut A. A., 149.
Derksen D. B. Y., 93.
Descartes, 318.
Devisme J., 532.
Deweck M.. 342.
Diderot, 509.
Dieulefait E. C., 484
Dimitriu C. Călin I., 205, 209, 210, 331, 447, 493, 536, 538.
Dimo P., 149.
Dinculescu C., 344.
Dinulescu I., 149.
Diophante, 436.
Dirichlet, 437.
Dive P., 289.
Dobrea A., 546.
Dobrescu A., 257, 493, 496.

*) Pseudonimul lui Angelescu A.

Dobrescu N., 627.
Dobrescu D. P., 112, 113, 152, 205, 211, 261, 331, 396, 448, 450, 493, 495, 496, 544, 592, 642.
Dobrescu-Băbici, 110.
Dockeray C. R. N., 291.
Dordea Tr. 16, 110.
Dovideo M. J., 147.
Dovideo M. T., 238.
Drăghici V., 184.
Dragomir N. I., 110.
Dragomir P. R., 205.
Dragomirescu N. I., 154.
Drăguț M., 631.
Dressel G. G., 93.
Drotleff, 96.
Droz, 374, 375.
Dudenez E. H., 525.
Dulcescu M., 386.
Dumitrescu A. D., 8, 250, 252.
Dumitrescu I. Gh., 5, 8, 330, 343, 647.
Dumitrescu I., G-ral, 325.
Dumitrescu V. M., 331.
Dumitriu I., 205.
Dumitriu Ion, 238.
Dumitriu-Dado I., 159.
Dunford N., 93.
Dupuis J., 158, 458, 459.
Durand Gh., 82.
Duranona I. Vedia A., 530, 579.
Dye A. L., 146.

Eddington S. A., 241.
Eecke Ver, 422.
Eliad I., 26, 170.
Emanuel D., 273.
Enache D. I., 209, 210, 306, 331, 448, 450, 493.
Enășescu D. V., 205, 209, 210, 306, 355, 357, 493
Enescu D. D., 331.
Engel Fr., 485.
Enneper, 436.
Enström F., 190.
Epuran A. I., 159.
Erbiceanu C., 16.
Errera A., 435, 436.
Espanet G., 297.
Estève R., 189.
Euclide, 318, 436.
Euler L., 51, 77, 111, 112, 119, 123, 125, 128, 147, 148, 173, 175, 176, 179, 180, 290, 292, 338, 474, 475, 476, 509, 543, 570, 572, 598.
Evolceanu V., 16.
Evrard J., 148.

Fabian W., 531.
Faraday, 556.
Farny, 374, 375.
Farrel J. O., 342.
Felix C., 8.
Fermat, 383, 554.
Feuerbach, 215, 240, 342, 473, 476.
Fibonacci, 155, 156, 406, 527, 598.
Filipescu Em. Gh., 8, 96, 315, 368, 533.
Fințescu A., 294.
Fistié G, 240, 291, 531.
Fitz-Patrick, 278.
Florescu H., 203, 331.
Florescu B. I., 153, 154, 294.
Florescu M. U., 8, 360, 457, 503.
Florescu L. V., 152, 212, 261, 306, 331, 396, 448, 458, 544, 546, 638, 642, 643.
Florescu M., 294.
Focșăneanu I. M., 8, 110, 235, 236, 429, 469, 471, 529.
Forro, 97.
Forsyth R. A., 93.
Foster M., 530.
Fouret, 628.
Fourier, 93.
Fournaraki L., 190.
Franklin Ph., 146.
Fréchet M., 241, 289.
Frink O. Jr., 146.
Fredholm, 436.
Frobenius I., 97.
Fuller G., 530.
Fundățeanu C. I, 8, 386.
F. I. C., 344.
F. G. M., 195, 220, 405, 458, 459, 474, 596.

Gabrilescu R., 9.
Gabrowski F. E., 357, 639.
Galan I. I., 459.
Galan I. N., 331.
Galbură Gh., 438.
Gâlcă I. T., 9.
Galle, 225.
Galois, 564.
Galvani, 556.
Ganitchi I., 190.
Garabedian L. H., 146.
Garnier R, 94.
Garva R., 174, 530.
Gaspar L F. de, 579.
Gauss F. C., 93, 120, 123, 124, 126, 225, 477, 485, 529, 532.
Gavrilescu N. C., 152, 205, 209, 210, 331, 357, 391, 396, 403, 444, 447, 448, 493, 500, 638.
Geceanu I., 184.
Gehman M. H., 530.
Geiser, 146.
Georgescu G. Al., 331.
Georgescu E. C., 110, 154.
Georgescu I. C., 110.
Georgescu Elena, 386.
Georgescu E. Fl., 110, 154, 294.
Georgescu I. N., 9.
Georgescu N. N., 9.
Georgescu V., 110.
Georgescu-Gorjan St., 190.
Georgescu-Roegen N., 9.
Georgescu-Val. N. I. 9.
Georgian M., 190.
Gergonne, 121, 477, 529, 644.
Germain Sophie, 124.
Germani D., 190.
Germay J. H. R., 146.
Germay T. H. R., 240.
Geronimus J., 383, 530.
Getchell D. B., 93.
Gheocalescu A., 386.
Gheorghe T., 396.
Gheorghevici Chr., 160.
Gheorghiu C. Ad., 194, 195, 457, 552, 582, 599.
Gheorghiu Th. Gh., 5, 9, 77, 88, 110, 111, 120, 154, 155, 156, 160, 168 189, 203, 216, 233, 258, 295, 312, 369, 407, 457, 487, 491, 551, 572, 575, 591, 592, 600, 631, 647.
Gheorghiu S. I., 9, 99.
Gheorghiu A. M., 9, 168.
Gheorghiu A. Ș., 9.
Ghermănescu M., 5, 9, 53 59, 60, 92, 118, 168, 178, 180, 186, 216, 233, 292.

330, 341, 344, 359, 381, 407, 436, 437, 456, 457, 458, 472, 497, 498, 503, 532, 535, 541, 542, 593, 594, 599, 624, 625, 637, 648.
Ghervescu V., 386.
Gheţu F., 184
Ghica D. Alexandru II (Domnitor) 170.
Ghica A., 93, 438.
Ghimuş D. A., 9, 386.
Ghiocel V. V., 160.
Ghişoiu I. C., 444, 448, 450.
Ghişoiu I. P., 110, 159, 196, 491.
Ghiţescu V., 9, 110, 406
Gibbins M. N., 241, 531.
Giger C., 190.
Girault C., 580.
Gloden A., 383, 479, 529, 579, 625.
Gluşco N., 159.
Gob., 184.
Godeanu I. V., 160.
Godean R., 146
Gogu C., 273.
Goilav P. C., 110.
Goldenberg M. E., 495.
Goldenberg E. M., 209, 210, 448, 450.
Golescu Iordache, 429.
Gonzalez O. M., 291, 579.
Gonzalez P. J., 291, 341.
Goormaghtigh R., 95, 122, 146, 185, 291, 375, 531, 627.
Görges H., 630.
Gorup-Besanes F. E. von, 581.
Gottgetren G., 581.
Götts I., 96.
Gottschalk O., 290.
Grabovschi E., 261, 396.
Graf, 77.
Gräffe, 437.
Gross J., 97.
Graves M. L., 342.
Greceanu C., 190.
Greceanu N., 184.
Green, 93.
Grigorescu C., 9.
Grigorescu A. V., 82, 160, 162, 203, 209, 211, 257, 258, 331, 371, 460, 493, 495, 535.
Grubowschi E., 260.
Grumăzescu M., 210, 436, 638, 642.
Grumbach A., 436.
Grünbaum M., 112.
Guenjian B., 94.
Gussenhoven Lila, 146, 240, 291, 531, 627.
Gutenberg, 96, 553.
Guţu I. Al., 223.
Gutzner A., 292.
Gutzu V., 9.

Hadamard J., 291, 581.
Haimovici I., 217.
Hall W. T., 383.
Hamilton, 530
Handel N., 533.
Hanganu D. M., 9, 99.
Hardy G., 530.
Haret C. Sp., 265, 269, 273, 274, 322, 327, 436.
Haret V., 294.
Hendlé P., 297, 299.
Hensinger von Waldegg E., 630.
Herbay E. de, 305.
Herriot, 606.
Heuchamps E., 531.
Hickey M. D., 93.
Hilbert, 93, 383.
Hilf A., 258, 396.
Hill E., 93.
Hill W. F., 93.
Hill D. J., 146.
Hodoş N., 24.
Hogaş G., 270.
Hollcroft R. T., 530.
Honterus J., 96, 97, 98.
Horatiu, 508, 512.
Horenstein H. S., 355, 535.
Hopital, 90, 343, 631.
Hostinsky B., 435, 436.
Hristea I., 184.
Hug M. A., 190.
Hulubei D., 217.
Humbert E., 458.
Humbert P., 290, 532.
Hurmuzescu Dr. 190, 319, 606.
Huyghens, 343.

Iacob C., 95, 289, 628.
Iacob F., 330.
Iacoby Marcela, 331.
Iamandi Gh., 184.
Iancovici de Mirivo T., 516.
Ianculescu S. O., 349, 403 410, 528.
Ianculescu T. R., 9, 386.
Iliescu E., 110.
Iliescu Gh., 5, 9, 88, 457.
Iliescu Tr., 9.
Inculeţ I., 437.
Ioachimescu Gh. A., 9, 29, 108, 109, 117, 265, 266, 267, 268, 290, 306, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 330, 368, 369, 370, 373, 457, 577.
Ioachimescu A. Gh., 10.
Ioanid I. I., 107.
Ioanovici A., 5, 10, 83, 227, 266, 313, 525.
Ion A. I., 331, 458.
Ionescu I. I. Brezuica, 110.
Ionescu F. M. Corn, 331.
Ionescu T. C., 110.
Ionescu D-tru, 544.
Ionescu V. D., 5, 10, 58, 264, 457, 532, 586, 589, 632.
Ionescu H., 384.
Ionescu Ilie, 342.
Ionescu I., 5, 10, 27, 40, 42, 43, 71, 82, 83, 88, 89, 94, 95, 98, 99, 100, 107, 109, 110, 116, 148, 166, 171, 183, 184, 189, 190, 197, 198, 214, 219, 240, 241, 242, 260, 262, 265, 266, 267, 268, 271, 275, 290, 292, 302, 305, 306, 310, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 330, 341, 343, 344, 359, 367, 368, 370, 371, 374, 384, 406, 430, 437, 438, 453, 457, 458, 459, 460, 485, 505, 525, 526, 529, 533, 546, 550, 558, 581, 598, 606, 630, 646.
Ionescu I. L., 110.
Ionescu M., 159.
Ionescu Stelian, 331, 459.
Ionescu V., 205.
Ionescu-Biss P. H., 110, 160, 252, 300, 452, 457, 548, 550, 626, 643, 645.
Ionescu-Bujor C., 5, 10, 79, 111, 112, 116, 119, 167, 214, 215, 290, 311, 344, 358, 377, 407, 434, 455, 457, 492, 494, 551.

Ionescu-Siseşti B., 191.
Ionescu-Siseşti G., 435.
Ionescu-Ţiu D. C., 160, 454, 457, 547, 549, 599
Ionescu-Zane Gh., 10.
Ioniţă M. I., 110.
Iordache N. I., 110.
Iov C. Şerb., 159.
Isac C. D., 210.
Istrati C. Dr., 269, 314.
Isus Cristos, 558.
Iuga G. 289.
Ivan M., 242.
Ivanciu A., 112.
Ivănescu C., 112, 160, 163, 227, 252, 310, 451, 580, 588.

Jacobi, 146, 477, 478.
Jacquier E., 242.
James D. R., 342.
Jamet V., 581.
Janet P. 191.
Jarechie V. I., 331.
Jenkins D., 342.
Jerabek, 122.
Jijie A., 10.
Jipa C. A., 209, 331.
Jones B. F,, 93.
Jordan, 95, 604.
Josephine, 511.
Joungman, 338.
Julia G., 163.

Kampmann A., 628.
Kant, 182.
Karamata J., 435, 436,
Kaufmann N., 10.
Kelvin Lord, 532.
Kempisty S., 435
Kempner J. A., 383.
Kimball F. M., 383.
Kimbaum M., 267.
Kittell I., 93.
Klein F., 569.
Knall A., 404.
Knall S., 541.
Knothe H., 628.
Krafft, 96.
Kraner I., 630.
Kullback S., 383.
Kurzbeck J. de, 21.

La Menza F., 95.
Lagny, 343.
Lagrange, 148, 182, 241, 286, 509, 556.
Laguerre, 66, 520.
Lalande, 513.
Lalescu Tr. 16, 82, 83, 147, 233, 240, 268, 270, 290, 325, 341, 365, 368, 415, 419, 436, 460, 461, 485, 529, 579.
Lambert G., 241, 342.
Lamé. 478, 532.
Laplace, 213, 277, 437, 530, 532.
Lascu B., 450.
Laugel L., 485.
Laurent H., 581.
Lavoisier, 556.
Lazăr Gh., 82, 83, 97, 414, 415, 416, 417, 418, 460, 461, 462.
Lăzărescu Şt. Fl., 110, 294.
Lăzărescu C. I., 191.
Lăzărescu Th. J., 110.
Lazu C., 10.
Le Roy, 530.
Lebădă I. D., 110, 113, 114, 152, 210, 331, 391, 496, 541, 638.
Lebesgue H., 61, 62, 65.
Leemans J., 531.
Legendre M. A., 190, 435, 532.
Lehmer Emma, 383.
Leibnitz, 74, 233, 343, 594.
Leja F., 435, 436.
Lemoine E., 121, 163, 338, 380, 598, 646.
Leonida D., 10.
Leuco I., 159, 160, 396.
Levine J., 146, 342, 530.
Lewinsky W., 291, 341.
Linteş I., 5, 10, 38, 95, 117, 133, 135, 152, 157, 189, 216, 232, 262, 281, 290, 312, 330, 340, 352, 355, 358, 382, 408, 432, 448, 457, 503, 579, 580, 607, 611, 638, 639.
Liouville J., 147, 436, 477, 478, 575, 576.
Lipschitz, 146, 240, 383.
Liteanu I. Gh., 5, 10, 457, 525.
Litinski I., 448.
Livada F. Gr,, 10, 330, 457.
Lob H., 383.
Lobatschewsky, 477.
Lommel, 77.
Long L., 238.
Longchamps G. de, 121.
Loria G., 240.
Loyarte G. R., 241.
Lucas E., 130, 132, 157, 340, 607.
Lupaşcu I., 191, 365.
Lurquin M., 627.
Lussac G., 557.
Luther M., 96, 97.

Maclaurin, 194.
Magală I. G., 351.
Malaxa Elena, 10.
Malaxa N., 10.
Malcoci C., 10.
Malfatti, 597.
Mănac M., 203, 209, 211, 258, 396, 403, 493, 544.
Manafu V., 10.
Mandelbrojt, 435.
Mănescu M., 188, 197, 252, 438, 589.
Mangeron D. 217.
Manicatide Al., 147.
Maniţiu E., 191.
Mannheim A., 162.
Manoilescu Gr,, 191.
Manoilescu M., 10, 270, 315.
Manolescu M. Em., 294.
Mantea St. 148.
Mărăcine B., 5, 11.
Marchi A. de, 26.
Marcovici E., 357, 447, 596.
Marcovici I., 546.
Marcu V., 330.
Mareş I. Em., 160.
Mareş T., 11.
Margulis G., 112, 114.
Margulius M., 113, 157, 160, 163, 252, 257, 443.
Marian V., 419, 462, 517.
Marin Al., 169.
Marin Şt., 110.
Marinescu D. Gh., 331.
Mariotte, 555.
Marothi G., 516.
Martac V. R., 331.
Marteş V. Gr., 404, 447, 450, 495.
Martinez P. E., 579.
Mateescu Cr., 5, 11, 100, 290, 344, 384.
Mateescu G., 110
Mateescu St., 242.
Matei D. D., 546.
Mathieu, 532.

Mătieş V., I., 93, 109, 228, 241, 337, 338, 349, 610, 619.
Mavrodi M., 184.
Mavrodin D. D., 160, 162, 203, 260, 351, 439, 442, 493, 495, 544, 591, 592, 594, 631, 634.
Maxwel, 556.
Mayer O., 217.
Mazilu C. P., 160, 162, 198, 203, 205, 210, 260, 261, 304, 307, 350, 351, 392, 396, 434, 435, 444, 495, 535, 579, 591, 592, 638.
Mears M. Fl., 383.
Mehedinţi I. D , 330.
Meilychson A., 217.
Melanchton, 97.
Menelaus, 134.
Merbl A. I., 447, 448, 450.
Méré, 554.
Mereuţă C. C., 110.
Mereuţă Em., 160, 165, 201, 646.
Mereuţă V., 11.
Metea S. V., 82, 209, 331.
Metzburg I. G. de, 418 419, 461, 462.
Meyer, 36, 38.
Mihăescu C., 386.
Miclescu A., 110.
Miclescu St , 242.
Micli A., 458.
Mihăescu C., 56.
Mihăescu D. C., 110.
Mihăescu St., 242,
Mihai, Mare Voevod de Alba Iulia, 272.
Mihăileanu N. N., 112, 159, 163, 168, 196, 250, 252, 261, 262, 300, 309, 311, 358, 359, 384, 438, 443, 444, 450, 454, 457, 500, 501, 503, 535, 547, 549, 579, 588, 597, 612, 644, 645, 646.
Mihăilescu A., 541.
Mihăilescu Gh., 257.
Mihăilescu P. T., 11.
Mihalcea St. D,, 205, 210, 306, 391, 541.
Mihalcea I. O., 203.
Mihalopol C., 11, 168.
Mihoc Gh., 93, 96, 530, 637.
Mikloşi C., 242.
Militaru P. A., 331.
Miller W. E., 146.
Milu I. N., 210, 493.
Mingea M., 331.
Minkowski, 93.
Minois S., 93.
Miquel, 134, 409, 611.
Mircea A., 112.
Mircea M. E., 11.
Mircea N. St. 16, 368.
Mirescu P., 11, 119, 207, 209, 360, 395, 396, 431, 450.
Mitault H., 189.
Mitescu C., 11.
Mititelu C. C., 11.
Mititelu C. I., 11, 386.
Mocearof N., 242,
Moessner A., 93, 95.
Moisil Gr., 533.
Moisiu C., 331.
Moisovici M. Şt., 331, 396, 447.
Monge, 172, 175.
Montel P., 39, 82, 83, 435, 436..
Moore H. E., 383.
Morand M., 436.
Moreux Th., 82, 83.
Morse M., 530.
Motaş C., 242.
Moţoi I., 16.
Mrazec L., 242.
Müller N., 98.
Murăroiu I., 109.
Muraru P. D., 331.
Mureşeanu Andrei, 97.
Musceleanu Dacia, 538.
Musceleanu S. Ileana, 261.
Myller A., 126, 217, 218, 629.

Nadolu T. A., 331.
Nagel, 121, 500, 644.
Naneş G., 436.
Napier J., 93, 402.
Napoleon I., 277, 605.
Năstase Gr. M., 83, 257, 331, 396, 447, 450, 459, 591.
Năturaş D., 16, 365.
Neagu I. T., 332.
Neagu V., 544.
Neamţu P., 11.
Nedelcu V. N., 331.
Nedelescu F. A., 331.
Negoiţă C., 203.
Negrea A. L. M., 113, 149, 152, 160, 164, 196, 198, 203, 209, 210, 244, 255, 307, 351, 391, 403, 404, 441, 442, 444, 445, 447, 448, 450, 493, 495, 500, 542, 544, 545, 546, 590, 591, 592, 595, 631, 634, 642.
Negretzu I. Fl., 110.
Negretzu I., 11.
Negură St., 11, 386.
Neuberg J., 153, 184, 380, 410, 542.
Neumann, 77.
Newton I., 74, 82, 232, 341, 556.
Nichifor A. G., 11, 243.
Nichifor Sc. M., 201.
Nichols D. G., 93.
Nicodym S., 435.
Nicolae, Principe de România 265.
Nicolaevici G., 16.
Nicolau Al., 11.
Nicolau H. C., 11, 151.
Nicolau M. I., 110.
Nicolau T. M., 12, 408, 648.
Nicolau-Kriteanu V., 386.
Nicolescu St. I.. 152, 216, 282.
Nicolescu M., 5, 12, 70, 93, 147, 292, 322, 344, 386, 436, 438, 457.
Nicolescu N., 16, 267.
Nicolescu V., 330.
Niculescu V. Al., 12, 119, 147, 355, 357, 400, 403, 425, 436, 550.
Niculescu C., 12.
Niculescu V. Gh. Lt.-C-dor 5, 12, 118, 233, 264, 379, 408, 455, 496, 501, 502, 504, 546, 578, 595.
Niculescu I. I., 238, 242.
Niculescu St. I., 396, 403.
Niculescu I. R., 12.
Niewenglowski B., 381.
Nikodym O., 435.
Nistorescu V. D., 331.
Niţescu C. Gh., 331.
Noether E., 291, 579.

Oakley O. C., 291.
Ocagne M-d, 529.
Odobescu M. Simona, 331.

Oersted, 556.
Offord C. A., 93.
Olteanu E. St., 158, 300, 630.
Onadi I, 517.
Onicescu O., 12, 99, 330, 344, 530.
Oprescu Gh., 12, 330.
Oprişan G. E., 110.
Orănescu O., 5, 12, 359.
Orăşanu D. C., 5, 12, 457.
Orăşanu Gr., 12.
Ormesson D', 606.
Osgood F. W., 146.
Osvald Sc., 343.
Ozanam, 343.

Pădureţ A. V., 331, 546.
Pagani A., 242.
Paicu M., 331.
Pall G., 93, 530.
Pamula A., 110.
Panaitescu G. A., 110.
Panaitescu Sc., 12, 271.
Pao-Lu Hsü, 146.
Pantazi Al., 5, 12, 118, 384, 436, 533.
Pântescu C., 331.
Panu C., 184.
Panu H. I., 238.
Papelier G., 82, 233, 458.
Pappus, 257, 422, 466.
Paradine G. C., 241.
Parent, 343.
Parepeanu C. I., 300, 588.
Parseval, 342.
Pârvu A. ,5, 12.
Pârvu Tr., 386.
Pascal, 135, 318, 554.
Paşcanu S., 13.
Pasăre S. E., 331, 459.
Pasti D., 184.
Pastia A. D., 243.
Pastor R. J., 95. 437.
Patriciu G. T., 13.
Pătroianu I. M., 110.
Pavel D., 292, 293.
Pavel N., 240, 291.
Parieţeanu D., 243, 330.
Perkins W. F., 530.
Petersen J., 410.
Petrescu D., 190.
Petrescu Gh., 293.
Petrescu I. I., 160, 203, 209, 351, 391, 403, 444, 450, 496, 588, 642.
Petrescu V. M., 331.
Petrescu C. O., 332.
Petrovanu D., 365.
Petrovici D. I., 294.
Petrovitch M., 435.
Philipide M., 12.
Picard, 320, 436.
Pidduck B. F., 241.
Pincherle, 95.
Pitagora, 134, 511, 531.
Plăcinţeanu I., 386.
Platon, 326.
Plessner, 93, 342.
Plüker, 478.
Poenaru P., 169.
Poincaré H., 182, 183, 320.
Poinsot, 163.
Poisson, 529, 576, 628.
Pomez B. J., 529.
Pompeiu D., 344, 383, 435, 436, 438.
Pompilian Constanţa, 485.
Poncelet, 61, 65, 195, 518.
Pop G., 26.
Popa I., 110.
Popa I. I., 217, 218, 241.
Popa I. T., 110.
Popea G. O., 110, 154.
Popescu Th. Al., 237.
Popescu N. Corn., 196, 402.
Popescu F., 396.
Popescu D. Gh., 151, 294.
Popescu I. Gh. G-ral, 129, 235, 236, 425, 460, 470, 529.
Popescu M. Gh., 331.
Popescu I., 13.
Popescu M, 448.
Popescu N., 191.
Popescu Victor, 13.
Popescu-Botoşani G., 13, 119, 148, 648.
Popescu-Zorica N. Al., 331.
Popovăţ P., 99.
Popovici I. G., 546.
Popovici Chr. I., 110.
Popovici Th. I., 110.
Popovici Th. M., 110.
Popovici-Puiu I. D., 110.
Popoviciu C, 435, 436.
Popoviciu Tib., 13, 68, 75, 110, 146, 154, 162, 163, 216, 244, 246, 264, 288, 289, 290, 294, 435, 552, 600, 614, 619.
Popovsky G., 293.
Popp N., 13.
Popp Tr. 13.
Portocală M., 13, 386.
Poşoi N. M, 331.
Postelnicescu C. M., 209, 257, 331, 493, 496, 538, 544, 546, 552, 591, 642, 646.
Pothénot, 225.
Potopeanu Gh., 13.
Potot Jeanne, 514.
Prandtl, 36, 38.
Praporgescu N., 13.
Preciado I. T., 331.
Predoescu I. M., 201, 391, 538, 591.
Pringsheim, 290.
Procopiescu M., 591.
Protopopescu Gr., 13.
Psalidis At., 419.
Ptolomeu, 81, 134, 226, 291.

Quade S. E., 342, 383.
Quine V. W., 530.

Racliş R., 13.
Rada D., 211, 396.
Radovici Em., 293.
Radu A., 209.
Radu E. M., 384.
Rădulescu Eliade I., 414, 415.
Rădulescu G. Oct., 331, 459.
Rădulescu Vlad, 293.
Rainich J. G., 530.
Rondels C. W., 342.
Rarincescu C., 293.
Răşcanu I. R., 160.
Razo C., 184.
Regis, 343.
Reid T. W., 342.
Renard, 124.
Revici T., 13.
Ricatti, 456, 634, 635, 636.
Richardson M., 146.
Rinow W., 628.
Ripert L., 380.
Riureanu M. J, 190.
Rizescu T. I., 294.
Robertson S. M., 146.
Robinson M. R., 93, 146, 291.
Roco M., 16, 267, 367.
Rohr I. A., 331.
Rolle, 343.
Roman I. N., 332, 351.
Romaşcanu G. Georgeta, 331, 459.
Roşca St. G., 157.

Roşculeţ N., 446, 448, 450.
Rosenblatt A., 436.
Roşu Al., 16.
Roşu Al. Al., 5, 13, 120, 197, 227, 263, 305, 306, 360, 429, 457, 598.
Roşu V., 13.
Rotaru G. G., 541.
Rouché E., 410.
Rousseau J. J., 509, 511, 512.
Rudenberg R., 293.
Rudio F., 148.
Rusu D. C., 159.
Ruziewicz St. 435.

Şabac Gh. I., 113, 160, 203, 332, 460, 497, 496.
Saegiu D., 386.
Sager N. I., 113, 160, 203, 209, 210, 257, 258, 352, 392, 395, 493, 568, 588, 589, 592, 634.
Saichin O. A., 331, 459.
Saint-Hilaire G. de, 557.
Sainte Beuve, 601, 602, 604.
Şălăgeanu A., 13.
Sale Q. R., 93.
Saligny A., 16 267, 271.
Saligny M., 14.
San Juan R., 437.
Săndulache C., 438, 581, 641.
Săndulescu I. I., 331.
Sanielevici S., 435.
Sannia, 530.
Săpunaru S. Gh., 14.
Sârbu S. Vl.. 198, 255.
Sarcey de Sutières Antoinette-Jeanne, 509.
Sarian M., 5, 14, 457.
Sava Gh., 293.
Sava C. J., 442.
Săvescu M., 294.
Săvescu V. Dr., 364, 386.
Savin C. I., 232, 252, 282, 357, 504.
Savovici G. F., 351, 391, 392, 538.
Scavinschi D., 184.
Scheffer M. I., 93.
Schelet Al., 184.
Schelet An., 184.
Schileru Gr., 293.
Schileru Dili C. I., 14, 312, 504, 600.
Schilling F., 569.
Schlesinger O., 563.
Schlicht, 146.
Schönfinkel, 530.
Schönhardt E., 628.
Schumacher A., 217.
Schwarte M., 630.
Schwarz, 626.
Şcodrano Al., 163.
Sechel T. M, 331.
Seifert L., 343.
Selagianu A., 387.
Şerbănescu V. Fl., 250.
Şerbănescu M. I., 110, 154.
Şerbănescu Gh. V., 14.
Şerbescu D., 293.
Şeremet M. Gh., 490.
Sergescu B., 14.,
Sergescu P., 5, 14, 39, 183, 320, 343, 386, 435, 436, 457, 458, 459, 503.
Sfinţescu I. C., 14.
Sgholz E, 628.
Sheffer M. I., 383.
Siara I. V., 209.
Siemens M., 190.
Sierpinsky W., 290, 435.
Silaş G., 111, 112, 114, 448. 450, 589, 634, 642.
Simionescu D. Gh., 5, 14, 81, 110, 119, 309, 330, 404, 455, 457, 544, 579, 580, 648.
Simson T. 375, 451, 627.
Şincai Gh., 24, 515, 516, 517.
Singh A., 458.
Sixto Rios, 477.
Smântânescu A., 14.
Smart H. E., 241.
Soanul Petru, Diacon 97.
Socrate, 517.
Şova C. I., 112.
Stäckel P., 485.
Stamatescu I. Gh., 14, 457.
Stamatescu I., 14.
Stan D. A., 111, 438.
Stan D., 14.
Stancu Gh., 110.
Stănculescu G., 631.
Stănescu M. E,, 332, 460.
Stănescu Gh., 210.
Stăneşti M., 442.
Stark V, 293.
Ştefan Cel Mare, 533.
Ştefan M., 154, 156.
Ştefănescu B., 680.
Ştefănescu Gh. C., 160.
Ştefănescu Em., 110, 154, 156, 459.
Ştefănescu D. N., 113, 152, 209, 261, 307, 331, 357, 396, 407, 448, 450, 458, 493, 544, 546, 591, 592, 638, 642, 643.
Ştefănescu-Radu I., 606.
Ştefănescu S. Sabba, 237.
Ştefăniţă Vodă, 533.
Steiner, 62, 162, 227.
Stephenson, 363, 364.
Stewart, 248, 294, 394.
Stieltjes J. Ph., 93, 437.
Stihi E., 217.
Stoenescu Al., 181, 182, 183, 630.
Stoenescu I., 110, 155.
Stoian S. I., 335.
Stoica D. Al., 82, 209, 212, 258, 260, 308, 350, 386, 396, 446, 447, 496, 538, 540, 542, 543, 546, 589, 642.
Stoica V. D., 14, 117, 448.
Stoicescu T., 110, 112, 114, 201, 205, 210, 305, 306, 442, 493, 536, 631, 644, 645.
Stoilov S., 344, 435.
Stratilescu G. Gr., 361.
Streder I., 306, 331, 448.
Struik J,, D., 93.
Study E., 92.
Sturm C., 575.
Sturm R., 124, 477, 478.
Sturza Al., (Logofăt), 184.
Sturza Al. (Vornic), 184.
Sturza C., 184.
Sudan G., 344.
Sugar A., 342.
Şuşu C., 53.

Taboury M., 436.
Tamarkin D. J., 93.
Tănăsescu A., 14, 107, 330.
Tănăsescu C., 344.
Tănăsescu N. N., 331.
Tănăsescu A. T., 15, 238.
Tănăsiciuc V. C., 331, 459.
Ţarălungă Gh. D., 210, 332,
Tarasiuc I. S., 259, 498, 542, 634.
Ţarina N., 450.
Tartinvile A., 533.
Tătaru V. N., 83, 331, 448.
Taylor, 111, 112, 436, 553.

Taylor E. A., 93, 383.
Tchakaloff, 435.
Temple G., 531.
Teodor D. I., 16, 270, 368, 505, 507, 508.
Teodoreanu V., 15, 330, 365.
Teodorescu C. C., 15, 100, 147, 238, 324, 436, 531.
Teodorescu D., 237.
Teodorescu St. I., 110, 127.
Teodorescu N., 438, 533.
Teodorescu V. N., 15.
Teodorescu I. S., 16, 127.
Terracini A., 126.
Thébault V., 95, 121, 122, 138, 146, 166, 172, 175, 184, 185, 205, 215, 235, 240, 262, 283, 296, 297, 299, 300, 302, 312, 338, 342, 359, 374, 380, 386, 390, 397, 422, 434, 436, 449, 453, 476, 498, 500, 526, 531, 551, 576, 580, 598, 619, 620, 621, 627, 639.
Thenard, 602.
Thierin H. G., 15.
Thomas R. W. 93.
Thompson M. J., 342.
Ţino O., 5, 15, 57, 117, 140, 167, 215, 290, 311, 408, 444, 445, 446, 457, 538, 541.
Ţiţeica Gabriela, 15.
Ţiţeica Gh., 5, 15, 19, 31, 57, 94, 116, 219, 241, 265, 266, 268, 269, 276, 285, 288, 290, 306, 313, 314, 315, 317, 321, 323, 329, 330, 344, 368, 369, 370, 374, 435, 436, 438, 460, 477, 544, 619.
Ţiţeica I. I., 113, 114, 167, 257, 263, 331, 350, 351, 395, 396, 443, 450, 451, 459, 493, 496, 537, 538, 540, 544, 545, 642.
Tolvai Menyöl F., 516, 517.
Toma N, N., 331.
Tomas J. T., 530.
Tompkins B. C., 383.
Tontsch H., 96, 190.
Toranzos I. F., 95.
Trancu-Iaşi, 437.
Trihot-Laspierre J,, 344.
Trofimov P., 166, 307.
Trump L. P., 93.
Tudor, diacon, 97.
Tudorel Gh., 493.
Ţupa R., 365.
Turpaih A., 436.

Ulescu A., 15.
Unter B., d-ra, 205, 310.
Urechiă A. V., 21.

Vahlen T., 628.
Vâlcovici V., 344, 435, 606.
Valiron G., 290.
Vallejo V., 579.
Valstain K., 170, 171, 189,
Van Aubel, 545.
Van de Lyn G., 531.
Van der Monde, 634.
Van Vleck, 39.
Vardala I., 15.
Vârgolici Gh., 184.
Varignon, 343.
Varlam M. C., 332.
Varlam M P., 160, 252.
Vasilache I. G., 205, 209.
Vasilache I., 15.
Vasilescu Al. Alexandra, 447, 448, 450, 595, 641, 642, 643.
Vasilescu Gr. 15, 100.
Vasilescu I., 386.
Vasilescu G. I., 15.
Vasilescu A. M., 331, 459.
Vasilescu K. N., 237, 315, 344, 606.
Vasilescu-Popescu C., 160.
Vasiliev I., 491.
Vasiliu G. D., 15, 168.
Vasiliu Gh, 5, 15, 113, 168, 216, 226, 262, 263, 311, 394, 395, 406, 441, 442, 455, 491, 550, 580, 641, 642, 643.
Vasiliu C. I., 110, 156.
Vasiliu M., 15, 100.
Vatamanu M. G., 344.
Vechsler B., 386.
Velea M., 196.
Velicescu G. T., 159.
Veronese, 543.
Vetter Q., 435, 436.
Vetuiani F. K., 436.
Viciu A., 343.
Vignaux C. J., 237, 290, 484, 530, 579.
Villat H., 94.
Vişa E., 241, 435, 449, 629.
Visarion C. I. V., 252, 355.
Voinescu C., 344.
Volberg M., 629.
Volta, 566.
Vrânceanu G., 217.
Vuibert H., 238, 291, 342, 380, 383, 531, 580, 628.

Waffelbakker, 297.
Wall S. H. 342.
Waring, 342.
Watt J., 606, 629.
Wawewski T., 436.
Weatherburn E. C., 241.
Weber, 532.
Weber W., 628.
Wegener, 145.
Wegner U., 628.
Weiss A. F., 628.
Weitzenbock R., 563.
Westergaard M. H., 342.
Whiteman A., 93.
Whyburn T. G., 530.
Whyburn M. W., 93.
Wilkosz W., 435.
Williams R. A., 383, 530.
Windred G., 241.
Wise H. W., 342.
Wöeffing E. 477.
Woehler, 557, 601, 602, 603.
Woinarosky R., 5, 15, 162, 457.
Wolff Christian, 415, 416, 417, 460.
Wong C. B., 530.

Zaharia O. N., 181, 182, 183, 290, 437.
Zahradnicek J., 343.
Zamfirescu Gh., 190, 241.
Zamfirescu Gr., 15.
Zănescu A., 344.
Zanne A. I., 429.
Zapan Gh., 16, 110, 154, 155, 293, 330.
Zapan Gr., 5, 16, 51, 112, 113, 118, 135, 141, 233, 264, 290, 330.
Zgârcea T. G., 331.
Zickler K., 630.
Ziff S. M., 160, 441, 589.
Zlatcu St. C., 16.
Zlatcu P., 190.
Zorn M., 342.
Zosima Constanţa, 485.
Zottu G. I., 16, 267, 367.
Zygmund A., 425.

K. UVRAJE CITATE *)

1. Cărţi şi Lucrări

		Pag.
N. Abramescu	Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même	410
N. Abramescu	Lecţiuni de geometrie pură infinitezimală	410
N. Abramescu	Lecţiuni de geometrie analitică	458
A. Angelescu	Lecţiuni de calcul diferenţial	459, 552
Ampère-Marie A.	Contributions sur la théorie mathématique du jeu	554
Ampère-Marie A.	Consideraţiuni filosofice asupra sistemului solid şi sistemului nervos la animalele articulate	557
Ampère Marie A.	Essai sur la philosophie des sciences	558
Ampère Marie A.	Meditations	558
Aubert & Papelier	Exercices d'Algèbre	233, 455
Gh. Balş	Bisericile lui ŞTEFAN CEL MARE	533
G. Bouligand	Leçons de géometrie vectorielle	82
M. E. Brahi	Exercices méthodiques de calcul integral	82
Cayley	Philosophical transactions	61
E. Cesaro	Analisi Algebrica	89
Ing. I. I. Chiţulescu	Chaosul	89
N. Ciorănescu	Curs elementar de Algebră superioară	393
Comberousse	Algebra superioară	252
A. Comte	Curs de Filosofie pozitivă	182
A. Comte	Geometrie Analitică	182
Coresi & Tudor	Tetravanghelul şi Cetveroevangheliar slavonesc	97
Coresi & Forro	Tâlcul evangheliilor şi Molitvenic românesc	97
Coresi	Psaltirea	97
Coresi	Pravila	97
Coresi	Cartea ce se chiamă evanghelie cu învăţătură	97
V. Cristescu	Culegere de probleme de Trigonometrie	572
Krauz	Lehrbuch der Balistik	36
G. Darboux	Principes de géometrie analytique	186
J. Dupuis	Table de logaritmi	158, 458, 459
G. Durand	Pom comprendre le calcul integral	82
V. Eeke	Oeuvres complets d'Archimede	422
I. Eliad	Elemente de desenu şi arhitectură	170
Fitz-Patrick	Exercices d'Arithmétique	278
F. G. M.	Exercices d'Arithmétique	458, 459
F. G. M.	Exercices de Géometrie	195, 220, 458, 474, 597
F. G. M.	Exercices de Trigonometrie	459
F. G. M.	Exercices de géometrie descriptive	458
F. G. M.	Compléments de Trigonometrie	405
F. G. M.	Cours de Mécanique	458
F. G. M.	Exercices d'Algèbre	459
F. G. M.	Cours d'Algebre élémentaire	459
Galle	Geodäsie	225
Gauss	F. C. Vol. III	225
Gauss	Disquisitiones	477
M. Ghermănescu	Curs de algebră superioară	458
Sp. Haret	Mecanica socială	322
Hadamard	Géométrie	581

*) In acest capitol nu sunt trecute uvrajele citate la *Bibliografii* şi la *Sporirea Bibliotecei „Gazeta Matematică"*.

		Pag.
Honterus	Gramatica	97
Honterus	Cosmografia	97
E. Humbert	Traité d'Arithmétique	458
A. G. Ioachimescu	Culegere de probleme de algebră	577
I. Ionescu	ISAC NEWTON	82
I. Ionescu	Beton armat	82, 83, 458, 459
I. Ionescu	Istoricul învăţământului ingineriei în România	82
I. Ionescu	Momente statice polare	82
I. Ionescu	Comparaţiunea rădăcinelor mai multor ecuaţiuni de gradul al doilea	82
I. Ionescu	Maşini de calcul	82
I. Ionescu	Momente statice absolute	83
I. Ionescu	Despre comparaţiunea construcţiilor geometrice sau geometrografia	83
G. Julia	Cours de cinématique	163
F. Klein	Vorlesungen über die hipergeometrische Funktion	569
Tr. Lalescu	Trigonometria de GH. LAZĂR	82, 83
Gh. Lazăr	Povăţuitorul tinerimei cătră adevărata şi drépta cetire	97
Gh. Lazăr	Geometria	460
Gh. Lazăr	Aritmetica matematicească	415, 416, 417, 418
Gh. Lazăr	Povăţuire cătră Aritmetică	417
Gh. Lazăr	De fractionibus decimalibus	418
Gh. Lazăr	Punerile de geometrie	460
Gh. Lazăr	Temeiurile trigonometriei cei drepte	460
J. Liouville	Sur le developpement des fonctions	575
Lobatchevski	Geometria imaginară	477
Lucas	Théorie des nombres	130, 132, 157, 340
M. Luther	Micul catechism	96
G. Marothi	Aritmetica	516
G. I. de Metzburg	Institutiones Mathematic	418
G. I. de Metzburg	Elementa trigonometriae planae	461
Meyer & Prandt	Handbuch der Physik, Mechanik der Flüssigen und gasförmigen Körper	36
P. Montel	Leçons sur les fonctions entières on méromorphes.	82, 83
Th. Moreux	Pour comprendre la mécanique	82
Th. Moreux	Pour continuer l'Algèbre	83
B. Niewenglowski	Cours d'Algèbre	381
J. Neuberg	Sur les figures semblablement variables	410
I. Onadi	Practice Algoritmi Erottemata Methodica	517
G. Papellier	Précis d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonometrie	82
G. Papellier	Précis de géometrie descriptive	82
J. Petersen	Constructions géometriques	410
Poncelet	Traité des propriétés projectives des figures	195
L. Ripert	Association française pour l'avancement des sciences	380
Rouché & Comberousse	Traité de géometrie	410
J. J. Rousseau	Emile	509
P. Sergescu	Gândirea matematică	458, 459
Gh. Sincai	Introducere către Aritmetică	24
Gh. Şincai	Aritmetica	515, 518
C. Sturm	Sur le développement des fonctions	575
C. Sturm	Sur une classe d'équation à différence partielle	575
A. Terracini	Le origini dei primi concetti della geometria differenziale	126

Pag.

Tolvai . . . . . Aritmetica 516
E. Wöeffing . . . . . Über specielle Dreiecke 477
Chr. Wolff . . . . . Compendium elementorum Mathescos Universae in usum studiosae juventutis adornatum 415, 416
Chr. Wolff . . . . . Anfangs-gründe aller mathematischen Wissenschaften 416
I. A. Zanne . . . . . Proverbele românilor 429
* * * . . . . . Anleitung zum Rechnen zum Gebrauche der Nationalschulen in den Königreiche Ungarn und den damit verbundenen Staaten . . . 417
* * * . . . . . Aritmetica din Cluj 517
* * * . . . . . Comentarii Mathematici Helvetici 39
* * * . . . . . Culegere de probleme de geometrie 257
* * * . . . . . Ducere de mână sau Anleitung zur Rechenkunst 21
* * * . . . . . Imitation de JÉSUS-CHRIST 515
* * * . . . . . Povăţuire către Aritmetică 25, 515, 517
* * * . . . . . Table de Aritmetică 148

2. Periodice

Acta matematica 124
Annales de la Faculté de Toulouse 61
Annales de Mathématiques pures et appliquées 477
Annales Scientifiques de l'Université de lassy 217
Archeion 458
Buletinul Societăţei Române de Matematici 162, 637
Bulletin de l'Académie royale de Belgique 380
Compte Rendu de la Société des Sciences de Varsovie 38
Curierul matematic 112, 235, 535, 614
Die Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Mitteilungen 477
Educational Times 297, 338
Foaia Matematică 643
Foaia pentru Minte, Inimă şi Literatură 97
Foile Duminicii spre înmulţirea cei de obşte cunoştiinţi 97
Gazeta Matematică 5, 16, 17, 18, 19, 20, 26, 27, 40, 45, 53, 59, 71, 77, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 107, 112, 114, 115, 127, 135, 136, 137, 150, 151, 164, 169, 172, 173, 175, 178, 179, 184, 186, 193, 207, 219, 227, 228, 232, 233, 235, 236, 262, 265, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 279, 283, 284, 285, 288, 297, 306, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 338, 358, 359, 360, 361, 362, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 382, 412, 415, 419, 424, 425, 453, 456, 457, 458, 459, 460, 469, 480, 485, 490, 502, 505, 508, 516, 524, 525, 542, 544, 552, 576, 578, 597, 607, 614, 619, 621, 626, 643.
Gazeta Transilvaniei 97
Illustration 510
Intermédiaires des Mathématiciens 297
Journal de G. DE LONGCHAMPS 121
Journal de VUIBERT 380
Journal des Savants 343
Journal für Mathematik 124
Jurnal Matematic 244
J. Liouville. Journal de Mathematiques pures et appliquées 477, 575
Marea Enciclopedie a sec. XVIII 509, 511
Mathematica 38

Pag.

Mathematische Annalen 124
Mathesis . 18, 122, 174, 175, 185, 296, 338, 380, 390, 424, 500, 525, 526, 619
Natura 26
Nouvelles Annales de Mathématiques 525
Proceedings of the London Mathematical Society 410
Recreații Științifice 18, 362, 364
Revista Aeronautică 135
Revista de Matematicas y Fisicas elementales 45
Revista Matematică din Timișoara 75, 228, 325, 338, 367, 422
Revista Științifică «*V. Adamachi*» 217
Știință și Progres 333
The American Mathematical Monthly 525
The Strand Magazine 525
The Tohoku Mathematical Journal 121
Uricarul 183

L. ERATA

Pagina sau problema de îndreptat	*Pagina la care se indică îndreptarea ce trebue făcută*
Problema 4486	120
Pag. 9	168
„ 11	168
Problema 4560	168
Pag. 5	168
„ 50	264
Problema 4598	264
Problema 3368	456
Pag. 380	456
„ 387	456
„ 388	456
„ 389	456
„ 377	456
Problema 4548	456
Pag. 432	504
„ 434	504
„ 459	552
„ 435	552
„ 449	552
Problema 4667	552
Pag. 549	600
Problema 4685	600

M. SUPLIMENTE

Masa de Sărbătorire a celor 40 ani ai *Gazetei Matematice*. Supliment la Nr. 9 . . . . . 8 pagini

Dare de seamă. Asupra mesei comune care a încheiat Concursul Societății «*Gazeta Matematică*», în seara de 18 Aprilie 1936. Supliment la Nr. 10 . . . . . 6 pagini

N. PUBLICAȚIUNI ÎN AFARĂ DE „GAZETA MATEMATICĂ“

Gazeta Matematică 1895 — 1935. Istoric-Învățăminte. (Volum jubilar). — 1935 . . . . . 500 pagini

Supliment de Exerciții. Vol. II. 9 numere . . . . . 228 pagini

Dela apariţia ultimului număr, s'au primit spre publicare: articole (A), note (N), cereri (C), exerciţii (E), probleme propuse (P), recreaţiuni (R) şi probleme rezolvate, indicate prin numărul lor de ordine, dela D-nii:

Amărăşteanu Marcel (4467, 76, 504, 05, 25, 40, 86, 635, 52, 61, 64, 68, 69, 76, 82, E, P); *Apostol Radu* (4679); *Arşavschi A.* (4425, 37, 608, 62, 79); *Bal St. L.* (4608, 56, 79); *Călinescu A.* (4594, 616, 22, 44, 48, 59, 67, 74); *Călinescu Paraschiva* (4662); *Cocea Th.* (P); *Constantinescu Gh. Gh.* (2079, 110, 87, 469, 701, 06, 895, 3236, 39, 48, 365, 675); *Ianculescu Oct.* (3230, 4612, 61, N); *Marcovici E.* (4625, 58, 59, 65, 68, 69, 73, 76, 79, 81, 84); *Matei D. D.* (3703, 4565, 67, 70, 79, 85, 99, 604, 12, 16, 28, 29, 61, 64, 68, 69, 76, E); *Mavrodin D.* (4155, 205, 34, 437); *Negrea M. L.* (4674, 76, 81, 82); *Popescu I. Gh. G-l* (A); *Popovici Gavril* (4608, 53, 54, 61, 76, 78); *Postelnicescu M.* (4568, 679); *Silaş G.* (N); *Vişa E.* (4674).

Articolele, notele, problemele rezolvate, cât şi cele de propus de **geometrie,** *a căror soluţie nu va fi însoţită de figura explicativă făcută cu îngrijire pe o foaie de hârtie separată, nu vor fi luate în consideraţiune.*

Manuscrisele se vor scrie pe **o singură parte a foii şi nu se vor trata mai multe chestiuni diferite pe aceeaşi foaie.** Dacă o chestiune cuprinde mai multe foi, ele *se vor lipi sau coase în partea stângă,* împreună cu figurile respective, care se fac de asemenea pe foaie aparte. *Foile vor avea format de sfert de coală,* iar scrisul se va face **pe dimensiunea cea mică,** ca pe o foaie de caiet de dictando.

Articolele, notele, problemele propuse, exerciţiile, recreaţiile ce se trimit pentru tipărire în „GAZETA MATEMATICĂ", trebue să fie originale, iar nu luate din cărţi sau reviste speciale de matematici.

Colecţiunea „GAZETEI MATEMATICE“

Colecţiunea *„Gazetei Matematice“* se vinde sub formă de volume broşate cu preţul de 400 lei anul şi eventual numere izolate cu preţul de 40 lei exemplarul.

Biblioteca „GAZETEI MATEMATICE“

I. **I. Ionescu, G. Ţiţeica, A. G. Ioachimescu şi V. Cristescu,** *Culegere de Probleme de Aritmetică, Geometrie, Algebră şi Trigonometrie.* (520 pag. cu 3381 probleme). (Epuizată).

II. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră (Teoria ecuaţiilor).* (Epuizată).

III. **N. Abramescu,** *Lecţiuni elementare de Algebră superioară, pentru cl. VIII ştiinţifică,* Ediţia V . . . . . Lei 90

IV. **A. G. Ioachimescu şi G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Mecanică şi Geometrie Analitică* (222 pag. cu 825 probleme şi o planşă) (Epuizată).

V. **Tr. Lalescu şi Şt. N. Mirea,** *Culegere de Probleme de Geometrie Descriptivă şi Cosmografie* (Epuizată).

VI. **Tr. Lalescu,** *Tratat de Geometrie Analitică,* Fascicola I Ediţia II revăzută şi adăogită, 1923 (Epuizată).

Idem, Fascicola II Conice (Epuizată).
Idem, Fascicola III Cuadrice (Epuizată).
Idem, Fascicola IV Aplicaţiile geometrice ale calculului infinitezimal . . . . . Lei 150

VII. **Gh. Lazăr,** *Trigonometria drept liniară* (după cursul predat de Gh. Lazăr la colegiul Sf. Sava) . . . . . Lei 10

VIII. **A. G. Ioachimescu,** *Culegere de Probleme de Algebră,* ediţia III-a revăzută şi îngrijită de *Tiberiu Popoviciu.* 1926. . Lei 180

IX. **G. Em. Filipescu, A. G. Ioachimescu, I. Ionescu, T. Lalescu şi G. Ţiţeica,** *Vocabular Matematic* . . . . . Lei 20

X. **G. Ţiţeica,** *Culegere de Probleme de Geometrie.* . Lei 150

XI. **Gazeta Matematică** 1895—1935. *Istoric, învăţăminte.* Volum jubilar (500 pag.) . . . . . Lei 250

XII. **V. Cristescu,** *Culegere de probleme de Trigonometrie* Partea I (Goniometrie), ediţia II-a revăzută şi adăogită de *Gh. Th. Gheorghiu* . . . . . Lei 95

La aceste preţuri se vor adăoga taxele poştale pentru expediţie.

Biblioteca Technică a „GAZETEI MATEMATICE“
(Tipărită din fondul ANGHEL SALIGNY)

I. **I. Ionescu,** *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcţiune şi a principiilor de calcul.* (Ediţia II). . Lei 150

«Gazeta Matematică» apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul de 200 lei anual, se plăteşte înainte şi începe dela 15 Septemvrie, oricând s'ar face achitarea lui în cursul anului şi nu se face pe termene mai scurte de un an.

Toată corespondenţa se trimite pe adresa :

Revistei „GAZETA MATEMATICĂ“
Casa Gazeta Matematică
Calea Griviţei No. 158 — Bucureşti 2.

Abonamentele se trimit pe aceeaşi adresă D-lui Locot.-Comandor **GR. ZAPAN**

C. 41989